BAB II

MATERI DASAR

2.1. HIMPUNAN.

Definisi 1

Himpunan titik-titik atau vektor-vektor adalah himpunan yang unsur-unsurnya (komponen-komponennya)titik atau vektor.

Definisi 2

Dua himpunan A dan B adalah sama yang ditulis $A = B$, jika mereka memuat unsur-unsur yang sama.Jadi jika setiap unsur dari A juga merupakan unsur dari B dan sebaliknya.

Definisi 3

Suatu himpunan bagian B dari suatu himpunan A adalah suatu himpunan yang semua unsur-unsurnya didalam A ,dan ditulis $B \subset A$ atau $A \supset B$.

Definisi 4

a. Irisan (intersection) dari himpunan A dan B ditulis $A \cap B$, adalah himpunan C yang memuat semua unsur-unsur persekutuan dari A dan B .

b. Jika ada m himpunan A_1 , A_2, ..., A_m maka $A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_m$ adalah himpunan C yang merupakan persekutuan dari A_1, A_2, ...,A_m.

Dan ditulis : $C = \bigcap_{i=1}^{m} A_i$

Definisi 5

Jika himpunan $A \in X$, maka $A \notin X^C$ (komplemen X)

Definisi 6

a. Gabungan (Union) dari dua himpunan A dan B , ditulis $A \cup B$ adalah C yang memuat semua unsur-unsur dari A dan B .

b. Jika ada m himpunan A_1, A_2, ..., A_m maka $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ adalah himpunan C yang memuat unsur unsur dari mereka.dan ditulis $C = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$

2.2. HIMPUNAN DALAM RUANG METRIK.

Definisi 7

Nilai mutlak dari suatu bilangan real x, yang diberi notasi | x | , dimaksudkan :

$$| x | = \sqrt{x^2} \quad , x \in R .$$

Definisi 8

Untuk suatu bilangan bulat positif n , himpunan $X \in R^n$ adalah himpunan semua kelompok n buah bilangan real yang ditulis :

$$X = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

dengan x_1, x_2, ..., x_n merupakan bilangan-bilangan real dan R^n suatu ruang yang berdimensi n.

Definisi 9

Nilai mutlak | X | untuk titik X = (x_1, x_2, ... x_n) yaitu :

$$| X | = \sqrt{X^2} = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots.+ x_n^{\,2}}$$

Definisi 10

Bila X = (x_1, x_2, ..., x_n) dan Y = (y_1, y_2, ..., y_n) dengan X, Y $\in R^n$ dan x_i, $y_i \in R$

$i = 1, 2, \ldots, n$ maka jarak titik X ke Y dalam R^n adalah :

$$| X - Y | = \sqrt{(X - Y)(X - Y)}$$
$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+ \ldots +(x_n-y_n)^2}$$

Dan $| X - Y |$ dapat ditulis $d(X,Y)$.

Definisi 11

Diberikan himpunan A didalam ruang dimensi n ($A \in R^n$) yang tidak kosong, yang elemen-elemennya disebut titik. Didefinisikan fungsi bernilai real non-negatif d pada A (d fungsi dua variable dengan variable pada A) sebagai berikut :

Untuk sembarang titik $X, Y, Z \in A$ dimana :

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

harus dipenuhi :

a. $d(X,Y) \geq 0$; $d(X,Y) = 0$, jika dan hanya jika $X=Y$

b. $d(X,Y) = d(Y,X)$

c. $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$

Fungsi d yang memenuhi ketiga sifat diatas dinamakan fungsi jarak atau metrik pada A.

Nilai $d(X,Y)$ disebut jarak dari X ke Y. Himpunan A yang dilengkapi dengan fungsi jarak disebut Ruang Metrik.

Definisi 12

Jika X sembarang titik didalam Ruang Metrik A yang berdimensi n dan $r > 0$, maka himpunan :

$$N_r(X) = \{ Y \in A \mid d(X,Y) < r \}$$

dinamakan daerah sekitar dari titik X dengan radius r.

Titik X dinamakan pusat sekitar $N_r(X)$.

Definisi 13

Titik $X \in A$ dimana $A \in R^n$disebut titik limit dari himpunan B subset A, jika setiap sekitar dari titik X memuat paling sedikit satu titik $Y \in B$ yang berlainan dengan X.

Definisi 14

Suatu titik X disebut titik interior dari himpunan $A \in R^n$, jika ada suatu sekitar X (sejauh r, dimana $r > 0$) yang memuat titik-titik dari himpunan A saja.

Definisi 15

Titik X dinamakan titik batas dari himpunan A anggota R, jika setiap sekitar X sejauh r dengan $r>0$ memuat titik-titik yang ada dalam himpunan dan titik-titik yang tidak ada didalam himpunan A .

Definisi 16

Suatu himpunan $A \in R^n$ adalah himpunan tertutup, jika itu memuat semua titik-titik dari himpunan A termasuk batasnya.

