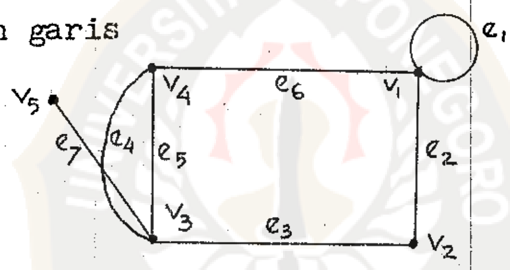
BAB II

KONSEP DASAR

2.1. PENGERTIAN GRAPH.

Suatu graph G=(V,E) terdiri dari himpunan terbatas yang tidak kosong V= $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ dan disebut titik-titik. Himpunan yang lain E= $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m$ yang disebut garis-garis, masing-masing garis e_k ditentukan oleh sepasang titik (v_i, v_j).

Contoh 1 : Gb.1 menunjukkan graph dengan lima titik dan tujuh garis



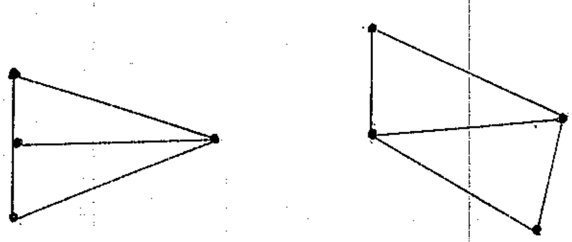
Gb.1

Garis yang ditentukan oleh satu titik (v_i, v_i) disebut dengan gelung(loop) seperti e_1 pada Gb.1. Disamping itu dua titik juga dapat menentukan lebih dari satu garis, garis-garis yang demikian disebut garis-garis paralel. Sebagai contoh e_4 dan e_5 pada Gb.1.

Graph yang tidak mempunyai gelung dan tidak mempunyai garis-garis paralel disebut graph sederhana (simple graph). Perlu dicatat pula bahwa dalam gambar graph bentuk garis (lengkung maupun lurus) dan panjang pendeknya tidak menentukan apakah dua graph sama atau tidak, tetapi yang penting sifat insidennya diantara garis-garis dan titik-titiknya. Selain itu sering kali dalam gambar graph ada beberapa garis yang saling berpotongan tetapi titik potongnya tidak merupakan anggota V, seperti e_7 dan e_4 pada Gb.1

Catatan: Suatu garis $e_k = (v_i, v_j)$ maka e_k dan v_i maupun e_k

Contoh 2: Gb.2a dan 2b adalah dua gambar graph yang berbeda tetapi mewakili graph yang yang sama karena sifat insiden diantara garis dan titik-titiknya sama.



a b

Gb.2

2.2. DERAJAT (DEGREE).

Deffinisi 3.

Dua titik v_i dan v_j disebut bertetangga (adjacent) jika v_i insiden dengan garis e_k demikian juga v_j juga insiden dengan e_k. Sebaliknya dua garis yang tidak paralel dikatakan bertetangga jika keduanya insiden pada titik yang sama

Deffinisi 4.

Derajat titik v_i dalam graph G atau $d(v_i)$ adalah banyaknya garis yang insiden pada v_i dengan gelung dihitung dua kali

Contoh 3: - Dari Gb.1 v_1 dan v_2 bertetangga demikian juga garis e_2 dan e_3, tetapi e_2 dan e_5 tidak bertetangga.

- Pada Gb.1 $d(v_1) = d(v_3) = 4$

  $d(v_5) = 1$, $d(v_2) = 2$

Teorema 1:

Jumlah derajat titik-titik graph G sama dengan dua kali jumlah garisnya (q). $\sum d(v_i) = 2q$

Bukti: Diandaikan graph G dengan q garis dan n titik yaitu $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$. Karena setiap garis insiden pada dua titik maka masing-masing garis menyumbang dua derajat. Sehingga jumlah derajat semua titik dalam

G sama dengan dua kali jumlah garis dalam G, jadi

$$\sum d(v_i) = 2q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Contoh 4: Jumlah derajat graph pada Gb.1 adalah

$$\sum_{i=1}^{5} d(v_i) = d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)+d(v_4)+d(v_5)$$
$$= 4 + 2 + 4 + 3 + 1 = 14$$
$$= \text{dua kali jumlah garis.}$$

Akibat 1.

Dalam graph G jumlah titik berderajat ganjil adalah genap.

Bukti: Pisahkan titik berderajat ganjil dan genap, sehingga ruas kiri dari persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari dua jumlahan yang lain :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{j=\text{genap}} d(v_j) + \sum_{k=\text{ganjil}} d(v_k) \quad \ldots\ldots (2)$$

Karena $\sum d(v_i)$ adalah genap dan $\sum d(v_j)$ juga genap maka $\sum d(v_k)$ juga harus genap

$$\sum_{k=\text{ganjil}} d(v_k) = \text{genap} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

masing-masing $d(v_k)$ pada (3) ganjil,dan jumlahan dari persamaan tersebut genap,dengan demikian banyaknya titik berderajad ganjil adalah genap.

Deffinisi 5.

