

BAB II
PENGERTIAN - PENGERTIAN

2.1. AKAR - AKAR SUATU PERSAMAAN POLYNOMIAL
DAN TEOREMA - TEOREMA PENDUKUNG

Suatu persamaan polynomial derajat n dapat ditulis dalam bentuk :

$$P_n(x) = 0,$$

dimana :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x^1 + a_n \quad \dots \dots \dots (1.1)$$

$$n = \{ 0, 1, 2, \dots \}$$

$$a_i \in \mathbb{R} \quad \{ i = 0, 1, 2, \dots, n \}$$

$$a_i \neq 0$$

Definisi :

Jika $P_n(x) = (x-r) \cdot Q(x)$ dimana $Q(x)$ adalah suatu polinomial dengan derajat $n-m$ dan m adalah bilangan bulat positif dan jika $Q(x) \neq 0$ atau $\neq \infty$ maka r adalah akar derajat m dari $P_n(x) = 0$, dimana $-\infty < r < \infty$.

Teorema - teorema yang ada hubungannya dengan akar-akar persamaan polynomial adalah sebagai berikut :

TEOREMA I :

Suatu persamaan polynomial $P_n(x) = 0$ berderajat n mempunyai tepat n akar.

BUKTI : Misalkan r_1, r_2, \dots, r_n adalah akar - akar
berlainan dari $P_n(x) = 0$. Karena r_1
merupakan akar dari $P_n(x) = 0$ maka $(x -$
 $r_1)$ adalah faktor dari $P_n(x)$. Sehingga :

$$P_n(x) = (x-r_1) \cdot P_{n-1}(x) \dots \dots \dots (1)$$

dimana $P_{n-1}(x)$ mempunyai derajat $n-1$.
Apabila dalam persamaan terakhir ini x
diganti dengan r_2 maka dari sebab $P_n(r_2)$
 $= 0$ didapat :

$$0 = (r_1-r_2) \cdot P_{n-1}(r_2)$$

Karena $r_1 \neq r_2$ maka $P_{n-1}(r_2) = 0$. sehingga
 $(x-r_2)$ merupakan factor dari $P_{n-1}(x)$,
yaitu $P_{n-1}(x) = (x-r_2) \cdot P_{n-2}(x)$. Maka
persamaan (1) menjadi :

$$P_n(x) = (x-r_1) \cdot (x-r_2) \cdot P_{n-2}(x) \dots \dots \dots (2)$$

dimana $P_{n-2}(x)$ mempunyai derajat $n-2$.
Dengan melanjutkan proses ini maka
akhirnya didapat :

$$P_n(x) = a(x-r_1)(x-r_2) \dots (x-r_n) \dots \dots \dots (3)$$

a adalah koefisien pemimpin dari $P_n(x)$
jadi $\neq 0$. misalkan r merupakan akar dari
 $P_n(x) = 0$. sehingga $P_n(r) = 0$
 $a \cdot (r-r_1) \cdot (r-r_2) \dots (r-r_n) = 0$

Dari sini terlihat karena $a \neq 0$ maka
pasti salah satu $r-r_n = 0$. sehingga r
adalah salah satu diantara r_1, r_2, \dots, r_n .

Maka terbukti persamaan $P_n(x) = 0$ dimana $P_n(x)$ mempunyai derajat n , mempunyai tepat n akar.

TEOREMA II : TEOREMA SISA

Jika suatu polynomial $P_n(x)$ berturut-turut dibagi dengan $(x - r)$ sampai diperoleh sisa yang konstan, maka sisa tersebut sama dengan $P_n(r)$.

BUKTI :

Apabila $P_n(x)$ dibagi dengan $x-r$ dengan hasil bagi $Q(x)$ yang mempunyai derajat $n-1$ dan suatu sisa R , maka diperoleh :

$$P_n(x) = (x-r) \cdot Q_{n-1}(x) + R \quad \dots \dots \dots (4)$$

Untuk $x=r$ maka persamaan (4) menjadi :

$$P_n(r) = 0 \cdot Q_{n-1}(r) + R$$

$$P_n(r) = R \quad \dots \dots \dots (5)$$

TEOREMA III : TEOREMA FACTOR

Jika $P_n(r) = 0$ maka $(x-r)$ adalah faktor dari $P_n(x)$. Dan sebaliknya.

BUKTI :

1. Akan dibuktikan jika $P_n(r) = 0$ maka $(x-r)$ merupakan suatu faktor dari

$P_n(x)$, demikian :

Sesuai teorema II, jika $P_n(x)$ dibagi $(x-r)$ mempunyai sisa $P_n(r)$.

Sehingga berlaku :

$$P_n(x) = (x-r).Q(x) + P_n(r) \dots\dots\dots (6)$$

Jika $P_n(r)=0$ persamaan (6) menjadi :

$$P_n(x) = (x-r).Q(x)$$

maka $(x-r)$ adalah faktor dari $P_n(x)$.

2. Akan dibuktikan jika $(x-r)$ faktor dari $P_n(x)$ maka $P_n(r)=0$, demikian :

Sesuai teorema II, jika $P_n(x)$ dibagi $(x-r)$ mempunyai sisa $P_n(r)$, sehingga berlaku :

$$P_n(x) = (x-r).Q(x) + P_n(r)$$

Jika $(x-r)$ factor dari $P_n(x)$ maka $x=r$ memenuhi persamaan $P_n(x) = 0$, yang berarti $P_n(r)=0$.

TEOREMA IV :

Jika koefisien-koefisien a_j dari $P_n(x)$ adalah bilangan real dan $a+bi$ dimana a dan b bilangan real dengan $b \neq 0$, apabila $a+bi$ adalah suatu akar dari persamaan polynomial $P_n(x) = 0$, maka $a-bi$ juga merupakan suatu akar dari persamaan $P_n(x)=0$.

BUKTI :

Jika $a+bi$ suatu akar dari $P_n(x)=0$, maka $(x-(a+bi))$ adalah faktor dari $P_n(x)$.

$P_n(x)$ dibagi dengan $(x-(a+bi))(x-(a-bi))$ dimana $(x-(a+bi))(x-(a-bi))=x^2 -2a.x + a^2 + b^2$ menghasilkan sisa $cx+d$ dimana c dan d bilangan real.

$$\frac{P_n(x)}{x^2 - 2a.x + a^2 + b^2} = Q(x) + \frac{cx+d}{x^2 - 2a.x + a^2 + b^2} \quad (7)$$

atau

$$P_n(x) = (x^2 - 2a.x + a^2 + b^2).Q(x) + c.x + d \quad (8)$$

dimana c dan d adalah konstanta real.

Karena persamaan (8) berlaku untuk semua x maka benar untuk $x=a+bi$.

$$P_n(a+bi) = 0.Q(a+bi) + c.(a+bi) + d$$

$$P_n(a+bi) = c.(a+bi) + d$$

$$P_n(a+bi) = 0$$

maka :

$$c.a + d = 0 \quad (9)$$

$$c.b_i = 0 \quad (10)$$

Karena diketahui $b \neq 0$, $i \neq 0$ maka $c=0$ (11)

persamaan (9) menjadi:

$$0 + d = 0$$

maka : (<http://eprints.undip.ac.id>)

$$d = 0$$

Persamaan (8) menjadi :

$$P_n(x) = (x^2 - 2a.x + a^2 + b^2).Q(x)$$

$$P_n(x) = (x-(a+bi)).(x-(a-bi)).Q(x) \quad (12)$$

Sehingga persamaan polynomial $P_n(x)=0$ dapat diselesaikan sebagai :

$$(x-(a+bi)).(x-(a-bi)).Q(x) = 0$$

berarti $(x-(a+bi)) = 0$, maka $x = a+bi$ juga merupakan akar dari $P_n(x)=0$.

TEOREMA V :

Suatu polynomial derajat $2n+1$, dengan n bilangan asli dapat difaktorkan sebagai hasil kali $(fx+g)$ dan (cx^2+dx+e) , dengan c,d,e,f,g real.

BUKTI :

$$\text{Jika } P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

adalah suatu polynomial real yang mempunyai derajat n , maka menurut teorema IV, apabila $a+bi$ adalah akar dari $P_n(x)=0$ maka $a-bi$ juga merupakan akar dari $P_n(x)=0$, dengan $b \neq 0$.

Ambil:

$$h_2(x) = (x-a-bi).(x-a+bi)$$

$$h_2(x) = x^2 - 2a.x + a^2 + b^2$$

$P_n(x)$ dibagi dengan $h_2(x)$ sampai

menghasilkan sisa yang mempunyai derajat

1. misal $ux+v$, maka :

$$P_n(x) = h_2(x) \cdot Q_{n-2}(x) + v \quad \dots \dots \dots (13)$$

dimana $Q_{n-2}(x)$ adalah suatu polynomial real yang merupakan hasil bagi $P_n(x)$ dengan $h_2(x)$.

Dengan mengganti $x=a+bi$ pada persamaan (8) maka menurut teorema IV didapat $u=0$ dan $v=0$. Proses ini dilanjutkan terus sampai menghasilkan polynomial sisa yang hanya mempunyai akar real. Jika $P_n(x)=0$, apabila akar - akar tersebut r_1, r_2, \dots, r_k maka menurut Teorema Factor dapat ditulis sebagai :

$$a_0 \cdot (x-r_1) \cdot (x-r) \dots (x-r_k) \cdot D_1(x).$$

$$D_2(x) \dots D_t(x)=0$$

Berarti $P_n(x)$ dapat difactorkan sebagai hasil kali para $(fx+g)$ dan para (cx^2+dx+e)

TEOREMA VI : TEOREMA ROLLE

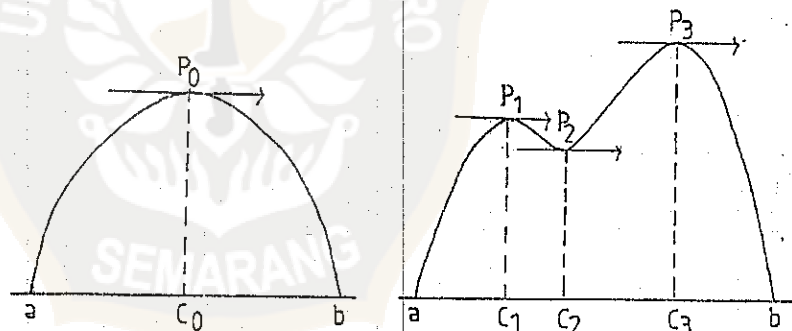
Jika $f(x)$ kontinu pada interval tertutup $a \leq x \leq b$ dan dapat didiferensiiir pada interval terbuka $a < x < b$ dan $f(a)=f(b)$ maka terdapat sedikit - dikitnya satu titik dengan absis $x=c$ dimana

$$a < x < b \text{ sehingga berlaku } f'(x)=0.$$

BUKTI

Untuk memperoleh gambaran mengenai Dalil Rolle ini dari sudut ilmu ukur dapat dilihat pada gambar. Pada gambar 1. garis singgung di titik P_0 berabsis $x=c_0$ sejajar sumbu x .