Definisi 17

Suatu himpunan $A \in R^n$ merupakan himpunan terbuka, jika itu memuat titik interiornya saja.

Teorema 1

Setiap sekitar adalah merupakan himpunan terbuka.

Bukti :

Misal :

$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ merupakan sembarang titik anggota $N_r(A)$ dengan $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, maka terdapatlah h sedemikian sehingga : $d(Y,A) = r - h$

Untuk setiap $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dengan $d(Y,Z)<h$

Dengan definisi 11 dapat ditulis :

$$d(Z,A) \leq d(Z,Y) + d(Y,A)$$

$$d(Z,A) < h + (r-h)$$

$$d(Z,A) < r$$

Apabila Z mempunyai sifat $d(Z,Y) < h$, maka $d(Z,A)<r$.

Jadi $N_h(Y) < N_r(A)$, untuk setiap $Y \in N_r(A)$, terdapatlah $h > 0$ sehingga $N_h(Y) < N_r(A)$.

Jadi Y merupakan titik interior dari $N_r(A)$. Dengan adanya itu, maka menurut definisi 17, terbukti bahwa setiap sekitar merupakan himpunan terbuka.

Teorema 2

Jika $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ titik limit dari himpunan $E \in R^n$, maka setiap sekitar dari X memuat tak berhingga banyak elemen-elemen anggota E.

Bukti :

Misalkan $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan ada sekitar dari X yang memuat anggota E yang berhingga banyak yaitu : $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dimana :

$$X_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$$

$$X_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$X_n = (x_{n1}, x_{2n}, \ldots, x_{nn})$$

Dan ditentukan :

$$d(X_1,X),\ d(X_2,X),\ \ldots,\ d(X_n,X).$$

banyak, maka dapat ditentukan yang terkecil diantaranya. Misal yang terkecil yaitu $d(X_k,X)$, jika sekarang dibuat sekitar dari X dengan jari-jari < $d(X_k,X)$, maka tidak ada lagi anggota E dalam sekitar. Ini berarti X sendirian (tidak ada anggota yang lainnya) sehingga menurut definisi 13, X bukan titik limit dari himpunan E. Dengan adanya itu maka terbukti bahwa setiap sekitar dari X memuat tak berhingga banyak anggota E.

Teorema 3

Diberikan sembarang himpunan $A \in R^n$, untuk keluarga himpunan-himpunan terbuka $\{ G_a \ ; \ a \in A \}$, maka : $\bigcup_{a \in A} G_a$ juga terbuka.

Bukti :

Kita ambil $\bigcup_{a \in A} G_a = S$, kita harus membuktikan bahwa sembarang $X \in S$ dengan $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah titik interior S. Karena $X \in S$, maka terdapatlah $a \in A$ sehingga $X \in G_a$.

Karena G_a himpunan terbuka, maka terdapatlah suatu sekitar dari X, misalkan $N_r(X)$ yang merupakan subset dari G_a dan yang tentu saja menjadi subset S.

Jadi sembarang titik $X \in S$ mempunyai sekitar yang menjadi subset S, X adalah titik interior S . Dan dengan adanya itu maka S adalah himpunan terbuka.

2.3. VEKTOR.

Definisi 18

Vektor adalah suatu besaran yang mempunyai besar dan ditentukan oleh arahnya.

Sebuah vektor X didalam ruang dimensi n (R^n) adalah elemen yang ditulis $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definisi 19

Dua buah vektor X dan Y didalam R^n (ruang dimensi n) dikatakan sama jika dan hanya jika unsur-unsur yang seletak adalah sama, yaitu :

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ dan } Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

maka vektor X dikatakan sama dengan vektor Y yaitu $X = Y$, jika dan hanya jika $X_i = Y_i$ dengan $i = 1,2,..,n$

Definisi 20

Jumlah dua vektor X dan Y didalam R^n didefinisikan sebagai :

$$X + Y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Jadi jumlah dua vektor didalam R^n diperoleh dengan menjumlahkan komponen-komponennya yang seletak.

Dan $X_i, Y_i \in R$ (himpunan bilangan real), $i = 1,2,..,n$

Definisi 21

Untuk setiap $X \in R^n$ dengan $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $\lambda \in R$ (himpunan bilangan real) maka yang dimaksud dengan λX adalah perkalian X dengan skalar λ yang didefinisikan sebagai :

$$\lambda X = \lambda (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

2.3.1. RUANG VEKTOR.

2.3.1.1. FIELD.

K adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya (elemen-elemennya) merupakan operasi penjumlahan dan operasi perkalian.

