BAB II

KONSEP-KONSEP DASAR

2.1 CEMBUNG DAN CEKUNG

Konsep kecembungan dan kecekungan mempunyai peranan penting dalam Program Tidak Linier. Disini terlebih dahulu akan diuraikan pengertian fungsi cembung dan fungsi cekung.

Definisi 3

Himpunan K dikatakan himpunan cembung, jika $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K$ maka $\bar{x} \in K$ dimana $\bar{x} = (1-\lambda)\ \bar{x}_1 + \lambda\ \bar{x}_2$ untuk $0 \le \lambda \le 1$.

Contoh 3

Pandang E^1

Persamaan linier $A\bar{x} = \bar{b}$ merupakan himpunan cembung .

Contoh 4

Pandang E^2

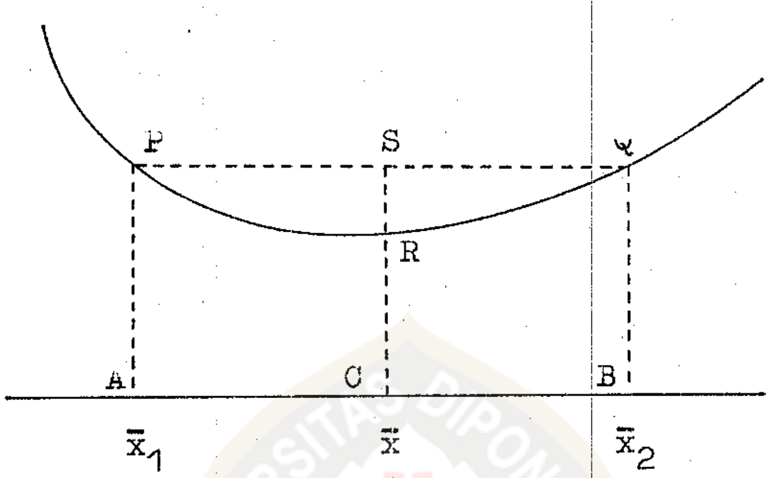
Himpunan $X = \{ (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \mid \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \le 1 \}$ adalah cembung

Definisi 4

Ambil $\bar{x} \in K$, dimana K adalah himpunan cembung. Suatu fungsi $f(\bar{x})$ dikatakan cembung jika untuk sebarang dua titik $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ dalam K berlaku :

$f(\bar{x}) \le (1-\lambda)\ f(\bar{x}_1) + \lambda\ f(\bar{x}_2)$, $0 \le \lambda \le 1$.

Pandang E^1



<u>gambar</u> (1)

Ambil $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$, namakan A dan B . Dan $\bar{x}$ adalah kombinasi linier dari $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ (namakan C). Dengan $f(\bar{x})$ sebagai kurva yang diberikan gambar (1) ,

$AP = f(\bar{x}_1)$, $BQ = f(\bar{x}_2)$ dan $CR = f(\bar{x})$.

Jika $\bar{x} = (1-\lambda)\ \bar{x}_1 + \lambda\ \bar{x}_2$, maka

$CS = (1-\lambda)\ f(\bar{x}_1) + \lambda\ f(\bar{x}_2)$

Sehingga $CR \leq CS$

<u>Contoh</u> 5

Fungsi linier $\bar{z} = a\bar{x}$ adalah fungsi cembung

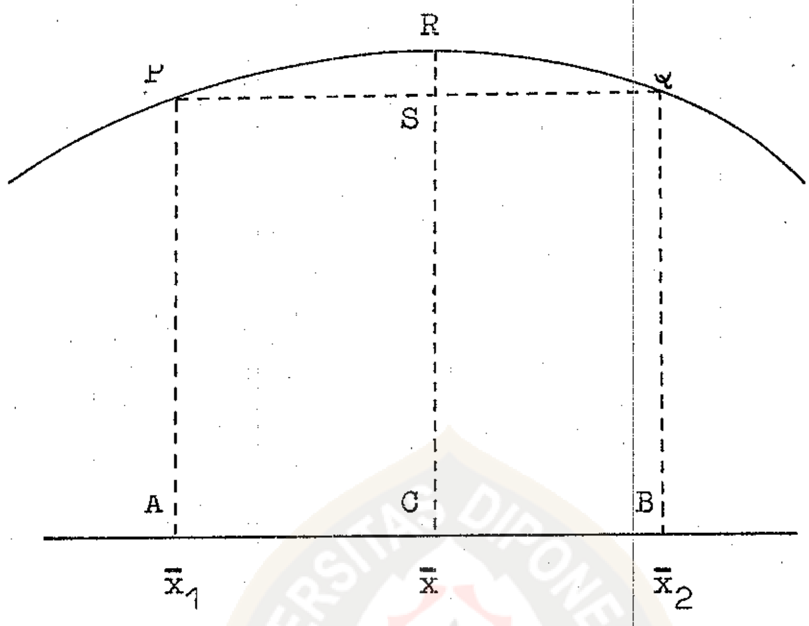
<u>Definisi</u> 5

Ambil $\bar{x} \in K$ dimana K adalah himpunan cembung

Suatu fungsi $f(\bar{x})$ dikatakan cekung , jika untuk sebarang dua titik $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ dalam K berlaku :

$f(\bar{x}) \geq (1-\lambda)\ \bar{x}_1 + \lambda\ \bar{x}_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Pandang E^1



gambar (2)

Ambil $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$, namakan A dan B . Dan $\bar{x}$ adalah kombinasi linier dari $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$(namakan C).Dengan $f(\bar{x})$ sebagai kurva yang diberikan gambar 2 ,maka

$AP = f(\bar{x}_1)$, $BQ = f(\bar{x}_2)$ dan $CR = f(\bar{x})$.