Pada gambar 2. garis singgung di titik P_1 berabsis $x=c_1$, di titik P_2 berabsis $x=c_2$, masing-masing sejajar sumbu x .



- Jika $f(x)$ berimpit dengan sumbu x berarti $f(x)=0$ maka selalu berlaku $f'(x)=0$ sehingga Dalil Rolle benar.
- Jika $f(x) \neq 0$, karena $f(x)$ kontinu pada interval $a < x < b$ maka terdapat sedikit-dikitnya satu titik $x=c$ pada interval tersebut sehingga $f(c)$ mencapai harga maksimum atau harga minimum.

Misalkan terdapat harga maksimum sebesar M , maka $f(c)=M$. Karena maksimum

maka $f(c+h) < f(c)$.

Terdapat 2 hal :

1. Bila $h > 0$ maka $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$ dan

turunan kanan dari $f(x)$ di titik $x=c$ ialah :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$$

.....(1)

2. Bila $h < 0$ maka $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0$ dan

turunan kiri dari $f(x)$ di titik $x=c$ ialah :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0$$

.....(2)

Diketahui bahwa $f(x)$ dapat didiferensier pada interval $a < x < b$, maka dapat didiferensier juga di titik $x=c$ dimana $(a < c < b)$.

Dengan perkataan lain di titik $x=c$ berlaku bahwa turunan kanan dari $f(x)$ = turunan kiri dari $f(x)$.

Dan ini hanya terjadi jika $(1) = (2) = 0$.

Berarti:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \text{ atau } f'(c) = 0$$

TEOREMA VII : TEOREMA NILAI RATA-RATA

Jika $f(x)$ kontinu pada interval

tertutup $a < x < b$, dan dapat

didiferensier pada interval terbuka

maka terdapat sedikit -

dikitnya satu titik dengan absis $x=c$ dimana $a < c < b$ sehingga berlaku :

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-a} = f'(c)$$

BUKTI :

Pernyataan $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ adalah kemiringan

dari garis yang menghubungkan titik A $(a, f(a))$ dan B $(b, f(b))$. Ambil fungsi baru yang memenuhi kondisi dari Teorema Rolle, misalkan fungsi itu :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a)$$

dimana $g(x)$ adalah selisih antara elemen kedua dari titik $(x, f(x))$ pada grafik dari fungsi f dan elemen kedua dari titik :

$$(x, f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a))$$

pada garis lurus yang menghubungkan A $(a, f(a))$ dan B $(b, f(b))$. $g(x)$ merupakan fungsi yang menyatakan jarak antara sebarang titik pada $f(x)$ dan titik yang berabsis sama dan terletak pada garis lurus yang menghubungkan A dan B.

Jelaslah bahwa $g(a) = g(b) = 0$ dan g kontinu pada (a, b) .

Maka $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dan f

differentiable pada (a,b) , maka g

differentiable pada (a,b) . Maka menurut

Teorema Rolle terdapat satu titik

$c \in (a,b)$ sedemikian hingga $g'(c) = 0$.

Didapat :

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)$$

2.2. METODE BIERGE - VIETA

Metode ini dipergunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan polynomial derajat n , dimana metode ini dipakai untuk mencari akar dari suatu persamaan dengan cara yang tidak langsung. Maksudnya ialah dalam mencari penyelesaian suatu persamaan dengan melaksanakan serangkaian operasi aritmatika dan operasi logika dengan cara diulang-ulang. Jawaban yang diperoleh merupakan suatu pendekatan dan diperbaiki dengan setiap pengulangan dari operasinya sampai batas ketelitian yang dikehendaki.

Metode Birge Vieta merupakan metode gabungan / kombinasi dari 2 proses yaitu :

- Proses Pembagian Sintetik oleh Faktor Linier dan
- Iterasi Newton Raphson.

Proses Pembagian Sintetik pada metode ini- dibutuhkan untuk mencari $P_n(x)$ dan $P'_n(x)$ dimana nilai- nilai dari $P_n(x)$ dan $P'_n(x)$ diperlukan dalam

rumus iterasi Newton Raphson untuk menghitung x_{i+1} . Apabila persamaan polynomial derajat n dinyatakan dalam bentuk umum $P_n(x) = 0$, dimana :

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

dan mempunyai koefisien-koefisien a_i ($i=0,1,\dots,n$) yang nyata, diambil akar-akar persamaannya ialah r_i ($i=1,2,\dots,n$) maka persamaan (2.1) dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari n faktor linier $(x-r_i)$. Yaitu :

$$P_n(x) = (x-r_1)(x-r_2) \dots (x-r_n) \quad \dots \dots \dots (2.2)$$

Bila akar dari $P_n(x) = 0$ yaitu $r_1=x_1$ telah dihitung maka $P_n(x)$ diganti dengan polynomial derajat $(n-1)$ yaitu $P_{n-1}(x)$ dengan $P_{n-1}(x) = P_n(x)/(x-r_1)$.

Akar r_2 yang diperoleh dari $P_{n-1}(x) = 0$ juga merupakan akar dari $P_n(x) = 0$.

Dengan cara yang sama dalam menghitung r_1 maka

$$P_{n-1}(x) \text{ diganti dengan } P_{n-2}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(x-r_2)}$$

yaitu polynomial derajat $n-2$.

Proses ini diteruskan sampai menghasilkan semua akar $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ dari $P_n(x) = 0$.

2.2.1. PROSES PEMBAGIAN SINTETIK UNTUK MENGHITUNG

$P_n(x)$ DAN $P'_n(x)$

Jika $P_n(x)$ dibagi dengan factor $(x-x_i)$ maka

diperoleh

$$\frac{P_n(x)}{(x-x_i)} = x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + b_2 \cdot x^{n-3} + \dots + b_{n-2} \cdot x + \frac{b_{n-1}}{x-x_i} + b_n$$

Apabila persamaan ini dikalikan dengan $x-x_i$:

$$P_n(x) = (x-x_i) \cdot (x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \dots + b_{n-2} \cdot x + b_{n-1}) + b_n \quad \dots \dots \dots (2.3)$$

Misalkan diambil akar perkiraan $x=x_i$ maka dari persamaan (2.3) didapat $P_n(x_i) = b_n$. Karena b_n dapat dihitung maka persamaan polynomial $P_n(x)$ dapat dihitung untuk $x = x_i$.

Untuk mencari semua b_i , i dari 1,2, ... n dapat dicari dengan cara menyamakan semua koefisien pangkat x yang sama pada kedua ruas kanan persamaan (2.1) dan persamaan (2.3) yaitu :

$$P_n(x) = x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0 \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x-x_i) \cdot (x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \dots + b_{n-2} \cdot x + b_{n-1}) + b_n \\ &= (x^n + b_1 \cdot x^{n-1} + b_2 \cdot x^{n-2} + \dots + b_{n-2} \cdot x^2 + b_{n-1} \cdot x) - x_i \cdot (x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \dots + b_{n-2} \cdot x + b_{n-1}) + b_n \\ &= x^n + (b_1 - x_i) \cdot x^{n-1} + (b_2 - b_1 \cdot x_i) \cdot x^{n-2} + \dots + (b_{n-2} - b_{n-1} \cdot x_i) + b_n \end{aligned}$$

Didapat :

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 - x_i & b_1 &= a_1 + x_i \\ a_2 &= b_2 - b_1 \cdot x_i & b_2 &= a_2 + b_1 \cdot x_i \end{aligned}$$

$$a_3 = b_3 - b_2x_i \quad b_3 = a_3 + b_2x_i$$

$$a_k = b_k - b_{k-1}x_i \quad b_k = a_k + b_{k-1}x_i$$

$$a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}x_i \quad b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2}x_i$$

$$a_n = b_n - b_{n-1}x_i \quad b_n = a_n + b_{n-1}x_i$$

Secara umum :

$$b_1 = a_1 + x_i \quad (\text{awal})$$

$$b_k = a_k + b_{k-1}x_i \quad (k=2,3, \dots, n)$$

(pengulang)

Jadi nilai $P_n(x)$ untuk $x=x_i$ yang nilainya sebesar b_n dapat dihitung dengan mencari b_n memakai rumus yang sudah ada yaitu rumus (2.4).

Untuk mencari nilai $P'_n(x)$ diperoleh dengan cara menurunkan $P_n(x)$ dari persamaan (2.3).

$$P_n(x) = (x-x_i).P_{n-1}(x)$$

$$P'_n(x) = (x-x_i).P'_{n-1}(x) + P_{n-1}(x)$$

..... (2.5)

$$\text{dimana } P_{n-1}(x) = x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + \dots$$

$$+ b_{n-2}.x + b_{n-1}$$

untuk harga $x=x_i$, didapat :

$$P'_n(x) = P_{n-1}(x)$$

..... (2.6)

sedang jika $P_{n-1}(x)$ dibagi dengan $(x-x_i)$ akan diperoleh :

$$P_{n-1}(x) = (x-x_i).P_{n-2}(x) + c_n$$

..... (2.7)

dimana :

$$P_{n-2}(x) = c_1 \cdot x^{n-2} + c_2 \cdot x^{n-3} + \dots + c_{n-2} \cdot x + c_{n-1} \dots \dots \dots (2.8)$$

Maka dari persamaan (2.7) untuk $x=x_i$ diperoleh $P_{n-1}(x)=c_n$ dan $P'_n(x)=c_n$ yang diperoleh dari persamaan (2.6).

