BAB IV

PENYELESAIAN MASALAH PROGRAM SEPARABEL

Pada bab ini, akan diberikan contoh permasalahan Program Separabel yang gagal memenuhi kondisi Khun-Tucker, untuk kemudian diselesaikan dengan Metode Aproksimasi Linier Putus Bersambung.

Contoh 12

Memaksimalkan : $Z = x_1$

Dengan syarat : $x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$

Pembahasan

Pada sub bab 3.2 telah diperlihatkan bahwa masalah pemaksimalan diatas gagal memenuhi kondisi Khun-Tucker, sehingga nilai optimal tidak diperoleh. Maka untuk mencari penyelesaiannya digunakan metode Aproksimasi.

Langkah pertama, ditunjukkan kedua fungsi tujuan dan kendala adalah separabel.

(1) Fungsi Tujuan

$$Z = f_1(x_1) = x_1$$

(2) Fungsi Kendala

$$g_1(x_1,x_2) = -g_{11}(x_1) + g_{12}(x_2) \leq 0$$

dengan $g_{11}(x_1) = (1-x_1)^3$

$g_{12}(x_2) = x_2$

Jelas , masalah Program Tidak Linier diatas merupakan Program Separabel, karena baik fungsi tujuan maupun fungsi kendala mempunyai struktur separabilitas.

Kemudian dari kendala pertidaksamaan, diperoleh nilai-nilai x_1 dan x_2 , yaitu $x_2 = 0$ dan $0 \leq x_1 \leq 1$.

Selanjutnya untuk aproksimasi linier putus bersambung pada interval $0 \leq x_1 \leq 1$ diambil setiap panjang selang 0,2 , maka diperoleh titik-titik :

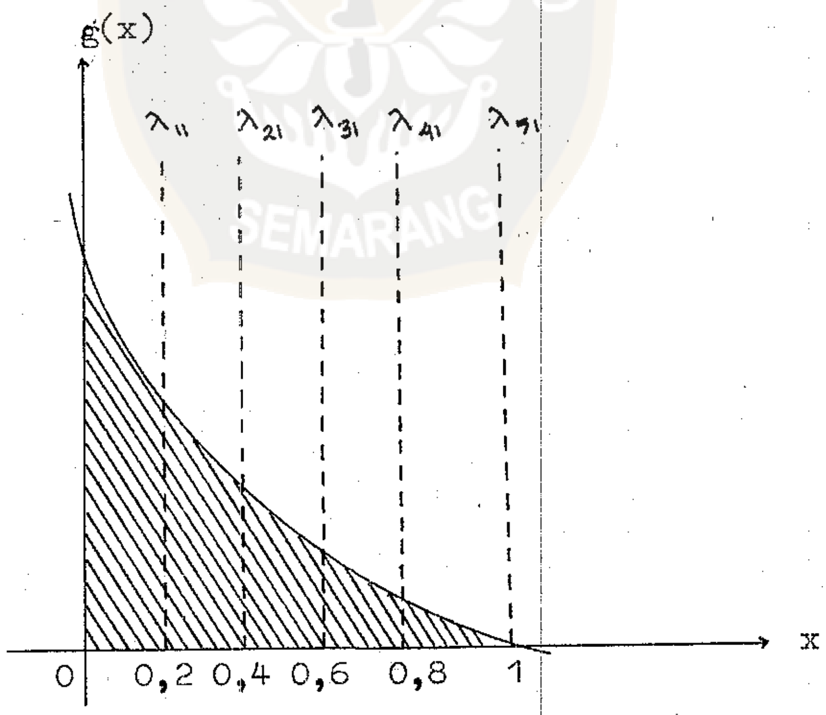
$x_{01}=0 < x_{11}=0,2 < x_{21}=0,4 < x_{31}=0,6 < x_{41}=0,8 < x_{51}= 1$

sedemikian untuk setiap x_1 berlaku

$x_{01} \leq x_1 \leq x_{11}$, $x_{11} \leq x_1 \leq x_{21}$

$x_{21} \leq x_1 \leq x_{31}$, $x_{31} \leq x_1 \leq x_{41}$

$x_{41} \leq x_1 \leq x_{51}$



gambar (11)