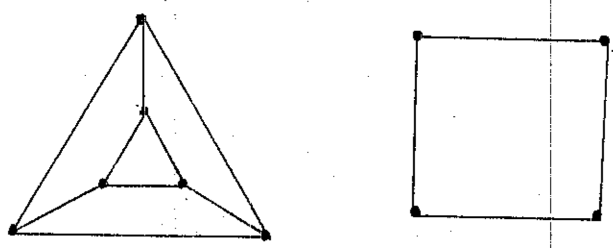
Graph G yang setiap titiknya mempunyai derajat sama disebut graph reguler.

Deffinisi 6.

a. Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir sedangkan titik yang berderajat nol disebut titik terasing.

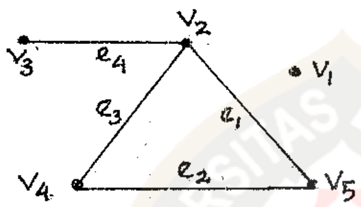
b. dua garis disebut seri jika titik persekutuannya berderajat dua.

Contoh 5: pada Gb.3 diperlihatkan dua graph reguler berderajat tiga dan dua.



Gb.3

Contoh 6:



Gb.4

v_1 titik terasing

v_3 titik akhir

e_1, e_2 garis yang seri

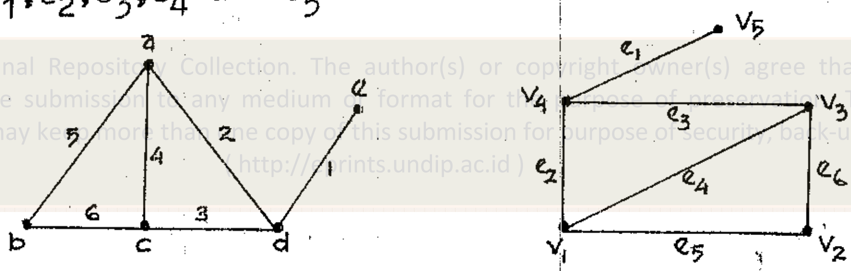
2.3. ISOMORPHISMA.

Deffinisi 7.

Dua graph G dan G' dikatakan isomorphic jika ada korespondensi satu-satu diantara titik-titik dan garis-garis dari G dan G' sedemikian hingga sifat insidennya masih terpelihara.

Yang dimaksud sifat insidennya masih terpelihara adalah apabila garis e insiden pada v_1 dan v_2 dalam G, maka e' dalam G' yang berkorespondensi dengan e harus insiden pada v_1' dan v_2' yang berkorespondensi dengan v_1 dan v_2.

Contoh 7: Korespondensi diantara dua graph yang isomorphic pada Gb.5 sbb. : a,b,c,d dan e berkorespondensi dengan v_1, v_2, v_3, v_4 dan v_5. Sedangkan garis-garis 1,2,3,4 dan 5 berkorespondensi dengan garis-garis e_1, e_2, e_3, e_4 dan e_5.

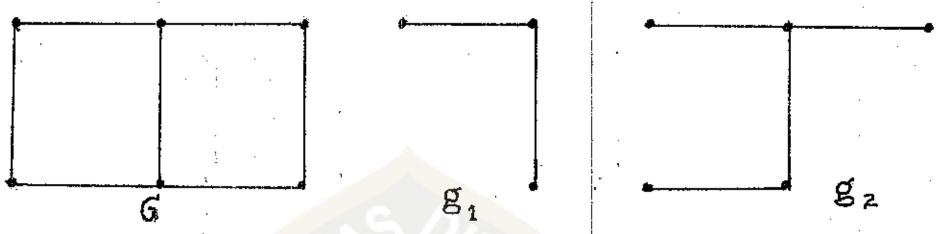


2.4. SUB GRAPH.

Deffinisi 8.

Graph g disebut sub graph dari G jika semua titik dan semua garis dari g merupakan anggota dari G.

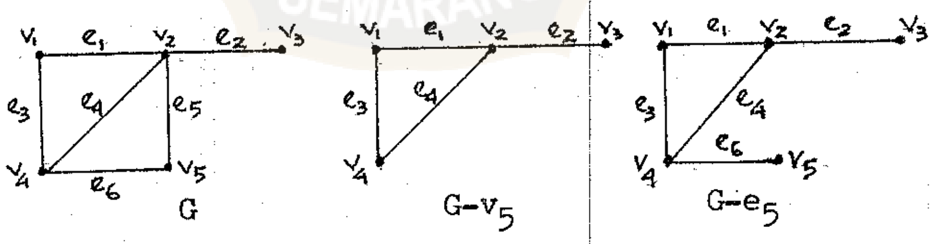
Contoh 8: g_1 dan g_2 pada Gb.6 adalah sub graph dari G.



Gb.6

Penghapusan sebuah titik v_i dari graph G akan menghasilkan sub graph $G-v_i$ yang terdiri dari semua titik dalam G kecuali v_i dan dan semua garis yang tidak insiden pada v_i. Sebaliknya penghapusan sebuah garis e_j dari G menghasilkan sub graph yang terdiri dari semua titik dari G dan semua garis dalam G kecuali e_j.