Jika $\bar{x} = (1-\lambda)\,\bar{x}_1 + \lambda\,\bar{x}_2$, maka

$CS = (1-\lambda)\, f(\bar{x}_1) + \lambda\, f(\bar{x}_2)$

Sehingga $CR \geq CS$.

Contoh 6

Fungsi linier $\bar{z} = a\bar{x}$ adalah cekung .

Definisi 6

Suatu fungsi $f(\bar{x})$ dikatakan cekung sejati (stricly concav) pada himpunan cembung K jika untuk setiap $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ dalam K berlaku

$$f(\bar{x}) > (1-\lambda)\, f(\bar{x}_1) + \lambda\, f(\bar{x}_2) \;, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 .$$

Sedangkan suatu fungsi $f(\bar{x})$ dikatakan cembung sejati

Dari definisi diatas maka jelas bahwa fungsi linier $z = ax$ adalah cembung sekaligus cekung, sebab untuk sebarang dua titik $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ dan sebarang λ yang memenuhi $0 \le \lambda \le 1$ berlaku :

$$a\bar{x} = a \{ (1-\lambda)\, \bar{x}_1 + \lambda\, \bar{x}_2 \}$$

$$= (1-\lambda)\, a\bar{x}_1 + \lambda\, a\bar{x}_2 \quad .$$

<u>Teorema 1</u>

Andaikan fungsi $f_i(\bar{x})$, $i = 1,2, \ldots ,n$ adalah cekung pada himpunan cembung yang memuat $\bar{x}$, maka fungsi :

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\bar{x}) \qquad \text{juga cekung}$$

<u>Bukti :</u>

$$f\{ (1-\lambda)\, \bar{x}_1 + \lambda\, \bar{x}_2 \} = \sum_{i=1}^{n} f_i\{ (1-\lambda)\, \bar{x}_1 + \lambda\, \bar{x}_2 \}$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n} \{ (1-\lambda)\, f_i(\bar{x}_1) + \lambda\, f_i(\bar{x}_2) \}$$

$$\ge (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} f_i(\bar{x}_1) + \lambda \sum f_i(\bar{x}_2)$$

$$\ge (1-\lambda)\, f(\bar{x}_1) + \lambda\, f(\bar{x}_2)$$

Jadi jumlahan dari beberapa fungsi cekung adalah cekung.

Demikian pula jumlahan dari beberapa fungsi cembung adalah fungsi cembung.

2.2. PENGUJIAN SUATU FUNGSI

Jika suatu fungsi dengan n variabel $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dengan gradien sebagai turunan parsiel x_j untuk $j = 1, 2, \ldots, n$.

$$\nabla F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)$$

Maka dapat dibuat matrik Hessian dari fungsi $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yang berisikan turunan parsiel tingkat dua pada x_j untuk $j = 1, 2, \ldots, n$.

$$H_{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Turunan parsiel orde kedua erat hubungannya dengan konsep kecekungan atau kecembungan. Maka dengan menggunakan matrik Hessian $H_{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ dapat dilakukan pengujian terhadap suatu fungsi sebagai berikut :

2.2.1. Pengujian suatu fungsi merupakan fungsi cembung jika dipenuhi :

(a). Dapat dibuat suatu matrik Hessian $H_{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ yang simetris.

(b). Semua elemen diagonal simetris tidak negatip atau $$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} \geq 0 \quad \text{untuk} \quad j = 1,2, \ldots ,n$$

(c). Nilai determinan matrik Hessian selau tidak negatif atau

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \right| \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \geq 0$$

2.2.2. Pengujian suatu fungsi merupakan fungsi cekung jika dipenuhi :

(a). Dapat dibuat matrik Hessian $H_{F(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ yang simetris.

(b). Semua elemen diagonal simetris adalah tidak negatif atau $\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} \geq 0$ untuk $j=1,2,\ldots,n$

(c). Nilai determinan adalah " ≤ "," ≥ " , ... , n x n atau

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \right| \leq 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \geq 0$$

....

....

....

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \geq 0$$

untuk n bilangan genap .

2.3. PENYELESAIAN MASALAH PROGRAM LINIER DENGAN METODE SIMPLEK

Pada akhir pembahasan bab II ini, akan diuraikan mengenai penyelesaian masalah Program Linier dengan metode simplek. Karena masalah ini sangat erat hubungannya dengan permasalahan pengoptimalan Program Tidak Linier yang separabel yang diselesaikan dengan metode Aproksimasi Linier Putus Bersambung.