Sehingga

$$\hat{x}_1 = \lambda_{01} x_{01} + \lambda_{11} x_{11} + \lambda_{21} x_{21} + \lambda_{31} x_{31} + \lambda_{41} x_{41} + \lambda_{51} x_{51}$$

atau

$$\hat{x} = 0\lambda + 0.2\lambda + 0.4\lambda + 0,6\lambda + 0,8\lambda + 1\lambda$$

dan

$$\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} = 1$$

Maka aproksimasi linier putus bersambung dari $f_1(x_1)$ dan $g_{11}(x_1)$ adalah

$$\hat{f}_1(x_1) = \lambda_{01}f_1(x_{01}) + \lambda_{11}f_1(x_{11}) + \lambda_{21}f_1(x_{21}) + \lambda_{31}f_1(x_{31}) + \lambda_{41}f_1(x_{41}) + \lambda_{51}f_1(x_{51})$$

atau

$$\hat{f}_1(x_1) = 0\ \lambda_{01} + 0,2\ \lambda_{11} + 0,4\ \lambda_{21} + 0,6\ \lambda_{31} + 0,8\ \lambda_{41} + 1\ \lambda_{51}$$

dan

$$\hat{g}_{11}(x_1) = \lambda_{01}g_1(x_{01}) + \lambda_{11}g_1(x_{11}) + \lambda_{21}g_1(x_{21}) + \lambda_{31}g_1(x_{31}) + \lambda_{41}g_1(x_{41}) + \lambda_{51}g_1(x_{51})$$

$$\hat{g}_{11}(x_1) = (1-0)^3\ \lambda_{01} + (1-0,2)^3\ \lambda_{11} + (1-0,4)^3\ \lambda_{21} + (1-0,6)^3\ \lambda_{31} + (1-0,8)^3\ \lambda_{41} + (1-1)^3\ \lambda_{51}$$

$$\hat{g}_{11}(x_1) = 1\ \lambda_{01} + 0,512\ \lambda_{11} + 0,216\ \lambda_{21} + 0,064\ \lambda_{31} + 0,008\ \lambda_{41} + 0\ \lambda_{51}$$

Sehingga bentuk terstruktur program separabel diatas menjadi :

Memaksimalkan

$$\hat{Z} = 0\ \lambda_{01} + 0,2\ \lambda_{11} + 0,4\ \lambda_{21} + 0,6\ \lambda_{31} + 0,8\ \lambda_{41} + 1\ \lambda_{51}$$

Dengan syarat

$$x_2 - (\ 1\ \lambda_{01} + 0,512\ \lambda_{11} + 0,216\ \lambda_{21} + 0,064\ \lambda_{31} + 0,008\ \lambda_{41} + 0\ \lambda_{51}) \le 0$$

$$\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} = 1$$

$$x_2, \lambda_{01}, \lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{41}, \lambda_{51} \ge 0$$

simplek.

Kendala pertidaksamaan masalah diatas dibawa ke bentuk kanonik dengan memasukkan perubah kelonggaran s.

Hingga masalah menjadi :

Mencari $x_2, \lambda_{01}, \lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{41}, \lambda_{51} \geq 0$

yang memenuhi

$x_2 - 1\lambda_{01} + 0{,}512\ \lambda_{11} + 0{,}216\ \lambda_{21} + 0{,}064\ \lambda_{31} + 0{,}008\ \lambda_{41} + 0\ \lambda_{51} + s = 0$

$\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} = 1$

dengan memaksimalkan

$\hat{Z} = 0\ \lambda_{01} + 0{,}2\ \lambda_{11} + 0{,}4\ \lambda_{21} + 0{,}6\ \lambda_{31} + 0{,}8\ \lambda_{41} + 1\ \lambda_{51}$

Maka :

$X = [\ x_2; \lambda_{01}; \lambda_{11}; \lambda_{21}; \lambda_{31}; \lambda_{41}; \lambda_{51}; s\ ]$

$B = (\ 0\ ;\ 1\ )$

$C = (\ 0\ ;\ 0{,}2\ ;\ 0{,}4\ ;\ 0{,}6\ ;\ 0{,}8\ ;\ 1\ )$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0{,}512 & -0{,}216 & -0{,}064 & -0{,}008 & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

tereduksi lengkap

Jadi siap simplek, dengan s dan λ_{51} sebagai perubah basis.

Tabel simplek diberikan pada tabel (10).

TABEL SIMPLEK

$\bar{c}_i$	c_j	0	0	0,2	0,4	0,6	0,8		
	$\bar{x}_i$ \ x_j	x_2	λ_{01}	λ_{11}	λ_{21}	λ_{31}	λ_{41}	b_i	Q_i
0	S	1	-1	-0,512	-0,216	-0,064	-0,008	0	
1	λ_{51}	0	1	1	1	1	1	1	
	z_j	0	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2		

Tabel (10)

Ternyata semua $z_j \leqslant 0$, maka solusi optimal tercapai.