Contoh 9:



Gb.7

2.5. JALAN (WALK).

Deffinisi 9

a. Jalan adalah deretan bergantian dari titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik.

b. Jalan tertutup adalah jalan yang titik awal dan titik akhirnya sama.

c. Jejak (Trail) adalah jalan yang garis-garisnya berlainan

d. Jalan tapak (Path) adalah jejak yang semua titiknya berlainan kecuali jalan tapak tertutup yang mana titik awalnya sama dengan titik akhir.

e. Sirkuit adalah jalan tapak yang tertutup.

Contoh 9: Dari graph G pada Gb. 7

Jalan : $v_1e_1v_2e_2v_3e_2v_2e_4v_4$ atau $v_1v_2v_3v_2v_4$

Jalan tertutup : $v_1v_4v_5v_2v_1$

Jejak : $v_1e_1v_2e_5v_5e_6v_4$ atau $v_1v_2v_5v_4$

Jalan tapak : $v_2e_4v_4e_6v_5$ atau $v_2v_4v_5$

Sirkuit : $v_1e_1v_2e_4v_4e_3v_1$

2.6. GRAPH TERHUBUNG.

Deffinisi 10

Graph G dikatakan terhubung jika paling sedikit ada satu jalan tapak diantara dua titik dalam G. Jika tidak demikian disebut graph tidak terhubung (disconnected graph).

Contoh 10: Graph G pada Gb.6 dan Gb.7 merupakan graph yang terhubung. Sedangkan Gb.4 graph tidak terhubung karena tidak ada jalan tapak dari titik v_1 ke titik-titik yang lain.

Graph tidak terhubung paling sedikit terdiri dari dua sub graph terhubung,yang masing-masing sub graphnya disebut komponen. Jadi graph terhubung hanya terdiri dari satu komponen.

Teorema 2:

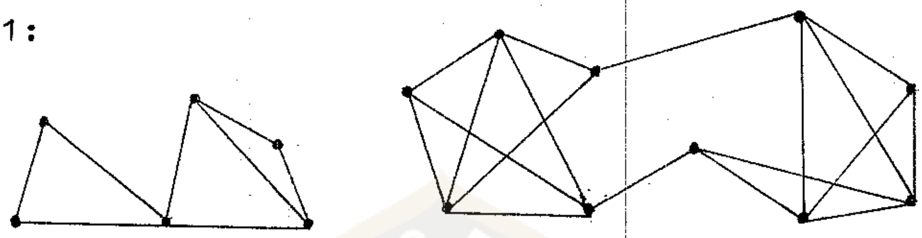
Jika graph G (terhubung maupun tidak) mempunyai tepat dua titik berderajat ganjil,maka harus ada jalan tapak yang menghubungkan dua titik itu.

Bukti: Diambil G graph dengan semua titiknya berderajat genap kecuali $v_1$dan v_2 yang berderajat ganjil. Dari akibat 1 tidak ada graph mempunyai titik berderajat ganjil yang jumlahnya ganjil dengan demikian titik v_1 dan v_2 harus berada pada komponen yang sama,jadi

Deffinisi 11

Graph G disebut terhubung-n (n-connected) jika paling sedikit n titik dari G dihapus dapat menjadikan G tidak terhubung atau menjadikan G lebih dari satu komponen.

Contoh 11:



terhubung-1 terhubung-2

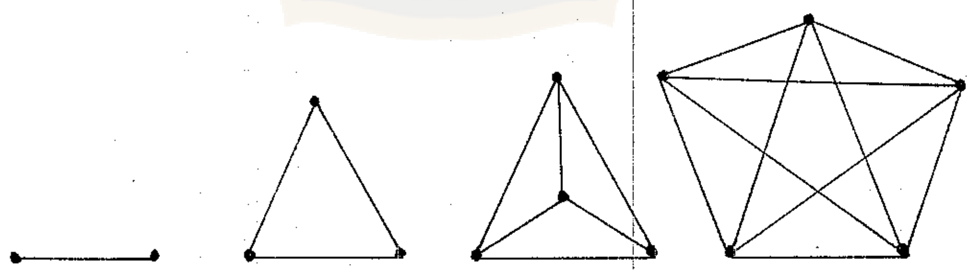
Gb.8

2.7. GRAPH LENGKAP (COMPLETE GRAPH).

Deffinisi 12

Graph lengkap dengan p titik (K_p) adalah graph sederhana yang setiap titiknya bertetangga dengan titik yang lainnya.

Contoh 12: Gb.9 merupakan K_p dengan 2,3,4 dan 5 titik.



Gb.9

Karena setiap titik dalam K_p bertetangga dengan titik yang lainnya maka setiap titiknya berderajat (p-1).