K merupakan field apabila memenuhi aksioma-aksioma dibawah ini :

a.1. Untuk setiap $\lambda,\beta \in K$, maka $\lambda+\beta \in K$ dan $\lambda\beta \in K$ Dikatakan bahwa K tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

a.2. Untuk setiap $\lambda,\beta,\gamma \in K$, maka $(\lambda+\beta)+\gamma = \lambda+(\beta+\gamma)$

a.3. Terdapat $0 \in K$, disebut elemen 0 (nol), sedemikian sehingga $0+\lambda = \lambda+0 = \lambda$, untuk setiap $\lambda \in K$.

a.4. Untuk setiap $\lambda \in K$, terdapat $-\lambda \in K$ disebut negatip dari λ, sedemikian sehingga $(-\lambda)+\lambda = \lambda+(-\lambda) = 0$

a.5. Untuk setiap $\lambda,\beta \in K$, maka $\lambda+\beta = \beta+\lambda$

a.6. Untuk setiap $\lambda,\beta,\gamma \in K$, maka $(\lambda\beta)\gamma = \lambda(\beta\gamma)$

a.7. Untuk setiap $\lambda,\beta,\gamma \in K$, maka :

i. $\lambda(\beta+\gamma) = \lambda\beta + \lambda\gamma$

ii. $(\beta+\gamma)\lambda = \beta\lambda + \gamma\lambda$

a.8. Untuk setiap $\lambda,\beta \in K$, maka $\lambda\beta = \beta\lambda$

a.9. Terdapatlah $1 \in K$ yang disebut elemen satuan dari K, sedemikian sehingga $1\lambda = \lambda 1 = \lambda$, untuk setiap $\lambda \in K$.

a.10. Untuk masing-masing $\lambda \neq 0$ dengan $\lambda \in K$, terdapat λ^{-1} yang disebut invers (kebalikan dari λ), sedemikian sehingga $\lambda\lambda^{-1} = \lambda^{-1}\lambda = 1$

2.3.1.2. RUANG VEKTOR.

Suatu himpunan $V \in R^n$ dan suatu field K, kita definisikan operasi penjumlahan terhadap elemen - elemen V dan perkalian elemen-elemen V dengan elemen K (disebut perkalian skalar). Maka V

aksioma dibawah ini :

b.1. Untuk setiap $\underline{X}$, $\underline{Y} \in V$ dan $\lambda \in K$ maka $\underline{X}+\underline{Y} \in V$ dan $\lambda\underline{X} \in V$ (tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar), dimana :

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

b.2. Untuk setiap $\underline{X}$, $\underline{Y}$, $\underline{Z} \in V$, maka $(\underline{X}+\underline{Y})+\underline{Z} = \underline{X}+(\underline{Y}+\underline{Z})$ dengan : $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\underline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$\underline{Z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$

b.3. Untuk setiap $\underline{X}$, $\underline{Y} \in V$ dan $\lambda \in K$ maka :

$\lambda(\underline{X}+\underline{Y}) = \lambda\underline{X} + \lambda\underline{Y}$ dimana :

$\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $\underline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

b.4. Terdapat $\underline{0} \in V$ disebut vektor nol, sedemikian sehingga untuk setiap $\underline{X} \in V$ berlaku :

$\underline{0} + \underline{X} = \underline{X} + \underline{0} = \underline{X}$, dimana :

$\underline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ dan $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

b.5. Untuk setiap $\underline{X} \in V$, terdapat $-\underline{X} \in V$, sedemikian sehingga $(-\underline{X}+\underline{X}) = (\underline{X}+(-\underline{X})) = \underline{0}$

dimana : $-\underline{X} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

$\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\underline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

b.6. Untuk setiap $\underline{X}, \underline{Y} \in V$, maka : $\underline{X}+\underline{Y} = \underline{Y}+\underline{X}$

dimana : $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\underline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

b.7. Untuk setiap $\underline{X} \in V$ dan λ, $\beta \in K$ berlaku :

i. $(\lambda+\beta)\,\underline{X} = \lambda\underline{X} + \beta\underline{X}$

ii. $(\lambda\beta)\underline{X} = \lambda(\beta\underline{X})$ dimana : $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

b.8. Untuk setiap $\underline{X} \in V$ berlaku $1\underline{X} = \underline{X}$, dimana : 1 merupakan elemen satuan dari K dan

$\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Teorema 4

Diketahui $X=(x_1,x_2, \ldots, x_n)$ dan $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ dengan $X, Y \in V$ dan $V \in R^n$, $X_i, Y_i \in R$ (himpunan bilangan real) $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Didalam R^n berlaku operasi penjumlahan dua buah vektor dan perkalian vektor dengan skalar yang didefinisikan sebagai berikut :

$$X + Y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n).$$
$$\lambda X = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

R^n dengan kedua operasi yang didefinisikan diatas adalah merupakan ruang vektor.