Untuk menghitung c_j ($j=2,3, \dots, n$) digunakan cara yang sama pada waktu menghitung b_i yaitu dengan cara menyamakan koefisien dari pangkat x yang sama pada ruas kanan dan ruas kiri dari persamaan (2.7).

$$\begin{aligned} x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \dots + b_{n-2} \cdot x + b_{n-1} \\ &= (x-x_i) \cdot P_{n-2}(x) + c_n \\ &= (x-x_i) \cdot (c_1 \cdot x^{n-2} + c_2 \cdot x^{n-3} + \dots + c_{n-2} \cdot x + c_{n-1}) \\ &\quad + c_n \\ &= c_1 \cdot x^{n-1} + c_2 \cdot x^{n-2} + \dots + c_{n-2} \cdot x^2 + c_{n-1} \cdot x - \\ &\quad x_i \cdot (c_1 \cdot x^{n-2} + c_2 \cdot x^{n-3} + \dots + c_{n-2} \cdot x + c_{n-1}) + c_n \\ &= c_1 \cdot x^{n-1} + c_2 \cdot x^{n-2} + c_3 \cdot x^{n-3} - x_i \cdot c_2 \cdot x^{n-3} + \dots \\ &\quad + c_{n-1} \cdot x - x_i \cdot c_{n-2} \cdot x + c_{n-1} + c_n \end{aligned}$$

Didapat :

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ b_1 &= c_2 - x_i \cdot c_1 & c_2 &= b_1 + x_i \cdot c_1 \\ b_2 &= c_3 - x_i \cdot c_2 & c_3 &= b_2 + x_i \cdot c_2 \\ &\vdots & &\vdots \\ &\vdots & &\vdots \\ b_{k-1} &= c_k - x_i \cdot c_{k-1} & c_k &= b_{k-1} + x_i \cdot c_{k-1} \\ &\vdots & &\vdots \\ &\vdots & &\vdots \\ b_{n-2} &= c_{n-1} - x_i \cdot c_{n-2} & c_{n-1} &= b_{n-2} + x_i \cdot c_{n-2} \end{aligned}$$

$$b_{n-1} = c_n - x_i c_{n-1} c_n = b_{n-1} + x_i c_{n-1}$$

Secara umum didapat :

$$c_1 = 1 \quad \text{(awal)}$$

$$c_k = b_{k-1} + x_i c_{k-1} \quad \text{(k=2,3, \dots)}$$

(pengulang)

Jika diberikan x_i , suatu nilai pendekatan salah satu akar dari persamaan polynomial $P_n(x)=0$, maka nilai $P_n(x_i)$ dan $P'_n(x_i)$ yang dibutuhkan dalam rumus iterasi Newton Raphson untuk menghitung x_{i+1} dapat diperoleh.

Secara ringkas proses mencari $P_n(x_i)$ dan $P'_n(x_i)$ adalah :

$$\begin{array}{r}
 1 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n-2} \quad a_n \\
 \quad x_i \quad x_i b_1 \quad \dots \quad x_i b_{n-3} \quad x_i b_{n-1} \\
 \hline
 1 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-2} \quad b_n = P_n(x_i) \\
 \quad x_i c_1 x_i c_2 \quad \dots \quad x_i c_{n-2} \\
 \hline
 c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_{n-2} \quad = P'_n(x_i)
 \end{array}$$

Kemudian menghitung pendekatan akar x_{i+1} dengan rumus Newton Raphson sampai didapat x_{i+1} yang paling mendekati.

2.2.2. METODE NEWTON RAPHSON

Didalam menentukan akar persamaan umum $P(x) = 0$
 (1)

2. Akar pendekatan dijabarkan lagi untuk mendapatkan ketelitian yang diinginkan

Bentuk persamaan $f(x)=0$ dapat ditulis dalam bentuk lain yaitu :

$$x = g(x) \quad \dots \dots \dots (2)$$

Sebagai contoh misalnya $f(x) = 0$, dimana $f(x) = x^2 - c$ dengan $c > 0$

Cara yang ke :

1. Dengan menambah x pada kedua ruas dan didapat $x = x^2 + x - c$
2. Dengan dibagi x pada kedua ruas $x = c/x$
3. Dengan dibagi $2x$ kemudian ditambahkan x pada kedua ruas $x = 1/2(x + c/x)$
4. Atau dengan cara yang lain

Bila x_0 merupakan harga pendekatan awal dari persamaan (2) maka sebagai nilai pendekatan berikutnya diperoleh $x_1 = g(x_0)$. Sebagai harga pendekatan berikutnya lagi adalah $x_2 = g(x_1)$ dan seterusnya sehingga untuk pendekatan ke i disebut dengan iterasi ke i yaitu :

$$x_i = g(x_{i-1}) \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

Metode iterasi akan konvergen apabila pendekatan makin mendekati hasil yang tertentu.

Persamaan (2) didapatkan dari perpotongan antara garis $y = x$ dan kurva $y = g(x)$. Misalkan $x=r$ adalah harga dari titik potong $y = x$ dan $y = g(x)$ maka r adalah akar dari persamaan (2), sehingga :

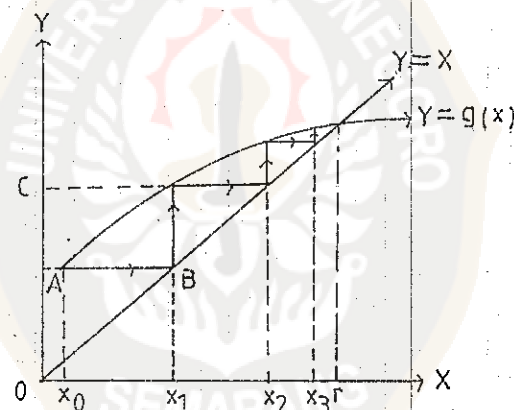
$$r = g(r)$$

.....(3.2)

Nilai r yang dicari merupakan salah satu penyelesaian dari persamaan (1).

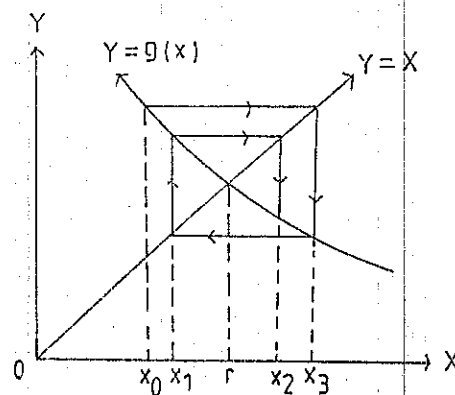
Karena dalam membentuk persamaan (1) menjadi persamaan (2) ada berbagai cara, sehingga akan dijumpai $g'(x)$ yang berbeda.

Hal ini dilukiskan pada gambar - gambar dibawah ini.



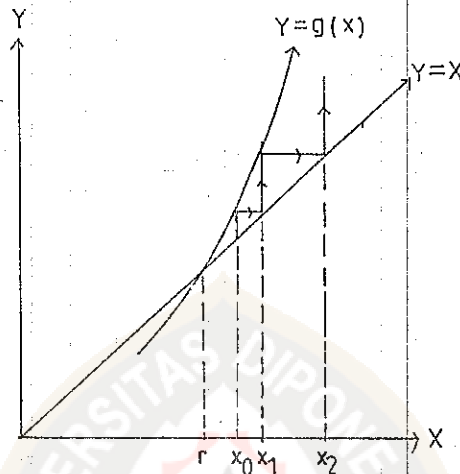
Gambar 1

Iterasi untuk $0 < g'(x) < 1$

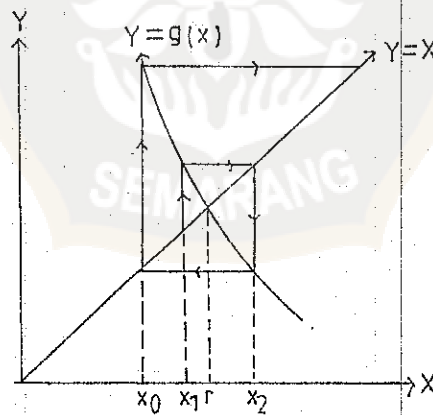


Gambar 2

Iterasi untuk $-1 < g'(x) < 0$



Gambar 3

Iterasi untuk $g'(x) > 1$ 

Gambar 4

Iterasi untuk $g'(x) < -1$

Pada gambar (1) jika iterasi yang pertama dipilih harga pendekatan awal x_0 maka harga $x_1 = g(x_0)$ yaitu OA dan dengan menarik garis sejajar sumbu x didapat titik potong B yang memotong garis $y = x$. Harga $g(x_1) = x_2$.

diperoleh dengan menarik garis vertikal lewat B dan memotong kurva $y = g(x)$ maka $OC = x_2$. Ini

dilakukan sampai menghasilkan titik potong $y=x$ dan $y=g(x)$ yaitu nilai r .

Pada gambar (3) dan (4) tiap tahapnya semakin menjauhi titik potong $y=x$ dan $y=g(x)$, jadi semakin menjauhi nilai r yang dicari. Maka dikatakan iterasi pada gambar (3) dan (4) divergen, sedang gambar (1) dan (2) konvergen.

Dari ke 4 gambar tersebut bisa diambil kesimpulan bahwa apabila $|g'(x)| < 1$ maka iterasinya adalah konvergen. Ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

$$r = g(r) \quad \text{dari persamaan (3.2)}$$

$$x_i = g(x_{i-1}) \quad \text{dari persamaan (3.1)}$$

maka

$$x_i - r = g(x_{i-1}) - g(r)$$

$$\text{Ruas kanan dikalikan } \frac{(x_{i-1} - r)}{(x_{i-1} - r)} \quad \text{Dengan}$$

menggunakan Teorema Nilai Rata-rata didapatkan :

$$x_i - r = g'(\varphi) \cdot (x_{i-1} - r) \quad \dots \dots \dots (3.3)$$

dimana φ terletak diantara x_{i-1} dan r .

Bila M adalah maksimum mutlak dari $g'(x)$ dengan φ

ada dalam interval x_0, x_1, \dots, x_i, r maka :

$$|(x_i - r)| \leq M |(x_{i-1} - r)|$$

$$|(x_{i-1} - r)| \leq M |(x_{i-2} - r)|$$

Sehingga :

$$|(x_i - r)| \leq M^2 |(x_{i-1} - r)|$$

Dengan meneruskan cara ini didapat :

$$|(x_i - r)| \leq M^i |(x_0 - r)|$$

Jika $M < 1$ berapapun nilai x_0 akan membuat unsur diruas kanan menjadi kecil, dan x_i menjadi lebih dekat dengan r dan sebaliknya jika $|g'(x)| > 1$, $(x_i - r)$ akan menjadi besar dengan bertambahnya i .

Dapat disimpulkan :

- Bila $|g'(x)| < 1$ proses konvergen
- Bila $|g'(x)| > 1$ proses divergen

Jadi dalam mengubah bentuk (1) menjadi bentuk (2) harus dicari bentuk $g(x)$ sedemikian sehingga syarat konvergensi dipenuhi, karena bisa ditemui proses iterasi pada suatu persamaan mungkin konvergen mungkin divergen. Sebagai contoh dalam mengubah $f(x) = x^2 - c$ ke bentuk $g(x) = x^2 + x - c$ maka didapat $g'(x) < 1$ untuk $-1 < x < 0$ dan prosesnya konvergen.

Jika $f(x)$ diubah sehingga didapat $g(x) = c/x$, maka $g'(x) = -c/x^2$. Untuk $x = \sqrt{c}$ diperoleh $g'(x) = -1$ dan prosesnya divergen.