Masalah Program Linier dengan kendala pertidaksamaan, dapat diberikan dalam bentuk umum sebagai berikut :

Memaksimalkan :

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Dengan syarat :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_{mn} \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Penyelesaian cara simplek hanya dikerjakan untuk bentuk kanonik. Untuk bentuk yang bukan kanonik harus diubah dulu ke bentuk kanonik.

2.3.1. BENTUK KANONIK.

Sistim pertidaksamaan yang merupakan kendala dalam masalah Program Linier diatas dibawa ke bentuk kanonik dengan memasukkan perubah-perubah kelonggaran x_{n+i} untuk $i = 1,2,\ldots,m$.

Diperoleh bentuk :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

atau dapat ditulis

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i \text{ , untuk } i = 1,2, \ldots , m.$$

Bentuk diatas syaratnya $b_i \geq 0$, sehingga basis yang diperoleh adalah fisibel. Sehingga solusi basis adalah $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j$, untuk i= 1,2, ... , m.

Dari fungsi tujuan, yang berbentuk $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j$, setelah masuknya perubah-perubah kelonggaran, akan berubah menjadi : $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j + \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}\ x_{n+i}$

dengan c_{n+i} sebagai koefisien fungsi tujuan dari basis.

Substitusi x_{n+i} ke Z diperoleh

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j + \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}\ (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j + \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}\ b_i - \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}\ a_{ij}\ x_j$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}\ b_i + \sum_{j=1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}\ a_{ij})\ x_j$$

Jika diambil : $Z_o = \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}\ b_i$ dan

$$Z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}\ a_{ij}$$

Maka fungsi tujuan akan berbentuk

$$Z = Z_o + \sum_{j=1}^{n} z_j\ x_j$$

Harga-harga Z_j , j= 1,2, ... , n dari perubah-perubah bukan basis disebut koefisien-koefisien evaluasi.

2.3.3. KRITERIA OPTIMUM

Suatu solusi basis adalah solusi optimal dari Program Linier, bila dalam bentuk kanonik semua koefisien evaluasi $Z_j \leq 0$.

Misal ada koefisien evaluasi $Z_r > 0$ dengan $1 \leq r \leq n$ dan (a). Paling tidak satu $a_{ir} > 0$, $1 \le i \le m$, maka ada suatu solusi basis baru dimana harga fungsi tujuan mendapat harga-harga besar sebarang.

Untuk kasus ini, x_r akan dijadikan basis, basis yang sudah ada dibuat bukan basis.

Maka dipilih :

$$x_r = \frac{b_k}{a_{kr}} = \min_{a_{ir}>0} \frac{b_i}{a_{ir}}$$

Untuk semua $a_{ir} > 0$, maka solusi basis menjadi :

$$x_{n+i} = b_i - a_{ir}\, x_r \ge 0 \quad , \quad \text{sebab } x_r > 0$$

dan $\dfrac{b_i}{a_{ir}} \ge \dfrac{b_k}{a_{ir}}$

$$b_i \ge \frac{b_k}{a_{ir}}\, a_{ir}$$

atau $x_{n+i} = b_i - a_{ir} \dfrac{b_k}{a_{kr}} \ge 0$

untuk $i=k$,

$$x_{n+k} = b_k - a_{kr} \frac{b_k}{a_{kr}} = b_k - b_k = 0$$

Sehingga paling tidak satu dari perubah basis memperoleh harga nol. Perubahan inilah yang akan digantikan oleh perubah x_r sebagai basis.

Jadi basis baru menjadi :

$$x_{n+i} = b_i - a_{ir} \frac{b_k}{a_{kr}}, \quad \text{dengan } i \ne k$$

$$x_r = \frac{b_k}{a_{kr}}$$

Nilai fungsi tujuan baru menjadi

$$Z = Z_o + \frac{b_k}{a_{kr}}\, z_r$$

Proses selanjutnya ialah membuat x_r sebagai basis, dengan transformasi basis elementer.

(b). Semua $a_{ir} \leq 0$, $i=1,2,\ldots,m$ maka ada solusi fisibel, dimana fungsi tujuan mendapat harga-harga besar sebarang.

Untuk kasus ini, dengan mengingat bentuk kanonik maka setiap $x_r > 0$ dapat diperoleh solusi fisibel.

Karena $Z_r > 0$, maka $Z = Z_o + x_r z_r$ akan menjadi besar sebarang bila x_r bertambah besar sebarang.

Jadi jelas kriteria pemilihannya adalah melalui satu langkah transformasi basis elementer, bertujuan memperbesar harga Z. Kriteria pemilihan basis baru ialah dengan mencari Z_r yang terbesar, dimana dipilih baris k sedemikian sehingga diperoleh :

$\dfrac{b_k}{a_{kr}} = \min\limits_{a_{ir}>0} \dfrac{b_i}{a_{ir}}$. Kemudian kolom ke r disebut dengan kolom kunci, baris ke k disebut baris kunci dan perpotongan baris ke r dan klom ke k memberikan elemen a_{kr} yang disebut elemen putar.