Dengan nilai :

$x_2 = 0$ $\quad \lambda_{11} = 0$ $\quad \lambda_{31} = 0$ $\quad \lambda_{51} = 1$

$\lambda_{01} = 0$ $\quad \lambda_{21} = 0$ $\quad \lambda_{41} = 0$

segingga $\hat{x}_1 = 0\,\lambda_{01} + 0{,}2\,\lambda_{11} + 0{,}4\,\lambda_{21} + 0{,}6\,\lambda_{31} + 0{,}8\,\lambda_{41} + 1\,\lambda_{51}$

$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1$

$= 1$

Jadi nilai optimal

$\hat{Z} = 1$

Ada beberapa Program Tidak linier yang tidak Separabel langsung, yaitu program-program tidak linier yang kelihatannya tidak separabel, tetapi dengan suatu substitusi tertentu dapat dibuat separabel. Sehingga untuk program seperti ini penyelesaian optimal dapat juga dilakukan dengan aproksimasi linier putus bersambung.

Pada akhir bab ini akan diberikan suatu contoh Program Tidak Linier yang tidak separabel langsung, beserta penyelsaiannya.

<u>Contoh</u> 13

Memaksimalkan : $Z = e^{x_1+x_2+x_3}$

Dengan syarat : $x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

<u>Pembahasan</u>

Dari model Program Tidak Linier diatas, struktur dari fungsi tujuan bukanlah separabel, karena tidak dapat dipisah-pisahkan sebagai jumlahan fungsi-fungsi dengan perubah tunggal. Tetapi dengan mengambil suatu substitusi akan ditunjukkan bahwa program adalah separabel.

Ambil substitusi $Y = \ln Z$

Maka, $Y = \ln (e^{x_1+x_2+x_3})$

$Y = x_1 + x_2 + x_3$

Setelah substitusi, maka model Program diatas menjadi :

Memaksimalkan : $Y = x_1 + x_2 + x_3$

Dengan syarat : $x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 4$

$$x_1 \ , x_2 \ , x_3 \ \geq 0$$

Dari bentuk tersebut dapat diperlihatkan bahwa program adalah Separabel, karena :

(1). Fungsi tujuan merupakan fungsi linier, jelas separabel.

(2). Fungsi kendala.

$$g_1(x_1,x_2,x_3) = g_{11}(x_1) + g_{12}(x_2) + g_{13}(x_3) \leq 4$$

dengan $g_{11}(x_1) = x_1^2$

$g_{12}(x_2) = x_2$ $\qquad g_{13}(x_3) = x_3$

maka fungsi kendala diatas separabel.

Dari kendala pertidaksamaan, diperoleh batas nilai perubah, yaitu $0 \leq x_1 \leq 2$, $0 \leq x_2 \leq 4$, $0 \leq x_3 \leq 4$.

Kemudian aproksimasi linier putus bersambung dilakukan hanya untuk perubah x_1 saja , karena perubah ini berbentuk tidak linier pada fungsi kendala yaitu $g_{11}(x_1) = x_1^2$. Sedang untuk perubah lainnya sudah berbentuk linier.

Diambil panjang segmen 0,25 , sehingga titik batas tiap segmen adalah :

$x_{01} = 0$	$x_{11} = 0,25$	$x_{21} = 0,5$
$x_{31} = 0,75$	$x_{41} = 1$	$x_{51} = 1,25$
$x_{61} = 1,5$	$x_{71} = 1,75$	$x_{81} = 2$

dengan

$x_{01} \leq x_1 \leq x_{11}$ $\qquad x_{11} \leq x_1 \leq x_{21}$

$x_{21} \leq x_1 \leq x_{31}$ $\qquad x_{31} \leq x_1 \leq x_{41}$

$$x_{41} \le x_1 \le x_{51} \qquad x_{51} \le x_1 \le x_{61}$$

$$x_{61} \le x_1 \le x_{71} \qquad x_{71} \le x_1 \le x_{81}$$

Sehingga perkiraan dari x_1 (ditulis sebagai $\hat{x}_1$) adalah

$$\hat{x}_1 = \lambda_{01}x_{01} + \lambda_{11}x_{11} + \lambda_{21}x_{21} + \lambda_{31}x_{31} + \lambda_{41}x_{41} + \lambda_{51}x_{51} + \lambda_{61}x_{61} + \lambda_{71}x_{71} + \lambda_{81}x_{81}$$

