BAB II
LATAR BELAKANG MATEMATIS

Cara-cara penulisan matrik dan operasi-operasi yang menyangkut matrik banyak digunakan dalam pengerjaan sistem persamaan aljabar yang menyangkut n persamaan dengan n anu , karena sistem persamaan dapat dinyatakan dan dimanipulasi dalam bentuk matrik .

2.1 MATRIK

Matrik adalah himpunan elemen-elemen yang disusun berbentuk segi empat yang dinyatakan oleh sebuah lambang tunggal . Misal : [A] adalah matrik A dengan a_{ij} menunjukkan elemen matrik . Himpunan elemen yang mendatar disebut baris yang ditunjukkan dengan lambang i , sedang elemen yang tegak disebut kolom dengan lambang j .

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrik diatas mempunyai m baris dan n kolom yang dinyatakan sebagai matrik berukuran m x n .

JENIS-JENIS MATRIK

- Matrik dengan m=1
  disebut matrik baris / vektor baris
- Matrik dengan n=1
  disebut matrik kolom / vektor kolom
- Matrik dengan m=n
  disebut matrik bujur sangkar

Misal :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dimana diagonalnya adalah elemen-elemen a_{11}, a_{22}, a_{33} yang sering disebut sebagai diagonal utama .

Jenis-jenis matrik bujur sangkar :

1. Matrik simetri

   Adalah matrik dimana elemen-elemen a_{ij} = a_{ji} untuk semua i

2. Matrik diagonal

   Adalah matrik bujur sangkar dimana semua elemen diluar diagonal utama adalah nol .

3. Matrik satuan / matrik identitas

   Adalah matrik diagonal dimana semua elemen pada diagonal utama sama dengan satu , biasa ditulis dengan lambang [I] .

4. Matrik segitiga atas

   Adalah matrik dimana semua elemen diatas diagonal utama adalah nol .

5. Matrik segitiga bawah

   Adalah matrik dimana semua elemen diatas diagonal utamaadalah nol .

6. Matrik pita

   Adalah matrik yang mempunyai elemen sama dengan nol kecualipada suatu pita yang berpusat pada diagonal utama .

   misal :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

   Adalah matrik tridiagonal .

2.2 PENGOPERASIAN MATRIK

- **Penambahan / pengurangan matrik**

  Dilaksanakan dengan menambah atau mengurangkan elemen -elemen yang berpadanan pada masing-masing matrik .

  Misal :

  [C] = [A] + [B]

  maka $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

  $a_{ij} = c_{ij} - b_{ij}$

- **Perkalian matrik dengan skalar**

  misal k adalah skalar dikalikan dengan [A] maka setiap elemen [A] yaitu a_{ij} dikalikan dengan k

- **Perkalian matrik**

  misal : [C] = [A] x [B]

  Yang dapat dirumuskan sebagai :

  $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

  misal $[A]_{mxn} x [B]_{mxk} = [C]_{mxk}$

  Jadi banyak kolom [A] harus sama dengan baris di [B]

- **Transpose matrik**

  melibatkan pentransformasian baris-barisnya ke dalam kolom- kolomnya ataupun sebaliknya.

  misal : $[A] = a_{ij}$

  $$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \end{bmatrix}$$

  $$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

- **Matrik Invers**

  Misal [A] adalah matrik bujur sangkar , maka terdapat matrik lain $[A]^{-1}$ yang disebut invers dari [A] atau disebut balikan dari [A] untuk mana berlaku $[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$

2.2. TRANSFORMASI MATRIK ELEMENTER

Matrik elementer didapat dari pengerjaan satu kali transformasi elementer terhadap matrik identitas I. Hasil dari operasi transformasi elementer matriknya adalah ekivalen dengan matrik mula-mula . A dan B ekivalen atau $A \sim B$ artinya rank A = rank B .

Ada 3 jenis matrik elementer yang dibentuk dari matrik identitas I ,yaitu :

1. Matrik elementer macam pertama

   Yaitu matrik diagonal Q ,yang dibentuk dari matrik identitas I yang elemen diagonal ke i diganti dengan konstanta $q \neq 0$.

   misal : $$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matrik elementer macam kedua

   Yaitu matrik bujur sangkar R , yang didapat dari menukar dua baris i dan j pada matrik identitas I.

   Misal : $$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Matrik elementer macam ketiga

   Yaitu matrik bujur sangkar S ,yang didapat dari dengan jumlahan dari baris i dan baris ke j kali konstanta $s \neq 0$.

Misal : $S = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dimana :

$i=1 \quad j=2$

Perkalian awal antara matrik A dengan matrik elementer akan menghasilkan sebuah transformasi elementer A yang disebut juga operasi baris elementer pada A .

Sebagai contoh :

1. $QA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ qa_{21} & qa_{22} & qa_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

2. $RA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

3. $SA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+sa_{31} & a_{22}+sa_{32} & a_{23}+sa_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Terlihat hasil dari perkalian awal oleh matrik elementer hasilnya mengikuti transformasi A :

1. QA = perkalian semua elemen-elemen A dari satu baris dengan sebuah skalar .
2. RA = menukar dua baris .
3. SA = menjumlahkan perkalian skalar dengan elemen dari satu baris dengan elemen yang bersesuaian pada baris lain .