2.3.3. TABEL OPERASIONAL SIMPLEK

$\bar{c}_i$	c_j / $\bar{x}_i$ \ x_j	c_1 / x_1	c_2 / x_2	...	c_r / x_r	...	c_n / x_n	b_i	Q_i
c_{n+1}	x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1r}	...	a_{1n}	b_1	
c_{n+2}	x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2r}	...	a_{2n}	b_2	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	
c_{n+k}	x_{n+k}	a_{k1}	a_{k2}	...	a_{kr}	...	a_{kn}	b_k	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	
c_{n+m}	x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mr}	...	a_{mn}	b_m	
	z_j								

Tabel (1)

Baris x_j : semua perubah

Baris c_j : koefisien x_j dalam Z

Kolom $\bar{x}_i$: perubah yang menjadi basis

Kolom $\bar{c}_i$: koefisien x_j dalam Z yang sesuai dengan kolom $\bar{x}_i$

Baris $\bar{z}_j$: hasil perkalian dari $z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \; a_{ij}$

Setelah tabel awal diperoleh , harga-harga z_j diperiksa . Bila semua $z_j \leq 0$ maka solusi basis yang bersangkutan telah optimal . Bila ada beberapa z_j dengan $z_j > 0$, maka dipilih z_j yang paling besar , misal z_r.

Kemudian dilakukan pembagian : $Q_i = \dfrac{b_i}{a_{ir}}$

Pilih baris ke k , dimana harga $Q_{i=k}$ adalah minimal. Dan lakukan transformasi basis elementer dari perubah x_r menggantikan perubah x_{n+k} dalam basis , jadi elemen a_{kr} sebagai elemen putar.

2.3.4. TRANSFORMASI BASIS ELEMENTER

Definisi 7

Transformasi dari satu basis yang tertentu ke satu basis baru, yang mana hanya berbeda satu vektor dari yang lama dinamakan transformasi basis elementer.

Untuk lebih jelasnya akan diuraikan kembali permasalahan diatas :

Diberikan vektor $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ \ldots \ , \bar{x}_n$ yang dibentuk oleh basis $\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \ \ldots \ , \bar{x}_{n+m}$, yaitu

$$\bar{x}_1 = a_{11}\ \bar{x}_{n+1} + a_{21}\ \bar{x}_{n+2} + \ldots + a_{m1}\ \bar{x}_{n+m} \qquad (4)$$

$$\bar{x}_2 = a_{12}\ \bar{x}_{n+1} + a_{22}\ \bar{x}_{n+2} + \ldots + a_{m2}\ \bar{x}_{n+m} \qquad (5)$$

....

$$\bar{x}_r = a_{1r}\ \bar{x}_{n+1} + a_{2r}\ \bar{x}_{n+2} + \ldots + a_{mr}\ \bar{x}_{n+m} \qquad (6)$$

....

$$\bar{x}_n = a_{1n}\ \bar{x}_{n+1} + a_{2n}\ \bar{x}_{n+2} + \ldots + a_{mn}\ \bar{x}_{n+m} \qquad (7)$$

Dari vektor-vektor tersebut, vektor basis $\bar{x}_{n+k}$ akan digantikan vektor bukan basis $\bar{x}_r$ dengan transformasi basis elementer.

Pembahasan

Dari persamaan (6) diubah menjadi

$$\bar{x}_{n+k} = -\frac{a_{1r}}{a_{kr}}\ \bar{x}_{n+1} - \frac{a_{2r}}{a_{kr}}\ \bar{x}_{n+2} - \ \ldots \ - \frac{a_{(k-1)r}}{a_{kr}}\ \bar{x}_{n+(k-1)}$$

$$+ \frac{1}{a_{kr}}\ \bar{x}_r - \frac{a_{(k+1)r}}{a_{kr}}\ \bar{x}_{n+(k+1)} - \ \ldots \ - \frac{a_{mr}}{a_{kr}}\ \bar{x}_{n+m}$$

Disubstitusikan $\bar{x}$ ke persamaan (4),(5),dan (7) , maka vektor $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ (n = r) menurut basis baru diperoleh :

$$\bar{x}_1 = a_{11}\,\bar{x}_{n+1} + a_{21}\,\bar{x}_{n+2} + \dots + a_{(k-1)1}\,\bar{x}_{n+(k-1)} + a_{k1}\Big(-\frac{a_{1r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+1} - \frac{a_{2r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+2} - \dots - \frac{a_{(k-1)r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+(k-1)} + \frac{1}{a_{kr}}\,\bar{x}_r - \frac{a_{(k+1)r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+(k+1)} - \dots - \frac{a_{mr}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+m}\Big) + a_{(k+1)1}\,\bar{x}_{n+(k+1)} + \dots + a_{m1}\,\bar{x}_{n+m}$$

$$\bar{x}_2 = a_{12}\,\bar{x}_{n+1} + a_{22}\,\bar{x}_{n+2} + \dots + a_{(k-1)2}\,\bar{x}_{n+(k-1)} + a_{k2}\Big(-\frac{a_{1r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+1} - \frac{a_{2r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+2} - \dots - \frac{a_{(k-1)r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+(k-1)} + \frac{1}{a_{kr}}\,\bar{x}_r - \frac{a_{(k+1)r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+(k+1)} - \dots - \frac{a_{mr}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+m}\Big) + a_{(k+1)2}\,\bar{x}_{n+(k+1)} + \dots + a_{m2}\,\bar{x}_{n+m}$$