Bukti :

Dengan adanya operasi-operasi diatas akan dibuktikan bahwa itu memenuhi aksioma-aksioma dari ruang vektor yaitu :

b.1. Misalkan $Z = X + Y$, dengan $X, Y \in V$ dan $Z_i = X_i + Y_i$, $i = 1,2, \ldots, n$. Menurut definisi 20, diperoleh :

$$X + Y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$
$$= (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$
$$X + Y = Z$$

Jadi $Z \in V$

b.2. Diambil $X,Y,Z \in V$,maka :

$$(X+Y)+Z = ((x_1, x_2,\ldots, x_n) + (y_1,y_2, \ldots,y_n)) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$
$$=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)+(z_1,z_2,\ldots,z_n)$$
$$=(x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2, \ldots, x_n+y_n+z_n)$$
$$=(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1+z_1,y_2+z_2,\ldots,y_n+z_n)$$

$$+ (z_1, z_2, \ldots, z_n))$$

$$(\underline{X}+\underline{Y})+\underline{Z} = \underline{X}+(\underline{Y}+\underline{Z})$$

b.3. Jika $\underline{X}, \underline{Y} \in V$ dan $\lambda \in R$, maka :

$$\lambda(\underline{X}+\underline{Y}) = \lambda(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$
$$= (\lambda x_1+\lambda y_1, \lambda x_2+\lambda y_2, \ldots, \lambda x_n+\lambda y_n)$$
$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)+(\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n)$$
$$\lambda(\underline{X}+\underline{Y}) = \lambda\underline{X} + \lambda\underline{Y}$$

b.4. Diambil $\underline{X}, \underline{0} \in V$, sedemikian sehingga :

$$\underline{0} + \underline{X} = (0, 0, \ldots, 0)+(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= (0+x_1, 0+x_2, \ldots, 0+x_n)$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\underline{0} + \underline{X} = \underline{X}$$

b.5. Untuk setiap $\underline{X} \in V$, dengan $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ terdapatlah $-\underline{X} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$, maka :

$$\underline{X} + (-\underline{X}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)+(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$
$$= (x_1-x_1, x_2-x_2, \ldots, x_n-x_n)$$
$$= (0, 0, \ldots, 0)$$
$$\underline{X} + (-\underline{X}) = \underline{0}$$

b.6. Bila $\underline{X}, \underline{Y} \in V$,maka :

$$\underline{X} + \underline{Y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$
$$= (y_1+x_1, y_2+x_2, \ldots, y_n+x_n)$$
$$\underline{X} + \underline{Y} = \underline{Y} + \underline{X}$$

b.7. Diambil $\underline{X} \in V$ dan $\lambda, \beta \in R$, maka :

i. $$(\lambda+\beta)\underline{X} = (\lambda+\beta)(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= ((\lambda+\beta)x_1, (\lambda+\beta)x_2, \ldots, (\lambda+\beta)x_n)$$
$$= (\lambda x_1+\beta x_1, \lambda x_2+\beta x_2, \ldots, \lambda x_n+\beta x_n)$$
$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)+(\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n)$$
$$(\lambda+\beta)\underline{X} = \lambda\underline{X} + \beta\underline{X}$$

ii. $$(\lambda\beta)\underline{X} = \lambda\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= \lambda (\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n)$$

b.8. Bila $\underset{\sim}{X} \in V$, maka terdapatlah $1 \in R$ sehingga

$$1\underset{\sim}{X} = 1\,(x_1,\ x_2,\ \ldots.,\ x_n)$$
$$= (1x_1,\ 1x_2,\ \ldots..,\ 1x_n)$$
$$= (x_1,\ x_2,\ \ldots.,\ x_n)$$
$$1\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}$$

Dengan adanya bukti dari ke delapan aksioma tersebut diatas , maka terbukti bahwa R^n dengan kedua operasi diatas merupakan ruang vektor.

Teorema 5

Jika V merupakan ruang vektor didalam R^n dan R adalah himpunan bilangan real. maka :

a. $\lambda\ \underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}$, untuk $\lambda \in R$, $\underset{\sim}{0} \in V$ dimana $\underset{\sim}{0} = (0,\ 0,\ ..,\ 0)$

b. $0\ \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0}$, untuk $0 \in R$, $\underset{\sim}{X} \in V$ dimana $\underset{\sim}{X} = (x_1, x_2,\ .., x_n)$

c. Jika $\lambda\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0}$, maka $\lambda = 0$ atau $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0}$ dimana :

$\underset{\sim}{X} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n)$ dan $\underset{\sim}{0} = (\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$

d. $(-1)\underset{\sim}{X} = -\ \underset{\sim}{X}$ dengan $\underset{\sim}{X} \in V$ dan $\underset{\sim}{X} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$