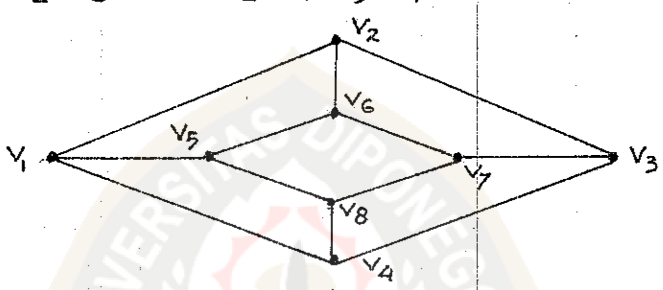
2.8. HIMPUNAN BEBAS (INDEPENDENT SET).

Deffinisi 13

Himpunan bebas H dari graph G adalah himpunan bagian titik-titik anggota G sedemikian hingga tidak ada dua titik dalam H yang bertetangga.

Dari deffinisi 13 ini jelas bahwa setiap titik tunggal dari graph G merupakan himpunan bebas. Sedangkan untuk setiap titik v_i diluar H, himpunan $H \cup v_i$ menjadi tidak bebas maka H disebut himpunan bebas maksimal.

Contoh 13: Graph Gb.10 himpunan-himpunan bebas diantaranya $\{v_1, v_6, v_3\}$ dan $\{v_5, v_7, v_2, v_4\}$ sedangkan $\{v_1, v_5, v_7\}$ himpunan tidak bebas. Untuk himpunan bebas maksimal diantaranya adalah $\{v_2, v_8\}$, $\{v_2, v_4, v_5, v_7\}$.



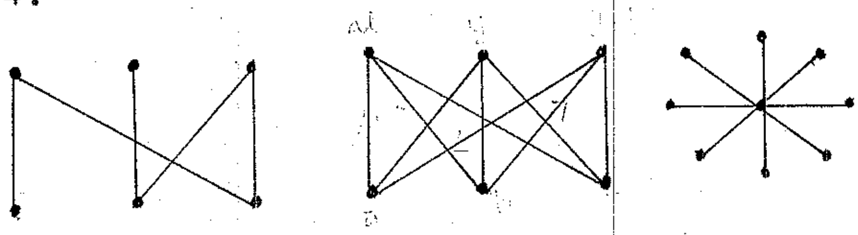
Gb. 10

2.9. GRAPH TERBAGI DUA (BIPARTITE GRAPH).

Deffinisi 14

Graph G disebut terbagi dua apabila himpunan titik titik dari G dapat dipisahkan menjadi dua himpunan bebas V_1 dan V_2 sehingga jika garis $e \in G$ maka e menghubungkan titik di V_1 dan titik di V_2.

Contoh 14:



a b c

Gb. 11

Deffinisi 15

Jika setiap titik di V_1 bertetangga dengan setiap titik di V_2 maka disebut graph terbagi dua lengkap.

Gb.11.b merupaka graph terbagi dua lengkap dan dinotasikan sebagai $K_{m,n}$ dengan m banyaknya titik V_1 dan n banyaknya titik V_2. Kejadian khusus dari $K_{m,n}$ adalah jika m=1 yaitu $K_{1,n}$ dan disebut graph bintang ,seperti Gb.11.c adalah $K_{1,8}$

Teorema 3:

Graph G terbagi dua jika dan hanya jika setiap sirkuitnya mempunyai panjang genap.

Bukti: Sebagai catatan lebih dulu bahwa panjang dari jalan jejak/jalan tapak/sirkuit adalah banyaknya garis dari jalan/jejak/jalan tapak/sirkuit itu.

($\Longrightarrow$) Misal V_1 dan V_2 himpunan bebas dari G dan C adalah sirkuit. Apabila C dimulai dengan menentukan sebuah titik di V_1 yaitu v_1 maka titik-titik di V_2 semuanya akan mempunyai indek genap sehingga C dari G pasti berbentuk: $\underbrace{\underbrace{v_1v_2v_3\cdots v_{2n}}_{\text{ganjil}}\underbrace{v_1}_{1}}_{\text{genap}}$

sehingga setiap C dari G tersebut pasti mempunyai panjang genap.

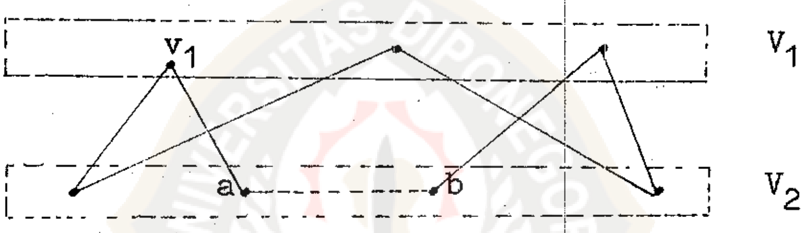
($\Longleftarrow$) Diambil sembarang titik v_1 dari G,kemudian semua titik dari G yang mempunyai jalan tapak yang panjangnya genap dari v_1 dikumpulkan dalam himpunan V_1 dan diberi indek ganjil. Sedangkan titik lainnya diberi indek genap dan dikumpulkan dalam V_2. Selanjutnya akan ditunjukkan tidak ada dua titik di V_1 yang bertetangga,sebab jika ada yang bertetangga misal titik v_{2n+1} dan v_3 maka :

$$\underbrace{\overbrace{v_1v_2v_3\cdots\cdots\cdots\cdots v_{2n+1}}^{\text{genap}}\overbrace{v_3}^{1}}_{\text{ganjil}}$$

sehingga sirkuit $v_3v_4\cdots\cdots v_{2n+1}v_3$ mempunyai panjang ganjil bertentangan dengan yang diketahui bahwa setiap sirkuitnya mempunyai panjang genap.