....

$$\bar{x}_n = a_{1n}\,\bar{x}_{n+1} + a_{2n}\,\bar{x}_{n+2} + \dots + a_{(k-1)n}\,\bar{x}_{n+(k-1)} + a_{kn}\Big(-\frac{a_{1r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+1} - \frac{a_{2r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+2} - \dots - \frac{a_{(k-1)r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+(k-1)} + \frac{1}{a_{kr}}\,\bar{x}_r - \frac{a_{(k+1)r}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+k+1} - \dots - \frac{a_{mr}}{a_{kr}}\,\bar{x}_{n+m}\Big) + a_{(k+1)n}\,\bar{x}_{n+(k+1)} + \dots + a_{mn}x_{n+m}$$

atau bisa ditulis sebagai

$$\bar{x}_1 = \Big(a_{11} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}}\,a_{1r}\Big)\,\bar{x}_{n+1} + \Big(a_{21} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}}\,a_{2r}\Big)\,\bar{x}_{n+2} + \dots + \Big(a_{(k-1)1} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}}\,a_{(k-1)r}\Big)\,\bar{x}_{n+(k-1)} + \frac{a_{k1}}{a_{kr}}$$

$$\bar{x}_r + \left(a_{(k+1)1} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}} a_{(k+1)r} \right) \bar{x}_{n+(k+1)} + \ldots +$$

$$\left(a_{m1} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}} a_{mr} \right) \bar{x}_{n+m}$$

$$\bar{x}_2 = \left(a_{12} - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} a_{1r} \right) \bar{x}_{n+1} + \left(a_{22} - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} a_{2r} \right) \bar{x}_{n+2} +$$

$$\ldots + \left(a_{(k-1)2} - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} a_{(k-1)r} \right) \bar{x}_{n+(k-1)} + \frac{a_{k2}}{a_{kr}} \bar{x}_r +$$

$$\left(a_{(k+1)2} - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} a_{(k+1)r} \right) \bar{x}_{n+(k+1)} + \ldots +$$

$$\left(a_{m2} - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} a_{mr} \right) \bar{x}_{n+m}$$

....

$$\bar{x}_n = \left(a_{1n} - \frac{a_{kn}}{a_{kr}} a_{1r} \right) \bar{x}_{n+1} + \left(a_{2n} - \frac{a_{kn}}{a_{kr}} a_{2r} \right) \bar{x}_{n+2} +$$

$$\ldots + \left(a_{(k-1)n} - \frac{a_{kn}}{a_{kr}} a_{(k-1)r} \right) \bar{x}_{n+(k-1)} + \frac{a_{kn}}{a_{kr}}$$

$$\bar{x}_r + \left(a_{(k+1)n} - \frac{a_{kn}}{a_{kr}} a_{(k+1)r} \right) \bar{x}_{n+(k+1)} + \ldots + \left(a_{mn} \right.$$

$$\left. - \frac{a_{kn}}{a_{kr}} a_{mr} \right) \bar{x}_{n+m}$$

Jika ditabelkan akan terlihat seperti tabel (2) dibawah ini.

Setelah transformasi basis elementer dengan elemen a_{kr} sebagai elemen putar, tabel (1) akan berubah menjadi tabel dibawah ini :

Tabel (2)

c_j	c_1	c_2		c_{n+k}		c_n		
$\bar{x}_i \backslash x_j$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$		$\bar{x}_{n+k}$		$\bar{x}_n$	b_i	Q_i
$\bar{x}_{n+1}$	$a_{11} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}} a_{1r}$	$a_{12} - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} a_{1r}$	...	$- \frac{a_{1r}}{a_{kr}}$	...	$a_{1n} - \frac{a_{kn}}{a_{kr}} a_{1r}$	$b_1 - \frac{b_k}{a_{kr}} a_{1r}$	
$\bar{x}_{n+2}$	$a_{21} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}} a_{2r}$	$a_{22} - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} a_{2r}$	...	$- \frac{a_{2r}}{a_{kr}}$	...	$a_{2n} - \frac{a_{kn}}{a_{kr}} a_{2r}$	$b_2 - \frac{b_k}{a_{kr}} a_{2r}$	
...	...	...	...	...	...	...	...	
$\bar{x}_r$	$\frac{a_{k1}}{a_{kr}}$	$\frac{a_{k2}}{a_{kr}}$	...	$\frac{1}{a_{kr}}$	...	$\frac{a_{kn}}{a_{kr}}$	$\frac{b_k}{a_{kr}}$	
...	...	...	...	...	...	...	...	
$\bar{x}_{n+m}$	$a_{m1} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}} a_{mr}$	$a_{m2} - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} a_{mr}$	...	$- \frac{a_{mr}}{a_{kr}}$	...	$a_{mn} - \frac{a_{kn}}{a_{kr}} a_{mr}$	$b_m - \frac{b_k}{a_{kr}} a_{mr}$	
z_j								