Bukti :

a.Diambil $\underset{\sim}{X} \in V$, maka menurut aksioma b.5. terdapat $-\underset{\sim}{X} \in V$, sedemikian sehingga berlaku $-\underset{\sim}{X} + (-\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{0}$, maka :

$$\lambda\underset{\sim}{X} + \lambda(-\underset{\sim}{X}) = \lambda\underset{\sim}{0}$$
$$\lambda\underset{\sim}{0} = \lambda\underset{\sim}{X} + \lambda(-\underset{\sim}{X})$$
$$= \lambda\underset{\sim}{X} + (-\lambda\underset{\sim}{X})$$
$$\lambda\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}$$

b.Kita ambil $\underset{\sim}{0} = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ dengan $\underset{\sim}{0} \in V$, maka

$$\underset{\sim}{0} + \underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0} \iff (\ \underset{\sim}{0}+\underset{\sim}{0}\ )\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0X}$$
$$\iff (\ \underset{\sim}{0X}+\underset{\sim}{0X}\ ) = \underset{\sim}{0X}$$
$$\iff (\ \underset{\sim}{0X}+\underset{\sim}{0X}\ ) + (-\underset{\sim}{0X}) = \underset{\sim}{0X} + (-\underset{\sim}{0X})$$
$$\iff \underset{\sim}{0X} + (\underset{\sim}{0X} + (-\underset{\sim}{0X})) = \underset{\sim}{0}$$
$$\iff \underset{\sim}{0X} = \underset{\sim}{0}$$

Jika $\lambda \neq 0$, maka karena $\lambda \in R$ ada $\lambda^{-1} \neq 0$ sehingga menurut aksioma a.10. berlaku $\lambda\lambda^{-1} = 1$.

$\lambda \underline{X} = \underline{0} \iff \lambda^{-1}\lambda\ \underline{X} = \lambda^{-1}\underline{0}$

$\iff 1\ \underline{X} = \underline{0}$

$\iff \underline{X} = \underline{0}$

Jika $\lambda = 0$, maka $\lambda\ \underline{X} = 0\underline{X} = \underline{0}$ berlaku untuk setiap $\underline{X} \in V$.

d. Kita tinjau : $(1 + (-1))\underline{X} = 1\underline{X} + (-1)\ \underline{X}$ dengan $\underline{X} \in V$, $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, maka :

$\underline{X} + (-1)\underline{X} = (1-1)\ \underline{X} = 0\ \underline{X} = \underline{0}$

$\iff -\underline{X} + (\ \underline{X} + (-1)\underline{X}\ ) = -\underline{X} + \underline{0}$

$\iff ((-\underline{X}) + \underline{X}\ ) + (-1)\underline{X} = -\underline{X}$

$\iff \underline{0} + (-1)\underline{X} = -\underline{X}$

$\iff -1\underline{X} = -\underline{X}$

Terbukti.

2.3.1.3. RUANG VEKTOR BAGIAN.

Definisi 22.

Jika V adalah ruang vektor dalam R^n dan S merupakan himpunan bagian dari V, maka S disebut ruang vektor bagian dari V , jika :

a. $V \neq \emptyset$ (V tidak hampa)

b. Untuk setiap $\underline{X}, \underline{Y} \in S$, maka $\underline{X} + \underline{Y} \in S$ dengan $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $\underline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

c. Untuk setiap $\underline{X} \in S$ dan $\lambda \in R$ maka $\lambda\ \underline{X} \in S$ dimana $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Contoh 1.

Diketahui himpunan $S = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \}$ didalam R^n dimana berlaku $x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0$. selidiki apakah merupakan suatu ruang bagian di R^n.

Diambil dua titik sembarang $\underline{X},\underline{Y} \in S$ dimana $\underline{X} = (x_1,x_2,\ldots, x_n)$ dan $\underline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Karena $x_2+x_3+\ldots+x_n = 0$, maka $x_n = -x_2-x_3-\ldots-x_{n-1}$, sehingga berlaku :

$$\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots,x_{n-1},-x_2-x_3-\ldots-x_{n-1}) \text{ dan}$$

$$\underline{Y} = (y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},-y_2-y_3-\ldots-y_{n-1}).$$

Jika S merupakan ruang bagian, maka harus dibuktikan :

1. $\underline{X} + \underline{Y} \in S$
2. $\lambda\underline{X} \in S$, untuk setiap $\lambda \in R$ dengan R merupakan himpunan bilangan real.

Yaitu :

1. Diketahui : $\underline{X} = (x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},-x_2-x_3-\ldots-x_{n-1})$

$\underline{Y} = (y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},-y_2-y_3-\ldots-y_{n-1})$

$$\begin{aligned}\underline{X}+\underline{Y} &= (x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},-x_2-x_3-\ldots-x_{n-1}) + (y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},-y_2-y_3-\ldots-y_{n-1})\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_{n-1}+y_{n-1},-x_2-x_3-\ldots-x_{n-1}-y_2-y_3-\ldots-y_{n-1})\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_{n-1}+y_{n-1},-(x_2+y_2)-(x_3+y_3)-\ldots-(x_{n-1}+y_{n-1}))\end{aligned}$$

$\underline{X}+\underline{Y} = (z_1,z_2, \ldots, z_n)$

Karena himpunan $S = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$ untuk sembarang X_i, $i = 1,2,\ldots,n$, maka $\underline{X}+\underline{Y} \in S$.