Pada Gambar 1 terlihat bahwa setiap iterasi lebih mendekati harga tertentu dari iterasi sebelumnya. Maka secara umum proses tersebut dapat ditulis :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \quad \dots \dots \dots (3.4)$$

dimana

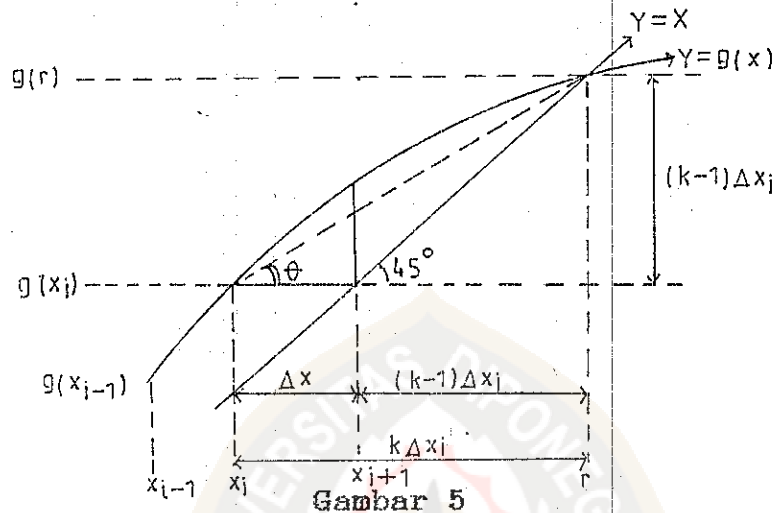
$$\Delta x_i = g(x_i) - x_i$$

maka iterasi selanjutnya dapat dipilih :

$$x_{i+1} = x_i + k \cdot \Delta x_i \quad \text{dimana } k > 1.$$

Sebab dengan memilih harga yang tepat akan

didapatkan harga $x_{i+1} = r$. Hal ini dilukiskan pada diagram 5 dibawah ini.



Gambar 5

Dari diagram diketahui jarak antara x_{i+1} dan r adalah $(k - 1) \cdot \Delta x_i$ dengan $y = x$ bersudut 45° . Maka didapat sudut tangen θ adalah :

$$\text{tg } \theta = \frac{(k-1) \cdot \Delta x_i}{k \cdot \Delta x_i} = \frac{k-1}{k} \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{g(r) - g(x_i)}{r - x_i}$$

Dengan menggunakan teorema Nilai Rata - Rata , $\text{tg } \theta = g'(\xi)$ (5)

dimana $x_i < \xi < r$.

Dari persamaan (4) dan (5) didapat :

$$\dots \dots \dots (6)$$

Yaitu dari :

$$k - 1 = \frac{g'(\xi)}{k}$$

$$k * (1 - g'(\xi)) = 1$$

$$k = \frac{1}{1 - g'(\xi)}$$

Karena harga ξ tak diketahui maka harga $g'(\xi)$ didekati dengan :

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \\ &= \frac{g(x_i) - x_i}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

Harga ini dilukiskan dengan menarik garis antara titik $(x_i, g(x_i))$ dan $(x_{i-1}, g(x_{i-1}))$ dan mencari titik potongnya dengan garis $y = x$.

Untuk kesederhanaan perhitungan, diambil harga $\xi = x_{i-1}$ dimana $x_{i-1} \leq \xi \leq r$, maka didapat :

$$k = \frac{1}{1 - g'(x_{i-1})} \dots\dots\dots (8)$$

$$x_i = \frac{g(x_{i-1}) - x_{i-1} * g'(x_{i-1})}{1 - g'(x_{i-1})} \dots\dots\dots (9)$$

Persamaan (9) didapat dari :

$$x_i = x_{i-1} + k * \Delta x_{i-1}$$

$$x_i = x_{i-1} + \frac{1}{1 - g'(x_{i-1})} * (g(x_{i-1}) - x_{i-1})$$

$$x_i = \frac{g(x_{i-1}) - x_{i-1} * g'(x_{i-1})}{1 - g'(x_{i-1})}$$

Persamaan ini ekuivalen dengan pendekatan berturut-turut yang diberikan oleh :

$$x_i = h(x_{i-1})$$

dimana :

$$h(x) = \frac{g(x) - x * g'(x)}{1 - g'(x)} \dots \dots \dots (10)$$

Jika $|h'(x)| < 1$ maka metodenya konvergen, sehingga :

$$h'(x) = \frac{g''(x) * (g(x) - x)}{(1 - g'(x))^2} < 1 \dots \dots \dots (11)$$

Biasanya rumus dari Metode Newton Raphson ditulis dalam bentuk :

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \dots \dots \dots (12)$$

dimana,

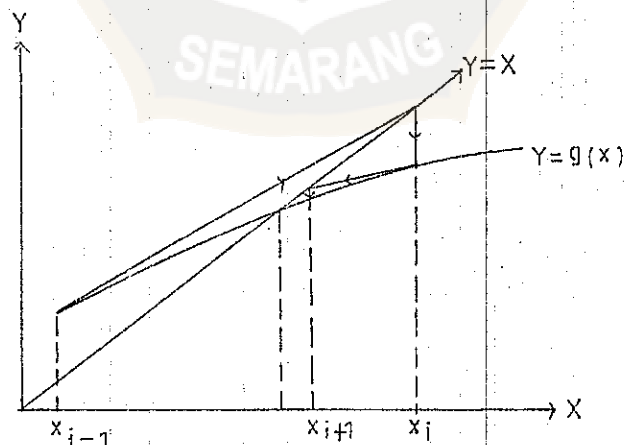
$$f(x) = g(x) - x \dots \dots \dots (13)$$

Dengan melihat persamaan (13) ini berarti kita kembali ke persamaan (1), sehingga persamaan (12)

akan konvergen apabila :

1. Pada iterasi ke i, x_{i-1} cukup dekat dengan akar dari $f(x)=0$
2. $f'(x)$ tidak sama dengan 0

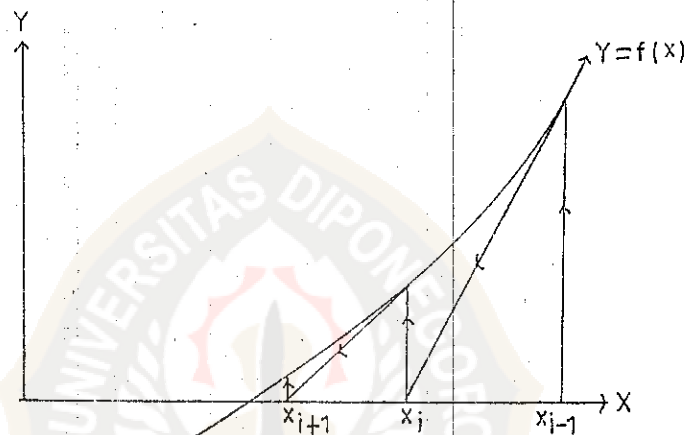
Pada gambar 6, melukiskan iterasi dari metode Newton Raphson untuk $x = g(x)$ dari persamaan (9). Pada titik $(x_{i-1}, g(x_{i-1}))$ garis singgung $y=g(x)$ mempunyai sudut kemiringan θ . Dengan menarik garis singgung kurva $y = g(x)$ dan mencari titik potongnya dengan garis $y = x$, apabila ditarik sejajar sumbu y didapatkan absis x_i . Titik potong garis vertikal tadi dengan kurva $y = g(x)$ adalah titik $(x_i, g(x_i))$. Di titik ini didapat sudut θ yang baru yaitu kemiringan dari kurva $y = g(x)$ di $(x_i, g(x_i))$. Proses ini dilanjutkan sampai mendapatkan akar yang dicari yaitu titik potong dari $y = x$ dan $y = g(x)$.



Gambar 6

Pada gambar 7, melukiskan iterasi dari Metode Newton Raphson untuk $f(x) = 0$ dengan menggunakan persamaan (12). Garis singgung dari kurva $y = f(x)$ yang mempunyai kemiringan θ di titik $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ ditarik sehingga memotong sumbu x pada absis x_i . Garis sejajar sumbu y yang

melalui $(x_i, 0)$ diteruskan hingga memotong kurva $y = f(x)$ di titik $(x_i, f(x_i))$. Di titik ini dibuat lagi garis singgung sampai memotong sumbu x . Proses ini diteruskan sampai mendapatkan akarnya yaitu titik potong antara $y = f(x)$ dan $y = 0$.



Gambar 7

Proses dari Metode Newton Raphson akan diakhiri pada saat $|x_i - x_{i-1}| \leq \varphi$ dan $|f(x_i)| = |g(x_i) - x_i| \leq \varphi$, dimana φ adalah bilangan positif yang sangat kecil mendekati nol.

2.2.3. CONTOH PROSES PERHITUNGAN METODE BIERGE VIETA

Mencari penyelesaian persamaan polynomial $x^5 - x^4 - 28x^3 + 40x^2 + 88x + 32 = 0$ dengan akar perkiraan : $x_i = -0.75000$ dan $\varphi = 0.00005$

l. k	a_k	b_k	c_k
0	1	1	
1	-1	-1.75000	1
2	-28	-26.68750	-2.50000
3	40	60.01563	-24.81250
4	88	42.98828	78.62500
5	32	-0.24121	-15.98047

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 - \frac{f_5(x_0)}{f'_5(x_0)} \\
 &= -0.75000 - \frac{-0.24121}{-15.98047} = -0.75000 - 0.15094 \\
 &= -0.76509
 \end{aligned}$$

2. k	a_k	b_k	c_k
0	1	1	
1	-1	-1.76509	1
2	-28	-26.64954	-2.53099
3	40	60.38940	-24.71309
4	88	41.79643	79.29724
5	32	0.21801	-18.87341

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 - \frac{f_5(x_1)}{f'_5(x_1)} \\
 &= -0.76509 - \frac{32.15116}{-74.72508} = -0.76509 - 0.02180 \\
 &= -0.76394
 \end{aligned}$$

3. k	a_k	b_k	c_k
0	1	1	
1	-1	-1.76394	1
2	-28	-26.65246	-2.52787
3	40	60.36085	-24.72132
4	88	41.88801	79.24641
5	32	0.00013	-18.65141

$$\begin{aligned}
 x_3 &= x_2 - \frac{f_5(x_2)}{f'_5(x_2)} \\
 &= -0.76394 - \frac{0.00013}{-18.65141} \\
 &= -0.76393
 \end{aligned}$$

4. k	a_k	b_k	c_k
0	1	1	
1	-1	-1.76248	1
2	-28	-26.65248	- 2.52787
3	40	60.36068	-24.72136
4	88	41.88854	79.24641
5	32	- 0.00000	-18.65009

$$\begin{aligned}
 x_4 &= x_3 - \frac{f_5(x_3)}{f'_5(x_3)} \\
 &= -0.76393 - \frac{0.00000}{-18.65009} \\
 &= -0.76393
 \end{aligned}$$

$$f(x_4) = f(-0.76393) = 0$$

Jika diambil $\rho = 0.00005$, maka pada iterasi yang ke 4 sudah didapatkan salah satu akarnya yaitu = -0.76393.

Untuk mencari akar yang lainnya diambil lagi harga perkiraan yang lain.