Secara ringkas dapat ditunjukkan langkah transformasi basis elementer sebagai berikut :

(a). Pengisian baris ke k dan kolom ke r (elemen putar).

$$a_{kr} \text{ baru } = \frac{1}{a_{kr}}$$

(b). Pengisian baris ke k (baris kunci)

$$a_{kj} \text{ baru } = \frac{a_{kj}}{a_{kr}} \qquad \text{untuk } j \neq r$$

(c). Pengisian kolom ke r (kolom kunci)

$$a_{ir} \text{ baru } = - \frac{a_{ir}}{a_{kr}} \qquad \text{untuk } i \neq k$$

(d). Pengisian elemen-elemen yang lain (yang bukan dalam a,b atau c)

$$a_{ij} \text{ baru } = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{kr}} a_{ir} \qquad \text{untuk } \begin{array}{l} i \neq k \\ j \neq r \end{array}$$

<u>Contoh</u> 7

Memaksimalkan :

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5$$

Dengan syarat :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \geq 100$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 80$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \geq 50$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0$$

<u>Pembahasan :</u>

Kendala pertidaksamaan dibawa ke bentuk kanonik dengan memasukkan perubah kelonggaran x_6, x_7 dan x_8.

Sehingga masalah menjadi :

Mencari x, x, x, x, x, x, x dan x yang memenuhi :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + x_5 + x_6 \qquad\qquad = 100$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad + x_7 = 80$$

$$x_1 + \qquad + x_3 + x_4 \qquad\qquad + x_8 = 50$$

dan fungsi tujuan akan menjadi,

Memaksimalkan :

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

Jadi siap simplek, dengan x_6, x_7 dan x_8 sebagai perubah basis.

<u>Langkah-langkah simplek.</u>

(1). Sebagai langkah pertama disusun tabel awal simplek sesuai tabel (1) , dengan nilai-nilai x_j, b_i, c_j dan a_{ij} diberikan oleh

$$X = [x_j] = [\, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \,]$$

$$B = (\, b_j \,) = (\ 100\ ,\ 80\ ,\ 50\ )$$

$$C = (\, c_j \,) = (\ 2\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ )$$

$$A = (\, a_{ij} \,) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tereduksi lengkap

Disajikan pada tabel dibawah (tabel (3))

$\bar{c}_i$	c_j / $x_i \backslash x_j$	2. x_1	1 x_2	3 x_3	1 x_4	2 x_5	b_i	Q_i
0	x_6	1	2	1	0	1	100	
0	x_7	0	1	1	1	1	80	
0	x_8	1	0	1	1	0	50	
	z_j							

Tabel (3)

Nilai-nilai pada baris z_j ditentukan oleh

$$z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \; a_{ij} \qquad \text{untuk} \quad j=1,2,\ldots,5$$

sehingga didapat :

$$z_1 = c_1 - \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \; a_{i1}$$

$$z_1 = 2 - \{ (1)(0)+(0)(0)+(1)(0)\} = 2$$

$$z_2 = c_2 - \sum_{i=1}^{m} c_i \; a_{i2}$$

$$z_2 = 1 - \{ (2)(0)+(1)(0)+(0)(0)\} = 1$$

$$z_3 = 3 - 0 = 3$$

$$z_4 = 1 - 0 = 1$$

$$z_5 = 2 - 0 = 2$$

Ternyata semua nilai $z_j > 0$, jadi tabel simplek belum optimal dan harus diperbaiki dengan cara mengganti satu perubah basisnya dengan tranformasi basis elementer.

Nilai z maksimum pada j = 3, maka kolom ke 3 disebut dengan kolom kunci.

Pengisian kolom Q

$$Q_i = \frac{b_i}{a_{i3}} \qquad \text{maka} \quad : \quad Q_1 = \frac{b_1}{a_{13}} = \frac{100}{1} = 100$$

$$(a_{i3} > 0) \qquad\qquad Q_2 = \frac{b_2}{a_{23}} = \frac{80}{1} = 80$$

$$Q_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{50}{1} = 50$$

Diperoleh Q_i minimum untuk i = 3 , maka baris ke 3 disebut dengan baris kunci.

Perpotongan antara baris kunci dengan kolom kunci diperoleh elemen $a_{33} = 1$, disebut dengan elemen

$$a_{ij} \text{ baru} = a_{ij} - \frac{a_{i3}}{a_{33}} a_{i3} \quad \text{untuk} \quad \begin{matrix} i \neq 3 \\ j \neq 3 \end{matrix}$$