2. Diambil $\underline{X} \in S$ dan $\lambda \in R$ dengan $\underline{X} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ sehingga $\lambda\underline{X} = \lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, karena diketahui : $x_n = -x_2-x_3-\ldots-x_{n-1}$ maka :

$$\begin{aligned}\lambda\underline{X} &= \lambda (x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},-x_2-x_3-\ldots-x_{n-1})\\ &= (\lambda x_1,\lambda x_2, \ldots, \lambda x_{n-1},\lambda(-x_2-x_3-\ldots-x_{n-1}))\\ &= (\lambda x_1,\lambda x_2, \ldots, \lambda x_{n-1},-\lambda x_2-\lambda x_3-\ldots-\lambda x_{n-1})\end{aligned}$$

$\lambda\underline{X} = (p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p_n)$

Dengan adanya itu maka $\lambda\underline{X} \in S$.

Dengan bukti tersebut, maka menurut definisi 22, Contoh 2.

Jika $S = \{ \lambda(1,2,3,0) + \beta(2,3,1,-2) \}$ dengan sembarang $\lambda, \beta \in R$. Buktikan bahwa S adalah ruang bagian dari R^4.

Bukti :

1. Jika $X \in S$, maka $X = \lambda(1,2,3,0) + \beta(2,3,1,-2)$

   $Y \in S$, maka $Y = \gamma(1,2,3,0) + \tau(2,3,1,-2)$

   $$X+Y = \lambda(1,2,3,0) + \beta(2,3,1,-2) + \gamma(1,2,3,0) + \tau(2,3,1,-2)$$
   $$= \lambda(1,2,3,0) + \gamma(1,2,3,0) + \beta(2,3,1,-2) + \tau(2,3,1,-2)$$
   $$= (\lambda+\gamma)(1,2,3,0) + (\beta+\tau)(2,3,1,-2)$$
   $$X+Y = \lambda_1(1,2,3,0) + \lambda_2(2,3,1,-2)$$

   Dengan $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, sehingga

   $\lambda_1(1,2,3,0) + \lambda_2(2,3,1,-2) \in S$, maka $X+Y \in S$

2. Diambil $X \in S$ dengan $X = \lambda(1,2,3,0)+\beta(2,3,1,-2)$ $\lambda, \beta \in R$, sehingga :

   $$\gamma X = \gamma(\lambda(1,2,3,0)+\beta(2,3,1,-2))$$
   $$= \gamma\lambda(1,2,3,0) + \gamma\beta(2,3,1,-2)$$
   $$\gamma X = \lambda_3(1,2,3,0) + \lambda_4(2,3,1,-2)$$

   dengan $\gamma, \lambda_3, \lambda_4 \in R$,sehingga $\lambda_3(1,2,3,0) + \lambda_4(2,3,1,-2)$ merupakan anggota dari S, maka $\lambda X \in S$.

   Karena $X + Y \in S$ dan $\lambda X \in S$, maka menurut definisi 22, S merupakan ruang bagian dari R^4.

Teorema 6

Jika S merupakan ruang bagian dari V dan V ruang vektor yang merupakan anggota dari R^n, maka S adalah ruang vektor .

Diambil titik sembarang X, $Y,Z \in S$ dan sembarang $\lambda,\beta,\gamma \in R$ dimana : $X = (x_1,x_2, \ldots,x_n)$, $Y = (y_1,y_2, \ldots,y_n)$dan $Z = (z_1,z_2,\ldots,z_n)$ serta R merupakan himpunan bilangan real. Akan dibuktikan bahwa itu memenuhi aksioma - aksioma pada ruang vektor , yaitu

b.1.Diketahui $X,Y \in S$ dan $\lambda \in R$, sehingga :

$$X + Y = (x_1,x_2, \ldots, x_n) + (y_1,y_2, \ldots,y_n)$$
$$= (x_1+y_1,x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$
$$X + Y = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

Maka $X + Y \in S$, dan

$$\lambda X = \lambda(x_1,x_2, \ldots,x_n)$$
$$= (\lambda x_1,\lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$
$$\lambda X = (l_1,l_2, \ldots, l_n)$$

b.2.Diambil $X,Y,Z \in S$, maka berlaku :

$$(X+Y) + Z = X + (Y+Z)$$

b.3.Diberikan $X,Y \in S$ dan $\lambda \in R$, maka berlaku $\lambda(X+Y) = \lambda X + \lambda Y$.

b.4.Untuk setiap $X \in S$ dan $\lambda \in R$, maka menurut definisi 22 , berlaku $\lambda X \in S$, karena $0 \in R$, maka $0X \in S$, untuk $X \in S$.

b.5.Untuk setiap $X \in S$ dan $\lambda \in R$,maka berlaku $\lambda X\in S$ sedangkan kita ambil $\lambda = -1$, maka $(-1)X \in S$

$(-1)X = (-1X) = -X \in S$

Jadi untuk setiap $X\in S$, maka ada $-X\in S$ sehingga

$$X + (-X) = X + (-1)X$$
$$= (1+(-1))X$$
$$= 0\ X$$
$$X + (-X) = 0$$

b.6.Untuk setiap $X,Y \in S$, maka berlaku suatu hukum komutatif yaitu : $X + Y = Y + X$

b.7.Diambil $X \in S$ dan $\lambda,\beta \in R$, sehingga berlaku :

ii. $(\lambda\beta)X = \lambda(\beta X)$

b.8. Diambil $X \in S$ dan $\lambda \in R$, untuk suatu $\lambda = 1$, menurut aksioma b.8., maka berlaku $1X = X$.