Kemudian diselidiki unyuk V_2, misal titik a,b $\in V_2$ dan a bertetangga dengan b (Gb.12). g_1 adalah dan mempunyai panjang ganjil. Panjang jalan tapak terpendek dari v_1 ke b yaitu g_2 juga ganjil, maka panjang sirkuit g_1abg_2 = ganjil+ganjil+1 = ganjil, bertentangan dengan yang diketahui. Maka yang benar tidak ada dua titik dalam V_2 yang bertetangga. Jadi baik di V_1 maupun V_2 tidak ada dua titik bertetangga maka G terbagi dua.

Dari ($\Longrightarrow$) dan ($\Longleftarrow$) terbukti teorema 3.



Gb.12

2.10. MATRIK TETANGGA (ADJACENCY MATRIK).

Deffinisi 16

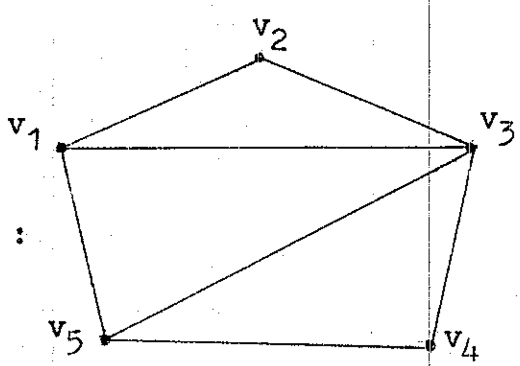
Matrik tetangga dari graph G dengan n titik dan tidak mempunyai garis-garis paralel adalah matrik biner atau (0,1)-matrik yang berordo n x n dan disimbulkan sebagai $X(G) = x_{ij}$.

$$x_{ij} = 1 \text{ jika garis } (v_i, v_j) \in G$$
$$x_{ij} = 0 \text{ jika garis } (v_i, v_j) \notin G$$

Contoh 15: Matrik tetangga dari graph Gb.13 adalah :

$$X(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

G :



Gb. 13

beberapa sifat matrik tetangga X(G) :

1. Elemen-elemen pada diagonal X(G) semuanya 0 jika hanya jika graph G tidak mempunyai gelung, gelung pada titik ke i berkorespondensi dengan $x_{ii} = 1$.
2. Jika G tidak mempunyai gelung dan tidak mempunyai garis paralel maka derajat suatu titik dari G sama dengan jumlah elemen 1 dari baris atau kolom yang berkorespondensi. Seperti pada contoh 15 titik v_1 berderajat 3 sama denga jumlah elemen 1 pada kolom v_1 maupun baris v_1
3. graph G tidak terhubung dan mempunyai dua komponen g_1 dan g_2 jika dan hanya jika X(G) nya dapat dipisahkan sebagai :

$$X(G) = \left[\begin{array}{c|c} X(g_1) & 0 \\ \hline 0 & X(g_2) \end{array}\right]$$

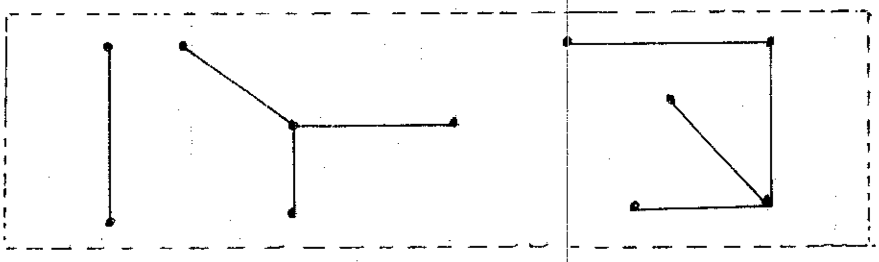
   $X(g_1)$ matrik tetangga dari komponen g_1 sedangkan $X(g_2)$ matrik tetangga dari komponen g_2.

2.11. POHON (TREE).

Deffinisi 17

Graph G disebut pohon jika G terhubung dan tidak mempunyai sirkuit. Sedangkan jika G terhubung maupun tidak serta tidak mempunyai sirkuit maka disebut hutan (forest).

Contoh 16 : Hutan pada Gb.14 terdiri atas tiga pohon, dan masing-masing pohonterdiri atas 2,4 dan 5 titik



Gb.14

Beberapa sifat penting dari pohon disajikan dalam teorema berikut ini.

teorema 4 :

Tujuh pernyataan dibawah ini ekwivalen untuk graph G

1. G adalah pohon.
2. setiap dua titik dari G dihubungkan dengan jalan tapak yang tunggal.
3. G terhubung dan $p = q+1$ (p=banyak titik, dan q banyaknya garis).
4. G tidak mempunyai sirkuit dan $p = q+1$
5. G tidak mempunyai sirkuit dan jika dua titik dari G yang tidak bertetangga dihubungkan oleh sebuah garis e maka G+e mempunyai tepat satu sirkuit.
6. G terhubung dan bukan K_p untuk $p \geqslant 3$ dan jika dua titikyang tidak bertetangga dihubungkan oleh sebuah garis e maka G+e mempunyai tepat satu sirkuit.
7. G bukan $K_3 \cup K_1$ atau $K_3 \cup K_2$, $p = q+1$ dan jika dua titik tidak bertetangga dihubungkan oleh garis e maka G+e mempunyai tepat satu sirkuit.