2.2.4. EFEK KETIDAK PASTIAN DALAM KOEFISIEN

Seringkali persamaan polinomial (2.1) diperoleh dari perhitungan sebelumnya, oleh karena itu pastilah ada ketidakpastian harga koefisien tersebut.

Misalkan kesalahan a_i adalah δ_i , maka persamaan polinomial yang sebenarnya adalah :

$$P_n^*(x) = (a_0 + \delta_0) + (a_1 + \delta_1)x + (a_2 + \delta_2)x^2 + \dots + (a_n + \delta_n)x^n \quad \dots \dots \dots (1.a)$$

Harga kesalahan δ_i tidak diketahui sebab jika diketahui maka akan dapat dicari harga akar sebenarnya dari $P_n^*(x)$, dan bukan lagi harga akar pendekatan dari polinomial $P_n(x)$.

Apabila x adalah akar dari polinomial semula, yaitu persamaan polinomial $P_n(x)$ maka :

$$x^* = x + \xi \quad \dots \dots \dots (1.b)$$

adalah merupakan akar dari persamaan (1.a), dimana harga $|\xi|$ kecil sekali dibandingkan harga x .

Jika persamaan (1.b) disubstitusikan ke persamaan (1.a) dengan $P_n^*(x) = 0$ didapatkan :

$$(a_0 + \delta_0) + (a_1 + \delta_1)(x + \xi) + (a_2 + \delta_2)(x + \xi)^2 + \dots + (a_n + \delta_n)(x + \xi)^n = 0.$$

Dengan menguraikan $(x + \xi)^i$ dan mengabaikan suku yang mengandung ξ dengan pangkat lebih besar atau sama dengan dua didapatkan :

$(a_0 + \zeta_0) + (a_1 + \zeta_1)(x + \zeta) + \dots +$
 $(a_{n-1} + \zeta_{n-1})(x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} \zeta) + (a_n + \zeta_n)(x^n$
 $+ nx^{n-1}\zeta) = 0$. Suku yang mengandung ζ_i diabaikan
 dan $P_n^*(x^*) = 0$ maka :

$$\zeta_0 + \zeta_1 x + \dots + \zeta_{n-1} x^{n-1} + \zeta_n x^n + \zeta(a_1 + 2a_2 x + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_n x^{n-1}) = 0$$

sehingga $\sum_{i=0}^n \zeta_i x^i + \zeta P'_n(x) = 0$

Jadi hubungan dalam ζ adalah :

$$|\zeta| \leq \frac{\sum_{i=0}^n |\zeta_i x^i|}{|P'_n(x)|} \dots \dots \dots (1.c)$$

dengan syarat $|P'_n(x)| \neq 0$.

Terdapat 2 kasus yaitu :

- 1. Koefisien adalah data hasil percobaan, yang mempunyai tempat desimal konstan sebanyak p .

Maka $|\zeta_i| \leq 1/2 * 10^{-p}$. Dari persamaan (1.c) diperoleh :

$$|\zeta| \leq \frac{1/2 * 10^{-p}}{|P'_n(x)|} \left| \sum_{i=0}^n x^i \right|$$

Karena $\left| \sum_{i=0}^n x^i \right| \leq \sum_{i=0}^n |x|^i$

Dengan ketidaksamaan segitiga, ruas kanan dari ketidaksamaan yang terakhir ini, deret geometrinya adalah :

$$\frac{1 - |x|^{n+1}}{1 - |x|}$$

dengan syarat $|x| \neq 1$

Sehingga :

$$|\zeta| \leq \frac{10^{-p}(1 - |x|^{n+1})}{2|c_1|(1 - |x|)} \dots \dots \dots (1.d)$$

dimana harga c_1 menggantikan $P'_n(x)$ dan dihitung dari persamaan (2.9).

2. Jika Koefisien adalah hasil dari kalkulasi "floating point" yang mempunyai jumlah angka yang ditentukan.

Bila setiap a_i diberi t angka utama sebesar t , maka :

$$|\xi_i| \leq 5 * 10^{-t} * |a_i| \dots \dots \dots (1.e)$$

dan dari (1.c) maka :

$$|\xi_i| \leq 5 * 10^{-t} \frac{|a_i x^i|}{|c_i|} \dots \dots \dots (1.f)$$

Contoh kasus 1 :

$$P_n(x) = x^5 - x^4 - 23x^3 + 40x^2 + 88x +$$

32 = 0 misalkan koefisien teliti sampai 5 desimal ($p = 5$). Salah satu akar yang diperoleh adalah $x = -0.76393$.

Sehingga menurut persamaan (1.d) maka:

$$\xi \leq 1.9655 * 10^{-10} \text{ yang menyatakan bahwa } x = -0.76393 \pm 1.9655 * 10^{-10}$$

Contoh kasus 2 :

$$P_n(x) = x^5 - x^4 - 23x^3 + 40x^2 + 88x +$$

+ 32. Misalkan koefisien adalah angka yang dihitung sampai ketelitian utama ($t=4$), maka untuk $x = -0.76393$:

$$|\xi| \leq 5 * 10^{-4} \dots \dots \dots$$

$$|\xi| \leq 0.1 * 10^{-8}$$

$$\text{sehingga } x = -0.76393 \pm 0.1 * 10^{-8}$$

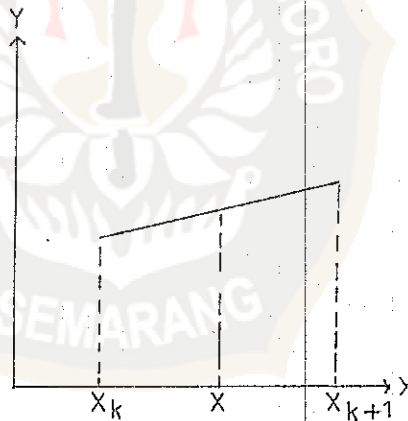
Dengan demikian akar dinyatakan sebagai -0.764 , dengan kemungkinan kesalahan satu angka dalam tempat terakhir.



2.2.5. KESALAHAN PADA INTERPOLASI DAN EKSTRAPOLASI

Interpolasi :

Misalnya diberikan x , sehingga $x_k < x < x_{k+1}$, dan ingin mencari harga y untuk x , untuk itu digambarkan garis yang menghubungkan titik (x_k, y_k) dan (x_{k+1}, y_{k+1}) , kemudian akan diperoleh titik pada garis tersebut pada jarak x dari sumbu y . Interpolasi ini dinamakan Interpolasi Linier. Hal ini dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Persamaan garis yang melalui (x_k, y_k) dan (x_{k+1}, y_{k+1}) adalah :

$$y = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} (y_{k+1} - y_k)$$

- Kesalahan pemendekan pada interpolasi linier ini ialah :

$$E_t = f(x) - y_k - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} (y_{k+1} - y_k)$$

dimana : $f(x)$ adalah harga yang sebenarnya

- Kesalahan Pembulatan pada interpolasi linier

$$F(x) = \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_k)(x - x_{k+1})$$

Ekstrapolasi :

- Digunakan untuk penaksiran harga fungsi $f(x)$ untuk x dimana x berada diantara kisaran harga tabel $f(x)$; yaitu dapat dikatakan bahwa disyaratkan $x_k < x < x_{k+1}$ untuk suatu harga k dimana harga $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)$ diberikan. Apabila $x < x_1$ atau $x > x_m$, maka kita lihat pada interpolasi linier. Jika $x < x_1$ maka dapat digunakan $k = 1$, yaitu :

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (y_2 - y_1)$$

dan apabila $x > x_m$ maka diambil $k = m - 1$ atau

$$y = y_{m-1} + \frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} (y_m - y_{m-1})$$

karena harga x berada diluar kisaran $x_1 < x < x_n$ maka disebut proses ini ekstrapolasi dan jika x berada dalam kisaran dinamakan intrapolasi

- Kesalahan pembulatan untuk $x < x_1$ adalah :

$$E_t = \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_1)(x - x_2)$$

dimana $x < \xi < x_2$

Contoh : 1

Diketahui $y = x^2$

$$x_k = 6 \quad y_k = 36$$

$$x_{k+1} = 7 \quad y_{k+1} = 49$$

$$x = 6.5$$

$$y = 36 + 0.5/1 (49 - 36) = 42.5$$

Kesalahan pemendekan :

$$E_t = f(x) - y_k - (x-x_k)/(x_{k+1}-x_k) * (y_{k+1}-y_k)$$

$$= 42.5 - 42.5 = -0.25$$

Contoh : 2

Diketahui $\log 1.500$ dan 1.600 dan digunakan interpolasi linear untuk menghitung $\log 1.530$ dengan menggunakan arithmetic floating point 4 digit.

$$x_k = 0.1500 * 10^1 \quad y_k = 0.1761 * 10^0$$

$$x_{k+1} = 0.1600 * 10^1 \quad y_{k+1} = 0.2041 * 10^0$$

$$x = 0.1530 * 10^1$$

Sehingga :

$$x-x_k = 0.3000 * 10^{-1} \quad x_{k+1}-x_k = 0.1000 * 10^0$$

$$(x-x_k)/(x_{k+1}-x_k) = 0.3000 * 10^{-1}$$

$$y_{k+1}-y_k = 0.2000 * 10^{-1}$$

$$y = 0.1845 * 10^0$$

Hasil yang benar :

$$y = 0.1847 * 10^0$$

Sehingga kesalahan pemendekan :

$$E_t = 0.2000 * 10^{-3}$$

2.2.6. Fungsi Transedental

Fungsi Transedental adalah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bagian dari R yang bukan fungsi Aljabar. Dimana fungsi Aljabar itu sendiri mempunyai definisi : suatu fungsi yang diperoleh melalui sejumlah berhingga operasi Aljabar pada fungsi konstan dan fungsi kesatuan.

Sebagai contoh fungsi Transedental :

$$* y = \sin x$$

$$* y = a^x$$

2.2.7. Kesalahan

Dalam Suatu hasil numerik, analisa kesalahan merupakan dasar perhitungan yang baik.

Terdapat 2 kesalahan :

1. Kesalahan Absolut : yaitu selisih antara nilai sebenarnya (dengan anggapan telah diketahui) dengan suatu pendekatan pada nilai sebenarnya.

$$\text{Ditulis : } x = \bar{x} + e_x$$

dengan x : nilai sebenarnya

\bar{x} : nilai pendekatan

e_x : kesalahan

disini e adalah kesalahan Absolut.

2. Kesalahan Relatif

adalah kesalahan absolut dibagi dengan nilai pendekatan.

Terdapat 3 kesalahan dasar dalam suatu

perhitungan numerik yaitu :

1. Kesalahan Bawaan (inheren)

adalah kesalahan dalam hal nilai data yang di

sebabkan, kekeliruan atau oleh perlunya pen -

ditentukan dengan banyaknya angka yang tersedia.