Dengan adanya bukti-bukti tersebut diatas yang memenuhi semua aksioma-aksioma dari ruang vektor , maka terbukti bahwa S juga merupakan ruang vektor.

Definisi 23.

Jika S dan T adalah ruang vektor bagian di R^n, maka $S+T = \{ X + Y , X \in S , Y \in T \}$.

dimana : $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Teorema 7

Jika S dan T ruang vektor bagian di R^n, maka jumlah $S + T$ juga merupakan ruang vektor bagian dari R^n.

Bukti :

Diambil $Z_1 \in (S+T)$, maka ada $X_1 \in S$ dan $Y_1 \in T$ sehingga $Z_1 = X_1 + Y_1$, dan $Z_2 \in (S+T)$, maka ada X_2 anggota S dan $Y_2 \in T$, sehingga $Z_2 = X_2 + Y_2$

dimana : $Z_1 = (z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1n})$, $Z_2 = (z_{21}, z_{22}, \ldots, z_{2n})$

$X_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $X_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$

$Y_1 = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n})$, $Y_2 = (y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n})$

Dengan adanya itu maka :

$$
\begin{aligned}
Z_1 + Z_2 &= (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) \\
&= (X_1 + X_2) + (Y_1 + Y_2) \\
&= X + Y
\end{aligned}
$$

Karena $X_1, X_2 \in S$ dan $Y_1, Y_2 \in T$, maka menurut definisi 22 $X \in S$ dan $Y \in T$. Sehingga menurut definisi 23 , $Z_1, Z_2 \in (S+T)$. Untuk $\lambda \in R$ berlaku karena $X_1 \in S$, $\lambda \in R$, maka $\lambda X_1 \in S$ dan $Y_1 \in T$, dan $\lambda \in R$, maka $\lambda Y_1 \in T$. Dengan adanya itu menurut 23, maka berlaku $\lambda Z_1 \in (S+T)$. Sehingga terbukti bahwa S+T merupakan ruang bagian R^n.

2.3.2. VEKTOR BEBAS LINEAR DAN TERGANTUNG LINEAR.

Definisi 24

Sekumpulan vektor-vektor X_1 , X_2 ,...., X_m didalam R^n dikatakan tergantung linear jika terdapat skalar $\lambda_i \in R$ (R merupakan himpunan bilangan real), i = 1,2,...,m yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga :

$$\lambda X_1 + \lambda X_2 + \ldots + \lambda X_m = \underline{0}$$

dimana : $X_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$

$X_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$

....

$X_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$ dan $\underline{0} = (0,0,\ldots,0)$

Definisi 25

Sekumpulan vektor-vektor X_1, X_2, ..., X_m didalam R^n dikatakan bebas linear, jika terdapat skalar $\lambda_i \in R$ dengan R himpunan bilangan real dengan i = 1,2,...,m sedemikian sehingga :

$$\lambda X_1 + \lambda X_2 + \ldots\ldots + \lambda X_m = \underline{0}$$

hanya terpenuhi oleh $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$

dimana :

$X_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$

$X_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$

....

$X_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$ dan $\underline{0} = (0,0,\ldots,0)$

Teorema 8.

$X_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots\ldots, x_{2n})$ merupakan dua vektor yang berkelipatan yaitu $X_1 = \lambda X_2$, dengan $\lambda \in \mathrm{R}$, maka mereka bergantung linear .

Bukti :

$$X_1 = \lambda X_2$$
$$X_1 - \lambda X_2 = \lambda X_2 - \lambda X_2$$
$$X_1 - \lambda X_2 = \underline{0}$$

Persamaan itu terdapat suatu harga $\lambda \neq 0$ sehingga menurut definisi 24 mereka bergantung linear.

Teorema 9.

Jika sebagian (himpunan bagian) dari m vektor -vektor $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_m)$ bergantung linear, dimana vektor tersebut anggota R^n dan

$$X_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots, x_{1n})$$
$$X_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots\ldots, x_{2n})$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$
$$X_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots\ldots, x_{mn})$$

maka keseluruhan dari m vektor tersebut adalah tergantung linear .