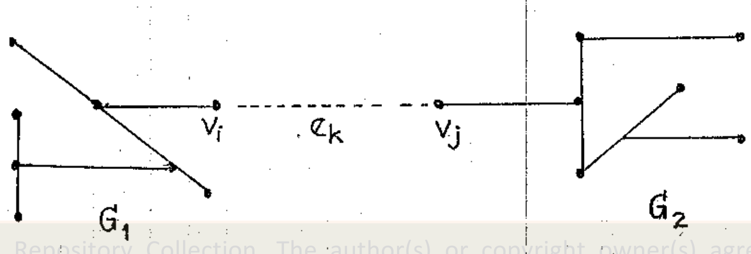
Bukti :

$1 \Longrightarrow 2$ Karena G terhubung maka harus ada paling sedikit satu jalan tapak diantara setiap pasang titik dari G. Misal diantara dua titik a dan b mempunyai dua tapak tersebut akan merupakan sirkuit dan G bukan pohon , terjadi kontradiksi jadi hanya ada satu jalan tapak diantara setiap pasang titik dalam G.

2 $\Longrightarrow$ 3 Akan dibuktikan dengan induksi.

untuk p=1 karena tidak mempunyai garis maka p=q+1 betul yaitu 1=0+1. Untuk p=2 maka banyaknya garis hanya satu sehingga p=q+1 juga betul. Demikian juga untuk p=3 banyaknya garis hanya ada dua sehingga p=q+1 betul yaitu 3=2+1.

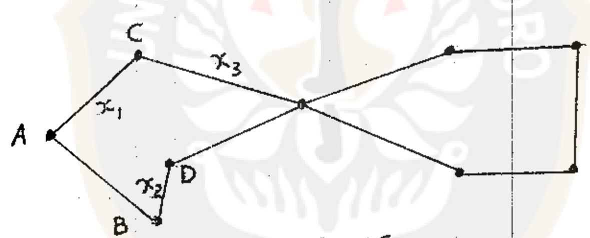
Andaikan (2 $\Longrightarrow$ 3) betul untuk pohon dengan jumlah titik kurang dari p ($p \geq 3$), akan dibuktikan untuk pohon debgan p titik. Misal e_k menghubungkan v_i dan v_j sesuai dengan (1 $\Longrightarrow$ 2) tidak ada jalan tapak lain diantara v_i dan v_j kecuali e_k, kemudian jika e_k dihapus dari G maka G menjadi tidak terhubung (Gb.15) jadi $G-e_k$ terdiri dari dua komponen dan karena tidak ada sirkuit dalam G masing masing komponen sebut G_1 dan G_2 merupakan pohon. G_1 dan G_2 masing-masing mempunyai titik kurang dari p (misal p_1 dan p_2). Sesuai dengan pengandaian maka G_1 mempunyai (p_1-1) garis dan G_2 mempunyai (p_2-1) garis. Jadi $G-e_k$ mempunyai $(p_1-1+p_2-1) = (p-2)$ garis. Jika e_k dikembalikan dalam G maka G akan mempunyai $(p-2)+1 = (p-1)$ garis atau p=q+1.



Gb.15

3 $\Longrightarrow$ 4 Misal G memuat sirkuit dengan n titik dan n garis.

Perhatikan bahwa G tidak hanya terdiri atas sirkuit ngan banyak garis bertentangan dengan p=q+1, dan p-n titik berada diluar sirkuit itu. Seukurang - kurangnya ada satu titik diluar sirkuit itu. dengan setiap titik diluar sirkuit dapat dikaitkan sekurang-kurangnya satu garis diluar sirkuit yaitu garis yang insiden dengannya. Pada jalan tapak terpendek dari titik itu ke suatu titik dalam sirkuit (misal dengan A dilanjutkan x_1,dengan B dilanjutkan x_2 dst. seperti Gb.16). Dengan demikian banyaknya titik kurang dari atau sama dengan banyak garis ($p \leqslant q$). Kontradiksi sebab diketahui p=q+1, atau $p > q$. Jadi G tidak mempunyai sirkuit.



Gb.16

4⟹5 Karena G tidak mempunyai sirkuit,masing-masing komponen adalah pohon. Jika ada k komponen dan karena masing-masing kelebihan satu titik dari pada jumlah garisnya maka p=q+k. Sesuai dengan yang diketahui p=q+1 maka k=1 dan G terhubung yaitu hanya ada satu komponen, jadi G pohon.Sesuai Ketentuan 2 setiap dua titik dihubungkan jalan tapak tunggal,apabila titik u dan v dari G yang tidak bertetangga dihubungkan oleh garis e naka jalan tapak yang tunggal dari u ke v dan e akan membentuk sirkuit tunggal. Jadi G+e mempunyai tepat satu sirkuit.