Berdasarkan ketentuan diatas, maka elemen-elemen dari tabel baru adalah :

$$a_{11} \text{ baru} = a_{11} - \frac{a_{13}}{a_{33}} a_{13} = 1 - \frac{1}{1} \ (1) = 0$$

$$a_{12} \text{ baru} = a_{12} - \frac{a_{23}}{a_{33}} a_{13} = 2 - \frac{0}{1} \ (1) = 2$$

$$a_{13} \text{ baru} = - \frac{a_{13}}{a_{33}} a_{13} = - 1$$

$$a_{14} \text{ baru} = a_{14} - \frac{a_{34}}{a_{33}} a_{13} = 0 - \frac{1}{1} \ (1) = - 1$$

$$a_{15} \text{ baru} = a_{15} - \frac{a_{35}}{a_{33}} a_{13} = 1 - \frac{0}{1} \ (1) = 1$$

$$b_{1} \text{ baru} = b_{1} - \frac{b_{3}}{a_{33}} a_{13} = 100 - \frac{50}{1} \ (1) = 50$$

$$a_{21} \text{ baru} = a_{21} - \frac{a_{31}}{a_{33}} a_{23} = 0 - \frac{1}{1} \ (1) = - 1$$

$$a_{22} \text{ baru} = a_{22} - \frac{a_{32}}{a_{33}} a_{23} = 1 - \frac{0}{1} \ (1) = 1$$

$$a_{23} \text{ baru} = - \frac{a_{23}}{a_{33}} a_{23} = - \frac{1}{1} = - 1$$

$$a_{24} \text{ baru} = a_{24} - \frac{a_{34}}{a_{33}} a_{23} = 1 - \frac{1}{1} \ (1) = 0$$

$$a_{25} \text{ baru} = a_{25} - \frac{a_{35}}{a_{33}} a_{23} = 1 - \frac{0}{1} \ (1) = 1$$

$$b_{2} \text{ baru} = b_{2} - \frac{b_{3}}{a_{33}} a_{23} = 80 - \frac{50}{1} \ (1) = 30$$

$$a_{31} \text{ baru} = \frac{a_{31}}{a_{33}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_{32} \text{ baru} = \frac{a_{32}}{a_{33}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$a_{33} \text{ baru} = \frac{1}{a_{33}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_{34} \text{ baru} = \frac{a_{34}}{a_{33}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_{35} \text{ baru} = \frac{a_{35}}{a_{33}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b_3 \text{ baru} = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{50}{1} = 50$$

Sehingga tabel baru simplek adalah sbb :

	c_j	2	1	0	1	2	b_i	Q_i
$\bar{c}_i$	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_6	0	2	-1	-1	1	50	
0	x_7	-1	1	-1	0	1	30	
3	x_3	1	0	1	1	0	50	
	z_j							

Tabel (5)

Untuk pengujian keoptimalan, dicari nilai-nilai z_j

berdasarkan ketentuan : $z_j = c_j - \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \bar{c}_i$

untuk $j=1,2,\ldots,5$

yaitu

$Z_1 = 2 - \{ (0)(0) + (-1)(0) + (1)(3) \} = -1$

$Z_2 = 1 - \{ (2)(0) + (1)(0) + (0)(3) \} = 1$

$Z_3 = 0 - \{ (-1)(0) + (-1)(0) + (1)(3) \} = -3$

$Z_4 = -1 - \{ (-1)(0) + (0)(0) + (1)(3) \} = -2$

$Z_5 = 2 - \{ (1)(0) + (1)(0) + (0)(3) \} = 2$

Karena ada $Z_j > 0$, maka tabel belum optimal.

Maka tabel simplek perlu diperbaharui.

Z_j maksimum pada $Z_5 = 2$ (kolom 5 sebagai kolom kunci) lalu diisi kolom Q_i berdasarkan,

$$Q_i = \frac{b_i}{a_{i5}} \quad \text{maka} : \quad Q_1 = \frac{b_1}{a_{15}} = \frac{50}{1} = 50$$

$$(a_{i5} > 0) \qquad Q_2 = \frac{b_2}{a_{25}} = \frac{30}{1} = 30$$

Q_i minimal pada $Q_2 = 30$ (baris ke 2 sebagai baris kunci).

Perpotongan kolom kunci dan baris kunci diperoleh elemen $a_{25} = 1$ sebagai elemen putar untuk transformasi basis elementer berikutnya. Jadi perubah x_5 akan menggantikan perubah x_7 sebagai basis.

Tabel (5) akan menjadi sebagai berikut :

$\bar{c}_i$	c_j / $x_i \backslash x_j$	2 / x_1	1 / x_2	0 / x_3	1 / x_4	2 / x_5	b_i	Q_i
0	x_6	0	2	-1	-1	1	50	50
0	x_7	-1	1	-1	0	1	30	30
3	x_3	1	0	1	1	0	50	-
	z_j	-1	1	-3	-2	2		

Tabel (6)

(3). Penyusunan tabel (7)

Karena tabel (6) belum optimal , maka perlu disusun tabel baru simplek dengan ketentuan sbb :

(a). Pengisian baris ke 2 dan kolom ke 5 (elemen putar)

$$a_{25} \text{ baru} = \frac{1}{a_{25}}$$

(b). Pengisian baris ke 2 (baris kunci)

$$a_{2j} \text{ baru} = \frac{a_{2j}}{a_{25}} \qquad \text{untuk } j \neq 5$$

(c). Pengisian kolom ke 5 (kolom kunci)

$$a_{i5} \text{ baru} = -\frac{a_{i5}}{a_{25}} \qquad \text{untuk } i \neq 2$$

(d). Pengisian elemen-elemen yang lain (yang bukan dalam a,b atau c)

$$a_{ij} \text{ baru} = a_{ij} - \frac{a_{i5}}{a_{25}} a_{i5} \qquad \text{untuk } \begin{matrix} i \neq 2 \\ j \neq 5 \end{matrix}$$