Bukti :

Misalkan p vektor dengan p<m tergantung linear, katakanlah X_1 , X_2 , ..., X_p, maka terdapatlah skalar - skalar λ_1 , λ_2 , ..., λ_p anggota dari bilangan real yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga :

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_p X_p = \underline{0}$$

Kita ambil kemudian : $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \ldots\ldots = \lambda_m = 0$, sehingga persamaan menjadi : $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots . + \lambda_p X_p + \lambda_{p+1} X_{p+1} + \ldots + \lambda_m X_m = \underline{0}$. Dimana terdapat $\lambda_k \neq 0$ (λ_k diantara λ_1 , λ_2, ..., λ_p). Dengan demikian m

Teorema 10.

Jika himpunan m vektor (X_1, X_2, ..., X_m) bebas linear , maka sebagian (himpunan bagian)nya juga bebas linear. Dimana :

$$X_1 = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n})$$
$$X_2 = (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n})$$
$$..... \qquad ....$$
$$X_m = (x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn})$$ dan $X_1 X_2 ..., X_m \in R^n$

Bukti :

Andaikan X_1, X_2, ..., X_m adalah bebas linear , sedangkan misalnya X_1, X_2, X_3 adalah bergantung linear (3<m). Dalam hal ini terdapat $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ yang tidak semuanya nol sehingga :

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = \underline{0}$$

Jika kita ambil $\lambda_4 = \lambda_5 = ... = \lambda_m = 0$, maka :

$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_m X_m = \underline{0}$, sehingga satu atau lebih didalam himpunan λ_1, λ_2, λ_3 tidak nol dengan $\lambda_i \in R$,i = 1,2, ..., m. Ini berlawanan dengan kenyataan bahwa X_1, X_2, ..., X_m adalah bebas linear. Dengan adanya itu maka pengandaian diingkar dan teorema terbukti .

2.3.3. KOMBINASI LINEAR.

Definisi 26

Suatu vektor X dikatakan kombinasi linear dari vektor-vektor X_1, X_2, ..., X_m dengan X_1, X_2, ...,$X \in R^n$ (ruang dimensi n) , bila terdapat skalar-skalar λ_1, λ_2, ...,$\lambda_m \in R$ sedemikian sehingga :

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ...+ \lambda_m X_m$$

dimana : $X_1 = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n})$

$X_2 = (x_{21}, x_{22} , ..., x_{2n})$

$$X_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots\ldots, x_{mn})$$

Definisi 27

Jika satu vektor dalam suatu himpunan vektor-vektor dalam R^n (ruang dimensi n) dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari beberapa diantara vektor-vektor lainnya dalam himpunan, maka kita katakan bahwa vektor yang diberikan adalah tergantung linear terhadap lainnya.

Definisi 28

Jika tidak ada vektor dalam suatu himpunan vektor - vektor didalam R^n dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari lainnya , maka himpunan dari vektor-vektor adalah tidak saling tergantung secara linear.

Teorema 11

Kombinasi dari vektor-vektor anggota R^n (ruang dimensi n) adalah vektor di R^n.

Bukti :

Diambil $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_m \in R^n$ dimana :

$X_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots., x_{1n})$

$X_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots., x_{2n})$

....

$X_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots., x_{mn})$, maka ada $\lambda_i \in R$ (R himpunan bilangan real) , i =1,2,...,m . Sehingga berlaku $\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots\ldots, \lambda_m X_m$ yang merupakan vektor-vektor di R^n yaitu sifat perkalian vektor dengan skalar . Menurut sifat penjumlahan maka :

$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots\ldots + \lambda_m X_m$ adalah merupakan vektor di R^n.

Teorema 12.

Jika m (m>1)dan vektor-vektor $X_1, X_2, \ldots, X_m \in R^n$ tergantung linear, maka paling sedikit terdapat satu vektor yang dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor selebihnya.

dimana : $X_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots, x_{1n})$

$X_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots\ldots, x_{2n})$

$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$

$X_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots\ldots, x_{mn})$

Bukti :

Karena $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_m$ bergantung linear, paling sedikit satu diantara skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in R$ tidak nol misalkan λ_p sedemikian sehingga :

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots\ldots + \lambda_p X_p + \ldots\ldots + \lambda_m X_m = \underline{0}$$

Kemudian $\lambda_p X_p$ kita pindah ruas dan diperoleh :

$$-\lambda_p X_p = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_{p-1} X_{p-1} + \lambda_{p+1} X_{p+1} + \ldots\ldots + \lambda_m X_m$$

Dan karena $\lambda_p \neq 0$, maka diperoleh :

$$X_p = \frac{-\lambda_1 X_1}{\lambda_p} - \frac{\lambda_2 X_2}{\lambda_p} - \ldots\ldots - \frac{\lambda_{p-1} X_{p-1}}{\lambda_p} - \frac{\lambda_{p+1} X_{p+1}}{\lambda_p} - \ldots\ldots - \frac{\lambda_m X_m}{\lambda_p}$$

$$X_p = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \ldots\ldots + \mu_{p-1} X_{p-1} + \mu_{p+1} X_{p+1} + \ldots\ldots + \mu_m X_m$$

Jadi X_p merupakan kombinasi linear dari vektor selebihnya.