5⟹6 Karena setiap K_p untuk $p \geqslant 3$ berisi sirkuit berarti G bukan salah satu diantaranya. Misal G tidak terhubung maka dapat ditambahkan satu garis yang tidak menghasilkan sirkuit , misal garis tersebut e. Hal

6$\Longrightarrow$7 Implikasi ini dapat ditulis sbb.

Jika 6.a G+e mempunyai tepat satu sirkuit.

6.b G bukan K_p untuk $p \geqslant 3$.

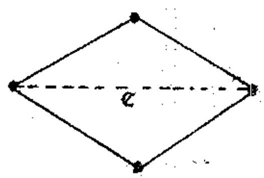
6.c G terhubung.

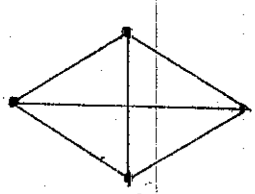
Maka 7.a G+e mempunyai tepat satu sirkuit.

7.b G bukan $K_3 \cup K_1$ maupun $K_3 \cup K_2$.

7.c $p = q+1$.

7.a tidak lain ketentuan 6.a. Sedangkan 7.b jelas berlaku sebab $K_3 \cup K_1$ maupun $K_3 \cup K_1$ tidak terhubung, bertentangan dengan 6.c jadi G terhubung. Karena G terhubung maka setiap dua titik dihubungkan dengan jalan tapak. Andaikan ada dua jalan tapak, berdasarkan 1$\Longrightarrow$2 maka akan merupakan sirkuit. Sirkuit ini tidak mungkin mempunyai 4 titik atau lebih sebab jika ditambahkan garis e (Gb.17.a) G+e akan mempunyai dua sirkuit, bertentangan dengan 6.a dan jika tidak dapat ditambahkan garis (Gb.17.b) Maka G merupakan K_p dengan $p \geqslant 3$, bertentangan dengan 6.b, pengandaian salah jadi yang benar hanya ada satu jalan tapak yang menghubungkan setiap dua titik dalam G. Dari 2$\Longrightarrow$3 maka $p=q+1$.





Gb.17

7$\Longrightarrow$1 Misal G bukan pohon berarti G tidak terhubung atau G mempunyai sirkuit, atau dapat berlaku salah satu hal berikut ini jika G bukan pohon:

(i) G tidak terhubung dan tidak punya sirkuit.

(ii) G terhubung dan mempunyi sirkuit.

(iii) G tidak terhubung danmempunyai sirkuit.

Selanjutnya akan diturunkan kontradiksinya.

(i) Jika berlaku (i) maka dapat dilakukan penambahan suatu garis yang tidak menghasilkan sirkuit, hal ini bertentangan.

(ii) Dipelihatkan bahwa sirkuitnya tidak mempunyai 4 titik atau lebih sebab jika demikian penambahan satu garis e akan terjadi dua sirkuit (Gb.17.a) bertentangan dengan 7.a. Sedangkan jika tidak dapat ditambahkan satu garis e akan merupakan K_p dengan $p \geqslant 4$, tetapi banyaknya garis dalam $K_p = \frac{1}{2}p(p-1)$ dan ini pasti lebih besar dari $(p-1)$ untuk $p \geqslant 4$. Bertentangan dengan $p > q$ sehingga sirkuitnya pasti segi tiga. Selanjutnya pasti ada titik lain sebab jika tidak akan bertentangan dengan 7.c yaitu $p=q+1$ jadi penambahan satu garis e akan menghasilkan dua sirkuit, kontradiksi.

(iii) Seperti pada (ii) untuk sirkuitnya harus segi tiga, karena 7.c komponen-komponen lain merupakan pohon. Oleh sebab 7.b komponennya tidak mungkin terdiri atas satu titik dan dan juga tidak mungkin terdiri atas satu garis sebab G bukan $K_3 \cup K_1$ maupun $K_3 \cup K_2$, sehingga komponennya sekurang-kurangnya terdiri 2 garis. Tetapi jika demikian penambahan satu garis e akan menghasilkan dua sirkuit, bertentangan dengan 7.a.

Ternyata dalam setiap kemungkinan (i),(ii),(iii) terjadi kontradiksi dengan ketentuan 7, jadi G terhubung dan tidak mempunyai sirkuit yaitu G pohon.

Terbukti $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 6 \Longrightarrow 7 \Longrightarrow 1$

Teorema 5:

Pohon dengan dua titik atau lebih sekurang-kurangnya mempunyai dua titik akhir.