2. Kesalahan Pemotongan

yaitu kesalahan yang disebabkan pemotongan suatu proses iteratif yang tak berhingga.

3. Kesalahan Penjumlahan

Contoh : 1

$$f(x) = \log x$$

$$f'(x) = -1/x^2$$

$$E_t = -1/2 (x - x_k) (x - x_{k+1})$$

$$\text{dimana } x_k \quad x_{k+1}$$

Contoh : 2

$$\sin(x/2) = 1/3! (x/2)^3 + 1/5! (x/2)^5 - \dots$$

$$\sin(x/2) = (ax+bx^3) / (1+cx^2)$$

$$(1+cx^2)(x/2) - ((x/2)^3 1/3! x^3 + (x/2)^5 1/5! x^5 - (x/2)^7 1/7! x^7) = ax + bx^3$$

$$a = 1/2$$

$$c/2 - (x/2)^3 1/3! = b$$

$$-c(x/2)^3 1/3! - (x/2)^5 1/5! = 0$$

$$c = 1/20 (x/2)^2$$

$$b = 7/60 (x/2)^3$$

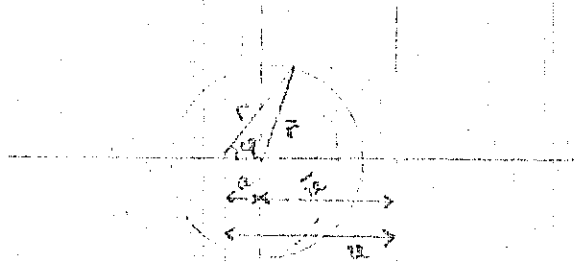
$$c = 1/20$$

$$E_t = ((x/2)^7 1/7! x^7) / (1 + 1/20 (x/2)^2 x^2)$$

2.3. METODE BRODETSKY AND SMEAL

Metode ini merupakan modifikasi dari metode Graffe. Pada metode Brodetsky - Smeal ini akar - akar real dapat diperoleh dengan tepat, juga untuk akar - akar kompleks dapat diperoleh secara langsung. Metode ini merupakan gagasan dari Runge, menurutnya akar - akar kompleks dapat ditentukan dengan menggunakan aplikasi dari metode Graffe yang kedua yaitu metode Graffe yang digunakan untuk menentukan akar - akar kompleks, dengan cara memindahkan koordinat asal ke koordinat $x = \bar{x} + a$. Untuk $x = r e^{i\varphi}$ yang diperoleh dari perhitungan metode Graffe yang kedua dengan jarak r dan \bar{r} pada umumnya berbeda. Akar - akar kompleks itu ditentukan oleh titik potong 2 lingkaran yang berpusat O dan \bar{O} dan jari - jari r dan \bar{r} dengan sudut φ yang dihitung dengan rumus cosin untuk segitiga sembarang.

$$\bar{r}^2 = r^2 + a^2 - 2 a r \cos \varphi \quad (1)$$



Prosedur ini menimbulkan kesulitan untuk akar - akar kompleks dimana lingkaran - lingkaran tersebut berpotongan di banyak titik, sebab posisi dari titik potong menentukan akar secara umum. Hal ini dapat

dihindari dengan membuat jarak α antara 0 dan $\bar{0}$ yang cukup kecil. Brodetsky dan Smeal merubah jarak α dengan α yang sangat kecil, sedemikian hingga :

$$x = \bar{x} + \alpha \dots \dots \dots (2)$$

Dengan pengertian bahwa α^2 dan α^3 semua pangkat tinggi dari α diabaikan karena sangat kecil jika dibandingkan dengan α . Dari persamaan (1) didapatkan :

$$r^2 = r^2 - 2\alpha r \cos \varphi \dots \dots \dots (3)$$

untuk polynomial $f(x)$ dan dengan mengabaikan pangkat tinggi dari α serta menggunakan ekspansi Taylor diperoleh:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \alpha f'(\bar{x}) \dots \dots \dots (4)$$

dimana:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \\ f'(x) &= b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n \end{aligned} \dots \dots \dots (5)$$

persamaan (5) dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(x) = a_0 \bar{x}^n + (a_1 + \alpha b_1) \bar{x}^{n-1} + (a_2 + \alpha b_2) \bar{x}^{n-2} + \dots + (a_n + \alpha b_n)$$

dimana b_v adalah koefisien dari polynomial $f'(x)$

$$b_1 = n a_0$$

$$b_2 = (n-1) a_1$$

$$b_3 = (n-2) a_2$$

.....

$$b_n = a_{n-1}$$

..... (7)

persamaan (6) dibawa keproses Graffe dan dengan meniadakan pangkat tinggi dari α maka dengan mengkwadratkan a_v dan mengalikan dengan 2 didapat :

$$a_v^2 = (a_v + \alpha b_v)^2 = a_v^2 + 2\alpha a_v b_v$$

$$2a_{v-e} a_{v+e} = 2(a_{v-e} + \alpha b_{v-e})(a_{v+e} + \alpha b_{v+e})$$

$$= 2a_{v-e} a_{v+e} + 2\alpha(a_{v-e} b_{v+e} + a_{v+e} b_{v-e})$$

koefisien-koefisien baru a_v' yang tergantung dari α ditentukan dengan cara yang sama dengan menggunakan metode Graffe biasa. koefisien-koefisien tambahan b_v' dengan faktor 2 dapat dihitung secara lengkap dengan cara yang sama.

Susunan secara lengkap metode Brodetsky - Sméal terdapat dalam tabel berikut :

a_0	a_1	a_2	a_3	$a_4 \dots \dots$
0	b_1	b_2	b_3	$b_4 \dots \dots \alpha$
a_0^2	a_1^2	a_2^2	a_3^2	$a_4^2 \dots \dots$
	$-2a_0 a_2$	$-2a_1 a_3$	$-2a_2 a_4$	$-2a_3 a_5 \dots$
		$2a_0 a_4$	$2a_1 a_5$	$2a_2 a_6 \dots$

	$a_1 b_1$	$a_2 b_2$	$a_3 b_3$	$a_4 b_4 \dots$
	$-2a_0 b_2$	$-2a_1 a_3$	$-2a_2 a_4$	$-2a_3 a_5 \dots$
		$2a_0 a_4$	$2a_1 a_5$	$2a_2 a_6 \dots$
	a_1'	a_2'	a_3'	$a_4' \dots$
	b_1'	b_2'	b_3'	$b_4' \dots 2\alpha$
	a_1''	a_2''	a_3''	$a_4'' \dots$
	b_1''	b_2''	b_3''	$b_4'' \dots 4\alpha$
A_0	A_1	A_2	A_3	$A_4 \dots$
B_0	B_1	B_2	B_3	$B_4 \dots m\alpha$

Koefisien a_n' dicari dengan menggunakan metode Grafe yaitu dengan menganggap bahwa polynomial - polynomial konjugate complex adalah :

$$f(ix) = a_0 (ix - x_1) (ix - x_2) \dots (ix - x_n)$$

$$f(-ix) = a_0 (-ix - x_1) (-ix - x_2) \dots (-ix - x_n)$$

yang hasil kalinya adalah :

$$f(x^2) = f(ix) f(-ix) = a_0^2 (x^2 + x_1^2) (x^2 + x_2^2) \dots (x^2 + x_n^2)$$

Pada polynomial yang baru ini x_i^2 bernilai 0

dimana x_1 juga berharga 0 pada polynomial umum $f(x)$.

Polynomial polynomial $f(ix)$ dan $f(-ix)$ ialah :

$$f(ix) = i^n (a_0 x^n - i a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} + i a_3 x^{n-3} + a_4 x^{n-4} \dots \dots \dots)$$

$$f(-ix) = (-i)^n (a_0 x^n + i a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - i a_3 x^{n-3} + a_4 x^{n-4} + \dots \dots \dots)$$

Jadi polynomial yang baru adalah :

$$\begin{aligned} f_1(x^2) &= a_0^2 x^{2n} + a_1^2 x^{2n-2} + a_2^2 x^{2n-4} + a_3^2 x^{2n-6} + \dots - 2a_0 a_2 x^{2n-2} - \\ & 2a_1 a_3 x^{2n-4} - 2a_2 a_4 x^{2n-6} - \dots + 2a_0 a_4 x^{2n-4} + 2a_1 a_5 x^{2n-6} + \dots \\ & - 2a_0 a_6 x^{2n-6} \dots \dots \dots \\ &= a_0' x^{2n} + a_1' x^{2n-2} + a_2' x^{2n-4} + a_3' x^{2n-6} + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

koefisien - koefisien baru a_v' , b_v' dan koefisien - koefisien a_v'' dan b_v'' dapat dihitung dengan prosedur yang sama. b_v'' dengan faktor 4, b_v' pada langkah ke 3 dengan faktor 8 dan seterusnya. Nilai akhir pada langkah ke K adalah $f_k(x)$ yaitu $a_v(k) = A_v$, $b_v(k) = B_v$ dengan factor m dimana $m = 2^k$.

Perhitungan keseluruhan terdiri dari perhitungan Graffe biasa untuk menghitung A_v dan perhitungan tambahan untuk menghitung B_v . Hasil perhitungannya adalah polynomial $f_k(x)$ dengan variabel lama x dan variabel baru x :

$$f_k(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

$$= A_0 x^m + (A_1 + m\alpha B_1) x^{m-1} + (A_2 + m\alpha B_2) x^{m-2} + \dots + A_n + m\alpha B_n \quad (8)$$

dengan $x = x^m$, $\bar{x} = x^m$

Perhitungan $b_v(k)$ yang lainnya dapat menggunakan metode Graffe biasa. Evaluasi dari skema metode Graffe mengikuti cara yang sama seperti sebelumnya. Untuk maksud ini pertama-tama dianggap x_1 sebagai akar real. Disini nampak metode Graffe biasa dalam bentuk :

$$x_1^m = \frac{A_{v+1}}{A_v} \quad (9)$$

Hubungan ini jika dinyatakan dengan koordinat baru didapat :

$$\bar{x}_1^m = \frac{A_{v+1} + m\alpha B_{v+1}}{A_v + m\alpha B_v} = \frac{A_{v+1}}{A_v} \frac{1 + m\alpha Q_{v+1}}{1 + m\alpha Q_v} \quad (10)$$

dimana :

$$Q_v = \frac{B_v}{A_v} \quad (11)$$

Dengan mengabaikan pangkat tinggi dari α , maka dari persamaan (8) dan persamaan (7) :

$$\bar{x}_1^m = x_1^m (1 + m\alpha \Delta Q_v) \quad (12)$$

dimana :

$$\Delta Q_v = Q_{v+1} - Q_v \dots\dots\dots (13)$$

Dalam bentuk yang lain dan dengan menggunakan persamaan (2) didapat :

$$\bar{x} = x - \alpha$$

$$\bar{x}^2 = x^2 - 2\alpha x$$

$$\bar{x}^4 = x^4 - 4\alpha x^3$$

$$\bar{x}^m = x^m - m\alpha x^{m-1}$$

$$= x^m \left(1 - \frac{m\alpha}{x}\right)$$

..... (14)

Dengan membandingkan persamaan (2) dan (4) diperoleh akar real :

$$x_1 = \frac{-1}{4Q_v}$$

..... (15)

Dalam hal ini akar - akar kompleks konjugate $re^{i\varphi}$ adalah sederhana.