Dengan memasukkan setiap nilai a_{ij} dan b_i pada tabel (6) akan didapatkan nilai-nilai a_{ij} dan b_i baru sebagai berikut :

$$a_{11} \text{ baru} = a_{11} - \frac{a_{21}}{a_{25}} a_{15} = 0 - \frac{(-1)}{1}(1) = 1$$

$$a_{12} \text{ baru} = a_{12} - \frac{a_{22}}{a_{25}} a_{15} = 2 - \frac{1}{1}(1) = 1$$

....

dst (seperti proses pengisian elemen-elemen di tabel (5))

Baris Z_j diisi berdasarkan $z_j = c_j - \sum_{i=1}^{3} \bar{c}_i \; a_{ij}$ baru untuk j=1,2,...,5, sehingga diperoleh tabel berikut:

$\bar{c}_i$	c_j / $x_i \backslash x_j$	2 x_1	1 x_2	0 x_8	1 x_4	0 x_7	b_i	Q_i
0	x_6	1	1	0	-1	1	20	
2	x_5	-1	1	-1	0	1	30	
3	x_3	1	0	1	1	0	50	
	z_j	1	-1	-1	-2	-2	210	

Tabel (7)

Ternyata masih ada $Z_1 = 1 > 0$, maka tabel perlu diperbaharui.

Kolom 1 sebagai kolom kunci.

Penentuan baris kunci,dengan mengisi kolom Q_i berdasarkan :

$$Q_i = \frac{b_i}{a_{i1}} \quad \text{maka} \quad : \quad Q_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{20}{1} = 20$$

$$(a_{i1} > 0) \qquad Q_3 = \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{50}{1} = 50$$

Q_1= 20 adalah minimal, sehingga baris 1 sebagai baris kunci.

Proses transformasi basis elementer dilakukan untuk menggantikan perubah x_6 dengan x_1 sebagai basis, dengan elemen putar a_{11}=1.

Tabel (7) akan menjadi,

$\bar{c}_i$	c_j / $x_i \backslash x_j$	2 x_1	1 x_2	0 x_8	1 x_4	0 x_7	b_i	Q_i
0	x_6	1	1	0	-1	1	20	20
2	x_5	-1	1	-1	0	1	30	-
3	x_3	1	0	1	1	0	50	50
	z_j	1	-1	-1	-2	-2	210	

Tabel (8)

(4) Penyusunan tabel (9).

Karena tabel (8) belum juga optimal , maka perlu disusun tabel baru simplek , dengan ketentuan sbb :

(a). Pengisian baris ke 1 dan kolom ke 1 (elemen putar)

$$a_{11} \text{ baru} = \frac{1}{a_{11}}$$

(b). Pengisian baris ke 1 (baris kunci)

$$a_{1j} \text{ baru} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad \text{untuk } j \neq 1$$

(c). Pengisian kolom ke 1 (kolom kunci)

$$a_{i1} \text{ baru} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}} \qquad \text{untuk } i \neq 1$$

(d). Pengisian elemen-elemen yang lain (yang bukan dalam a,b atau c)

$$a_{ij} \text{ baru} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{i1} \qquad \text{untuk } \begin{array}{l} i \neq 1 \\ j \neq 1 \end{array}$$

Dan baris Z_j diisi dengan rumus

$$z_j = c_j - \sum_{i=1}^{3} \bar{c}_i \; a_{ij} \text{ baru}$$

untuk j=1,2,...,5, sehingga diperoleh tabel berikut:

$\bar{c}_i$	c_j / $\bar{x}_i \backslash x_j$	0 x_6	1 x_2	0 x_8	1 x_4	0 x_7	b_i	Q_i
2	x_1	1	1	0	-1	-1	20	
2	x_5	1	2	-1	-1	0	50	
3	x_3	-1	-1	1	2	1	30	
	z_j	-1	-2	-1	-1	-1		

Tabel (9)

Karena semua $Z_j < 0$, maka solusi optimal telah dicapai.

Dari tabel (9) , diperoleh perubah-perubah basisnya (kolom $\bar{x}_i$) adalah x_1 ,x_3 dan x_5 dengan harga yang dinyatakan pada kolom b_i.

Dan nilai dari perubah lain (yang bukan basis) nol.

Sehingga, nilai optimal diperoleh ,

untuk $x_1 = 20$ $\qquad x_5 = 50$

$x_2 = 0$ $\qquad$ $x_6 = 0$

$x_3 = 30$ $\qquad$ $x_7 = 0$

$x_4 = 0$ $\qquad$ $x_8 = 0$

dengan nilai fungsi tujuan

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

$$= 2(20) + 0 + 3(30) + 0 + 2(50) + 0 + 0 + 0$$

$$= 40 + 90 + 100$$

$$= 230$$