$$\hat{x}_1 = 0\ \lambda_{01} + 0{,}25\ \lambda_{11} + 0{,}5\ \lambda_{21} + 0{,}75\ \lambda_{31} + 1\ \lambda_{41} + 1{,}25\ \lambda_{51} + 1{,}5\ \lambda_{61} + 1{,}75\ \lambda_{71} + 2\ \lambda_{81}$$

dimana

$$\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} = 1$$

Perkiraan dari $g_{11}(x_1)$ adalah

$$\hat{g}_{11}(x_1) = \lambda_{01}g_{11}(x_{01}) + \lambda_{11}g_{11}(x_{11}) + \lambda_{21}g_{11}(x_{21}) + \lambda_{31}g_{11}(x_{31}) + \lambda_{41}g_{11}(x_{41}) + \lambda_{51}g_{11}(x_{51}) + \lambda_{61}g_{11}(x_{61}) + \lambda_{71}g_{11}(x_{71}) + \lambda_{81}g_{11}(x_{81})$$

$$\hat{g}_{11}(x_1) = (0)^2\ \lambda_{01} + (0{,}25)^2\ \lambda_{11} + (0{,}5)^2\ \lambda_{21} + (0{,}75)^2\ \lambda_{31} + (1)^2\ \lambda_{41} + (1{,}25)^2\ \lambda_{51} + (1{,}5)^2\ \lambda_{61} + (1{,}75)^2\ \lambda_{71} + (2)^2\ \lambda_{81}$$

$$\hat{g}_{11}(x_1) = 0\ \lambda_{01} + 0{,}0625\ \lambda_{11} + 0{,}25\ \lambda_{21} + 0{,}5625\ \lambda_{31} + 1\ \lambda_{41} + 1{,}5625\ \lambda_{51} + 2{,}25\ \lambda_{61} + 3{,}0625\ \lambda_{71} + 4\ \lambda_{81}$$

Jadi model terstruktur program separabel menjadi :

Memaksimalkan :

$$\hat{Y} = 0\ \lambda_{01} + 0{,}25\ \lambda_{11} + 0{,}5\ \lambda_{21} + 0{,}75\ \lambda_{31} + 1\ \lambda_{41} + 1{,}25\ \lambda_{51} + 1{,}5\ \lambda_{61} + 1{,}75\ \lambda_{71} + 2\ \lambda_{81} + x_2 + x_3$$

Dengan syarat :

$$0\ \lambda_{01} + 0{,}0625\ \lambda_{11} + 0{,}25\ \lambda_{21} + 0{,}5625\ \lambda_{31} + 1\ \lambda_{41} + 1{,}5625$$

$\lambda_{51} + 2,25\ \lambda_{61} + 3,0625\ \lambda_{71} + 4\ \lambda_{81} + x_2 + x_3 \leq 4$

$\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} = 1$

$\lambda_{01}, \lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{41}, \lambda_{51}, \lambda_{61}, \lambda_{71}, \lambda_{81}, x_2, x_3 \geq 0$

Dari bentuk diatas jelas, sekarang masalah telah menjadi program linier dengan 11 perubah , satu kendala pertidaksamaan dan satu kendala persamaan yang disebut dengan kendala separabilitas.

Selanjutnya digunakan algoritma simplek untuk menentukan nilai maksimal semua perubah.

Kendala pertidaksamaan, dibawa ke bentuk kanonik dengan memasukkan perubah kelonggaran s.

Hingga masalah menjadi :

Mencari $\lambda_{01}, \lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{41}, \lambda_{51}, \lambda_{61}, \lambda_{71}, \lambda_{81}, x_2, x_3, s \geq 0$

yang memenuhi

$0\ \lambda_{01} + 0,0625\ \lambda_{11} + 0,25\ \lambda_{21} + 0,5625\ \lambda_{31} + 1\ \lambda_{41} + 1,5625$

$\lambda_{51} + 2,25\ \lambda_{61} + 3,0625\ \lambda_{71} + 4\ \lambda_{81} + x_2 + x_3 + s = 4$

$\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} = 1$

Dengan tujuan memaksimalkan

$Y = 0\ \lambda_{01} + 0,25\ \lambda_{11} + 0,5\ \lambda_{21} + 0,75\ \lambda_{31} + 1\ \lambda_{41} + 1,25\ \lambda_{51} +$

$1,5\ \lambda_{61} + 1,75\ \lambda_{71} + 2\ \lambda_{81} + x_2 + x_3 + s$

Sekarang siap simplek dengan s dan λ_{01} sebagai perubah basis.

Dengan tabel simplek disajikan bibawah ini.