Jika tidak ada akar - akar real lain yang besarnya sama, hasil dari Metode Graeffe biasa, besarnya dinyatakan dengan bentuk :

$$x^{2m} = \frac{A_{v+1}}{A_v}, \quad r^2 = \sqrt{\frac{A_{v+2}}{A_v}} = D$$

..... (16)

Hubungan ini dengan koordinat baru adalah sbagai berikut :

$$r^{-2m} = \frac{A_{v+2} + m \angle B_{v+2}}{A_v + m \angle B_v} = \frac{A_{v+2}}{A_v} \frac{1 + m \angle Q_{v+2}}{1 + m \angle Q_v} \dots (17)$$

$$r^{-2m} = r^{2m} (1 + m \angle \Delta_2 Q_v) \dots (18)$$

dimana :

$$\Delta_2 Q_v = Q_{v+2} - Q_v$$

Dengan menggunakan persamaan (3), maka persamaan (17) dalam bentuk lain adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} r^{2m} &= r^{2m} - 2m \angle r^{2m-1} \cos \varphi \\ &= r^{2m} \left(1 - m \angle \frac{2r \cos \varphi}{r^2} \right) \dots (19) \end{aligned}$$

Dengan membandingkan persamaan (17) dan persamaan (19) didapat :

$$-2r \cos \varphi = \Delta_2 Q_v r^2$$

atau menggunakan notasi :

$$\begin{aligned} -2r \cos \varphi &= s \\ r^2 &= p \end{aligned} \dots (20)$$

didapat :

$$s = \Delta_2 Q_v p \dots (21)$$

Jadi dari persamaan (16) dan persamaan (21) didapat persamaan kwadrat :

$$x^2 + sx + p = 0 \dots (22)$$

solusi dari persamaan (22) diberikan oleh akar-akar kompleks konjugate dalam bentuk $x = u + iv$. Dalam hal akar real yang kembar $x_{1,2} = x^2 = \pm r$ dipakai kategori dibawah ini dengan $s = \pm 2r$.

Dan sebaliknya terdapat 2 hal yang umum :

$x_{1,2} = \pm r$. berlawanan tetapi merupakan akar-akar yang sama.

$x_{1,2} = \pm ir$. sebasanng akar imajiner yang tidak dapat dibedakan dengan metode ini.

Kemudian faktor kwadrat $(x^2 - r^2)$ dan $(x^2 + r^2)$ keduanya diubah dalam bentuk $(x^4 - r^4)$ dengan menggunakan langkah Graffe yang sesuai.

Hasil perhitungan keduanya pada saat $s = 0$ dan dengan menuntanti persamaan umum, maka harus dapat dinyatakan dengan dua hal yang mungkin timbul.

Pada kejadian yang lebih lanjut dari 3 dan 4 akar yang besarnya sama dengan 2 dan 3 koefisien tak tentu nampak berturut - turut. Dengan notasi :

$$\Delta_k Q = Q_{v+k} = Q_v \quad k = 3, 4, \dots \quad (23)$$

Hasil evaluasinya adalah sebagai berikut :

$$1. x_{1,2} = r e^{\pm i\theta}$$

$$x_3 = +r$$

dimana :

$$r^R = R \quad , \quad r^M = R \quad \text{dan menggunakan :}$$

$$\bar{r}_{1,2}^2 = r^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{r} \cos \theta \right)$$

$$\bar{r}_3 = r \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right)$$

diperoleh :

$$R_{1,2}^2 = R_2 \left(1 - \frac{2m}{r} \cos \varphi \right) r$$

$$R_3 = R \left(1 + \frac{m}{r} \right)$$

Dari sini maka :

$$X_1 X_2 X_3 = R_3 = A_{v+3} : A_v$$

$$\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 = R_3 \left(1 - \frac{m \alpha}{r} (2 \cos \varphi + 1) \right)$$

$$= \frac{A_{v+3}}{A_v} (1 + m \alpha \Delta_3 Q)$$

Dengan membandingkan 2 pernyataan terakhir dan

$-2 \cos \varphi = s$, $r^2 = p$, maka :

$$s = p \Delta_3 Q_v + r$$

..... (24)

dimana :

$$p = r^2, \quad r^{3m} = A_{v+3} : A_v$$

..... (25)

$$2 \cdot x_{1,2} = re^{+i\varphi_1}$$

$$x_{3,4} = re^{+i\varphi_2}$$

Dengan cara yang sama diperoleh suatu hubungan

penjumlahan \mathcal{T} dari s_1 dan s_2 yaitu :

$$\mathcal{T} = s_1 + s_2 = p \Delta_4 Q_v$$

..... (26)

dimana :

$$p = r^2 = \frac{2m}{V} A_{v+4} : A_v$$

..... (27)

Jarak masing - masing s_1 ini berkisar antara $-2r$ dan $2r$. dimana $s_1 + s_2 = \sigma$ telah diketahui, karena belum dapat menghitung s_1 dan s_2 maka dapat didekati dengan cara sebagai berikut :

$$a. \text{ Untuk } \sigma > 0, \quad s_1 = \sigma/2 \dots\dots 2r$$

$$b. \text{ Untuk } \sigma < 0, \quad s_1 = -2r \dots\dots \sigma/r$$

Beberapa perhitungan yang menggunakan skema Horner umum dengan harga percobaan s dari hasil yang diberikan maka akan didapatkan harga s yang lebih kecil.

Ketelitian dari hasilnya disini adalah penting, karena merupakan sifat yang istimewa dari Metode Graffe. Dalam Metode Brodetsky - Smeal ini keuntungannya adalah dapat menghilangkan kesalahan yang ada. Yang pasti dalam menggunakan metode ini dibutuhkan konsentrasi kerja yang tinggi dan ketelitian dalam setiap perhitungan.

CONTOH PERHITUNGAN DENGAN METODE BRODETSKY - SMEAL

Menentukan akar dari persamaan polinomial derajat 5

$$x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 8x + 8 = (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 4x + 2)(x + 1) = 0$$

x^5	x^4	x^3	x^2	x	1
-------	-------	-------	-------	-----	---

	0	5	8	15	8	8
	1	4	2.5 ¹	1.6 ¹	6.4	6.4
		-10	-1.6	-8.0	-6.4	
			1.6	3.2		
	0	10	4.0	6.0	6.4	6.4
		-8	-5.0	-10.4	-15.2	
			0.8	5.6		
2	1	6	2.5 ¹	-3.2 ¹	0	6.4 ¹
	0	2	0.2	1.2	0.8 ¹	6.4
	1	3.6 ¹	6.25 ²	10.24 ²	0	4.096 ³
		-5.0	-3.84	0	4.096 ³	
	0	-1.2	-0.50	-3.84	0	4.096
		0.2	1.36	22.00	1.280	
			-0.88	-2.56		
4	1	-1.4 ¹	2.41 ²	2.56 ²	4.096 ³	4.096 ³
		-1.0	-0.02	15.60	1.280	4.096
	1	1.96 ²	5.800 ⁴	-6.554 ⁴	1.6777 ⁷	1.6777 ⁷
		-4.82	0.717	-197.427	-0.2097	
			0.619	-30.029		
		1.40	0.048	39.936	0.5243	1.6777
		0.02	2.440	-30.029	-0.7438	

			0.128	-0.930		
8	1	-2.86 ²	7.344 ⁴	-2.0234 ⁶	1.4689 ⁷	1.6777 ⁷
	0	1.42	2.520	0.0008	-2.2195	
	1	8.100 ⁴	5.393 ⁹	4.094 ¹²	2.1550 ¹⁴	2.8147 ¹⁴
		-14.588	-1.157	-2.150	0.6790	
			0.029	-0.010		
	0	-4.061	1.8507	-0.0016	-0.3222	2.8147
		-2.520	0.2875	-0.2087	0.3393	
			0.0022	-0.0024		
16	1	-6.508 ⁴	4.265	1.928 ¹²	2.834 ¹⁴	2.8147 ¹⁴
	0	-6.581	2.136	-0.2127	0.0171	2.8147
	1	4.235 ⁹	1.8190 ¹⁹	3.717 ²⁴	8.032 ²⁸	7.923 ²⁸
		-8.530	0.0025	-2.417	-0.109	
	0	4.283	0.9110	-0.4101	0.0485	7.923
		-2.136	0.0113	-0.6126	-0.0483	
32	1	-	1.844 ¹⁹	-	7.923 ²⁸	7.923 ²⁸
	0	-	0.9223	-	0	7.923
Q	0	-	0.500	-	0	1.000
17A	0	-	19.265	-	28.899	28.899
Q		0.500		-0.500	1.000	

17A	19.266	9.633	0
:32	0.6020	0.3010	0
---	---	---	---
17C	4.000	2.000	1.000
17D	2.000	-1.000	-1.000

2.4 METODE LIN - BAIRSTOW

Metode ini dapat digunakan untuk menentukan akar - akar real maupun akar - akar kompleks dari persamaan polinomial $P_n(x) = 0$, dimana

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad \dots \dots \dots (13. a)$$

Pada metode Lin Bairstow ini meliputi menemukan suatu faktor kwadratik

$$x^2 + rx + s \quad \dots \dots \dots (13. b)$$

dari polinomial dengan proses iterasi Newton Rhanon. Proses iterasi disini hanyalah membantu metode Lin Bairstow untuk mendapatkan akar pendekatan dengan menentukan akar percobaan terlebih dahulu.

Apabila harga pendekatannya telah mendekati hasil yang sebenarnya maka proses akan dihentikan seperti pada metode sebelumnya.

2.4.1. PROSES PEMBAGIAN SINTETIK OLEH FAKTOR KWADRATIK

Jika polinomial $P_n(x)$ dibagi dengan faktor percobaan $x^2 + rx + s$ dan diperoleh hasil bagi suatu polinomial berderajat $n-2$ dan suatu sisa $Rx + S$, dimana r, s, R dan S bilangan Real, maka persamaan tersebut dapat ditulis :

$$\sum a_k x^{n-k} = (x^2 + rx + s) * \sum b_k x^{n-k-2} + Rx + S \quad \dots \dots \dots (14)$$

Dengan menyamakan kedua ruasnya diperoleh :

$$\begin{array}{ll} a_0 = b_0 & b_0 = a_0 \\ a_1 = b_1 + rb_0 & b_1 = a_1 - rb_0 \\ a_2 = b_2 + rb_1 + sb_0 & b_2 = a_2 - rb_1 - sb_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a_k = & b_k = \\ b_k + rb_{k-1} + sb_{k-2} & a_k - rb_{k-1} - sb_{k-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a_{n-1} = & b_{n-1} = \\ R + rb_{n-2} + sb_{n-2} & a_{n-1} - rb_{n-2} - sb_{n-2} \end{array}$$

$$a_n = S + sb_{n-2} \quad b_n = a_n - rb_{n-1} - sb_{n-2}$$

(15.a)

(15.b)

Jika digunakan rumus Pengulangan maka persamaan (15.a) bisa ditulis dalam bentuk :

$$b_k = a_k - rb_{k-1} - sb_{k-2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (16)$$

dengan catatan :

$$b_i = 0 \text{ untuk } i = -1, -2, \dots$$

Persamaan (14) dapat diperluas dalam

bentuk :

$$\begin{aligned}
& a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x \\
& + a_n \\
& = (x^2 + rx + s) * (b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \\
& \quad b_2x^{n-4} + \dots + b_{n-3}x + b_{n-2}) + Rx + S \\
& \dots\dots\dots(17)
\end{aligned}$$

Dapat dilihat dari persamaan (17), perubahan r atau s akan menyebabkan perubahan dalam koefisien b_k dari polinomial hasil bagi $f_{n-2}(x)$ dan koefisien R dan S dari sisa.

Oleh karena itu r dan s dapat dianggap sebagai perubah bebas, sehingga b_k , R dan S dapat dinyatakan sebagai fungsi dari perubah tersebut, yang berupa $b_k(r,s)$, $R(r,s)$, dan $S(r,s)$. Maka r dan s dapat dicari dengan :

$$\begin{aligned}
R(r,s) &= 0 & S(r,s) &= 0 \\
&\dots\dots\dots(18)
\end{aligned}$$

menggunakan proses Iterasi Newton Raphson.

Dengan ditemukannya harga-harga r dan s maka faktor kwadratik dari polinomial $f_n(x)$ dapat dihitung. Untuk menentukan r dan s diambil harga pendekatan r_0 dan s_0 yang dekat dengan harga-harga tersebut. Maka r_0 dan s_0 perlu dikoreksi sampai memenuhi syarat (18) dengan menggunakan koreksi differensial dr dan ds. Nilai ini dapat diperoleh dari pendekatan orde pertama dari differensial total dR dan dS.

$$\begin{aligned}
dR &= R_r dr + R_s ds \\
dS &= S_r dr + S_s ds
\end{aligned}$$

..... (19)

Yaitu dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk fungsi-fungsi dari 2 variabel dan mengabaikan pangkat lebih tinggi dari satu, karena dianggap $(r - r_0)$ dan $(s - s_0)$ kecil, diperoleh :

$$R(r,s) = R(r_0, s_0) + \partial R / \partial r (r - r_0) + \partial R / \partial s (s - s_0)$$

$$S(r,s) = S(r_0, s_0) + \partial S / \partial r (r - r_0) + \partial S / \partial s (s - s_0)$$

..... (20a)

$$R(r,s) = R(r_0, s_0) + R_r dr + R_s ds$$

$$S(r,s) = S(r_0, s_0) + S_r dr + S_s ds$$

..... (20b)

$$R(r,s) = R(r_0 + dr, s_0 + ds)$$

$$S(r,s) = S(r_0 + dr, s_0 + ds)$$

..... (21)

Dari persamaan (18) dan (19) maka persamaan (20b) menjadi :

$$R_r dr + R_s ds = -R(r_0, s_0)$$

$$S_r dr + S_s ds = -S(r_0, s_0)$$

..... (22)

Pendekatan orde pertama yaitu hasil dari koreksi pertama dari fungsi-fungsi $R(r,s)$ dan $S(r,s)$ adalah $r_1 = r_0 + dr$ dan $s_1 = s_0 + ds$. Setelah didapatkan harga r_1 dan s_1 dicari pendekatan berikutnya yaitu $r_2 = r_1 + dr$ dan $s_2 = s_1 + ds$. Dengan cara yang sama dicari pendekatan selanjutnya yang lebih mendekati hasilnya atau memenuhi persamaan (18) maka dikatakan iterasinya konvergen.

Jika diambil harga Q , yaitu bilangan

positif yang sangat kecil dan harga dari :

$$|r_{k+1} - r_k| \leq \varphi$$

$$|s_{k+1} - s_k| \leq \varphi$$

..... (23)

maka iterasinya dihentikan karena sudah didapatkan pendekatan dari:

$$R(r_{k+1}, s_{k+1}) = 0$$

$$S(r_{k+1}, s_{k+1}) = 0$$

..... (24)

Jadi r dan s yang dicari sudah didapat maka faktor dari polinomial $P_n(x)$ adalah : $x^2 + r^*x + s^*$

dimana :

$$r^* = r_{k+1} \quad \text{dan} \quad s^* = s_{k+1}$$

maka persamaan (14) menjadi :

$$P_n(x) = (x^2 + r^*x + s^*)(b_0^*x^{n-2} + b_1^*x^{n-3} + b_2^*x^{n-4} + \dots + b_{n-3}^*x + b_{n-2}^*)$$

$$P_n(x) = P_2(x) * P_{n-2}(x)$$

..... (25)

dimana $P_{n-2}(x)$ adalah polinomial berderajat $n-2$ yang akan dicari faktor kwadratnya pada tahap berikutnya.

Selanjutnya menentukan 4 derivatif parsial pada persamaan (20b) yaitu R_r, R_s, S_r, S_s , dengan cara menurunkan persamaan (16), didapat :

$$\frac{\partial b_k}{\partial r} = -b_{k-1} - \frac{r \partial b_{k-1}}{\partial r} - \frac{s \partial b_{k-2}}{\partial r}$$

$$\frac{\partial b_k}{\partial s} = -b_{k-2} - \frac{r \partial b_{k-1}}{\partial s} - \frac{s \partial b_{k-2}}{\partial s}$$

..... (26)

Pada persamaan (15a) karena $a_0 = b_0$ adalah bukan fungsi dari r dan s , maka dari persamaan (26) didapat :

$$\begin{aligned} \partial b_0 / \partial s &= 0 \\ \partial b_0 / \partial r &= 0 & \partial b_1 / \partial s &= 0 \\ \partial b_1 / \partial r &= -b_0 & \partial b_2 / \partial s &= -b_0 - r \partial b_1 / \partial s = -b_0 \\ \partial b_2 / \partial r &= & \partial b_3 / \partial s &= \\ & -b_1 - r \partial b_1 / \partial r & -b_1 - r \partial b_2 / \partial s - s \partial b_1 / \partial s & \\ & = -b_1 + r b_0 & = -b_1 + r b_0 & \end{aligned}$$

untuk $k = 0, 1, \dots, n$

$$\dots \dots \dots (27)$$

$$\partial b_k / \partial r = \partial b_{k+1} / \partial s \dots \dots \dots (28)$$

Dengan membandingkan persamaan (15a) dan (15.b) dipenuhi :

$$\begin{aligned} R &= b_{n-1} \\ S &= b_n + r b_{n-1} \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots (29)$$

maka :

$$\begin{aligned} R_r &= \partial b_{n-1} / \partial r & R_s &= \partial b_{n-1} / \partial s \\ S_r &= \partial b_n / \partial r + r \partial b_{n-1} / \partial r + b_{n-1} & S_s &= \partial b_n / \partial s + r \partial b_{n-1} / \partial s \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots (30)$$

Untuk memudahkan maka notasi turunan parsial pada persamaan (27) ditulis :

$$\partial b_k / \partial r = c_k \quad \text{dan} \quad \partial b_k / \partial s = d_k$$

untuk $k = 1, 2, \dots, n$

$$\dots \dots \dots (31)$$

maka dari persamaan (27) dan diambil $b_0 = 1$.

$$\begin{array}{ll}
 c_1 = -1 & d_1 = \emptyset \\
 c_2 = -b_1 + r & d_2 = -1 \\
 c_3 = -b_2 - rc_2 - sc_1 & d_3 = -b_1 + r \\
 & d_4 = -b_2 - rd_3 - sd_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 c_k = & d_k = \\
 -b_{k-1} - rc_{k-1} - sc_{k-2} & -b_{k-2} - rd_{k-1} - sd_{k-2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 c_{n-1} = & d_{n-1} = \\
 -b_{n-2} - rc_{n-2} - sc_{n-3} & -b_{n-3} - rd_{n-2} - sd_{n-3} \\
 c_n = & d_n = \\
 -b_{n-1} - rc_{n-1} - sc_{n-2} & -b_{n-2} - rd_{n-1} - sd_{n-2}
 \end{array}$$

$$d_{n+1} = c_n \dots \dots \dots (32)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (31) ke persamaan (30) didapat :

$$\begin{array}{ll}
 Rr = c_{n-1} & Sr = c_n + rc_{n-1} + b_{n-1} \\
 Rs = d_{n-1} & Ss = d_n + rd_{n-1}
 \end{array}
 \dots \dots \dots (33)$$

Jika persamaan (33) disubstitusikan ke persamaan (22) maka didapatkan suatu persamaan yang disebut " Persamaan Koreksi Differensial " yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & d_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ -b_n - rb_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan hubungan yang didapat pada

persamaan (32) yaitu dari $d_{n+1} = c_n$ maka persamaan tersebut menjadi :

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n + rc_{n-1} + b_{n-1} & c_{n-1} + rc_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{n-1} \\ -b_n - rb_{n-1} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (34)$$

Matriks (34) bisa disederhanakan dengan cara :

$$\begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n + b_{n-1} & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_{n-1} \\ -b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n + b_{n-1} & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{n-1} \\ -b_n \end{bmatrix} \dots \dots \dots (35)$$

Secara ringkas proses dari perhitungan persamaan koreksi differensial :

1	a_1	a_2	\dots	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
	$-r$	$-rb_1$	\dots	$-rb_{n-4}$	$-rb_{n-3}$	$-rb_{n-2}$	$-rb_{n-1}$
+							
1	b_1	b_2	\dots	b_{n-3}	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n
	rc_1	rc_2	\dots	rc_{n-3}	rc_{n-2}	rc_{n-1}	
		sc_1	\dots	sc_{n-4}	sc_{n-3}	sc_{n-2}	
+							
$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	\dots	$-c_{n-2}$	$-c_{n-1}$	$-c_n$	

Apabila hasil dari pendekatan sudah didapat yaitu $x^2 + r^*x + s^*$, maka sekarang tinggal menentukan akar dari faktor-faktor

kwadratik yang sudah dicari yaitu dengan menggunakan rumus persamaan kwadrat :

$$x_{1,2} = \frac{-r^* \pm \sqrt{(r^*)^2 - 45^*}}{2}$$