Bukti: Menurut teorema 1 untuk semua graph $\sum d(v_i) = 2q$. Sedangkan menurut teorema 4 untuk pohon berlaku $p=q+1$ atau $q=p-1$ sehingga untuk pohon berlaku :

$$\sum d(v_i) = 2q = 2p-2$$

Misal hanya ada satu titik akhir, jika pohonnya mempunyai p titik maka p-1 titik yang lain berderajat dua atau lebih sehingga :

$$\sum d(v_i) \geqslant 2(p-1)+1$$

$$\sum d(v_i) \geqslant 2p-1$$

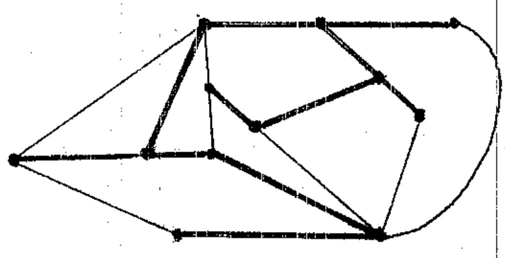
bertentangan dengan hasil $\sum d(v_i) = 2p-2$ diatas. jadi yang benar setiap pohon paling sedikit mempunyai dua titik akhir.

2.12. POHON PERENTANG.

Deffinisi 18

Pohon T disebut pohon perentang dari graph terhubung G jika T adalah sub graph dari G dan memuat semua titik dari G.

Contoh 17: Pohon perentang dari graph G pada Gb.18 dilukis dengan garis tebal.



Gb.18

Pohon perentang hanya terdiffinisi untuk graph terhubung, pohon harus terhubung, dan dalam graph tidak terhubung yang terdiri dari n titik tidak dapat diperoleh sub graph

Garis-garis dalam pohon perentang T disebut cabang (branch) dari T, sedangkan garis-garis yang tidak termasuk pohon perentang T tetapi anggota G disebut tali (chord).

2.13. GRAPH PLANAR.

2.13.1. Graph bidang (plane graph).

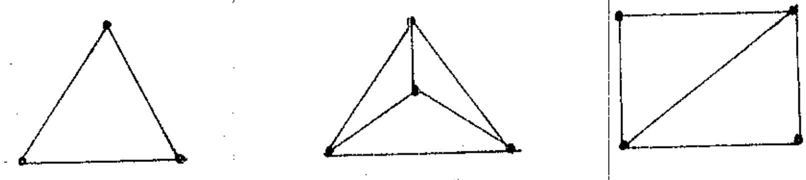
Suatu graph G dikatakan dipancangkan pada luasan S apabila graph itu dilukis pada luasan S sedemikian hingga tidak ada garis-garisnya yang berpotongan kecuali pada titik anggota G. Dari pengertian ini diperoleh diffinisi :

Deffinisi 19

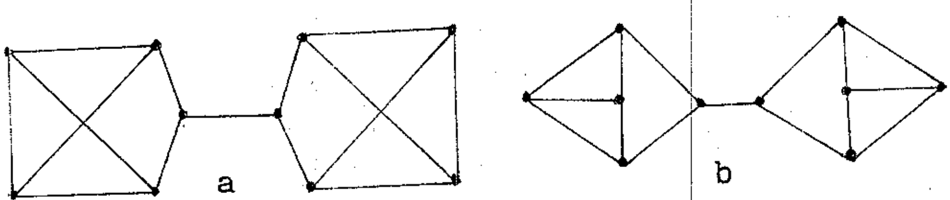
Graph bidang adalah graph yang dilukis pasa bidang datar sedemikian hingga tidak ada garis-garisnya yang berpotongan kecuali pada titik anggota G. (contohnya graph pada Gb.19

Deffinisi 20

Graph planar adalah graph yang dapat dipancangkan pada bidang datar atau graph yang isomorphic dengan graph bidang. (contohnya graph Gb.20.a).



Gb.19

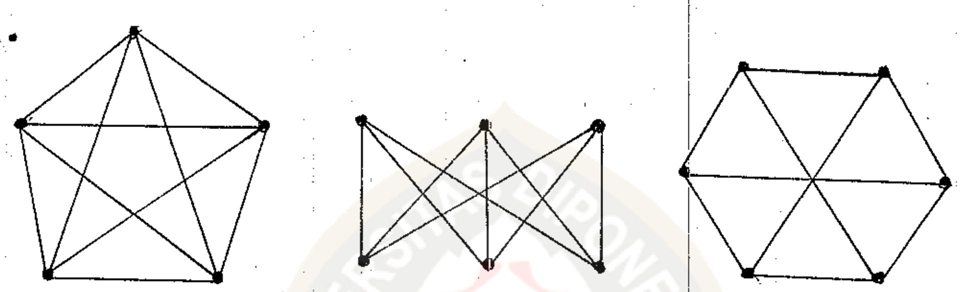


Gb.20

Keterangan: Ketiga graph pada Gb.19 merupakan graph bidang dan graph Gb.20.a adalah graph planar karena isomorphic dengan graph Gb.20.b.

2.13.2. Dua graph Kuratowski.

Graph lengkap dengan lima titik (K_5) merupakan satu dari dua graph kuratowski, dan graph kuratowski yang ke dua adalah graph reguler berderajat tiga dengan 6 titik dan 9 garis atau $K_{3,3}$. Gb.21.a graph kuratowski pertama dan Gb,21.b dan c graph kuratowski kedua yang dilukis berbeda.



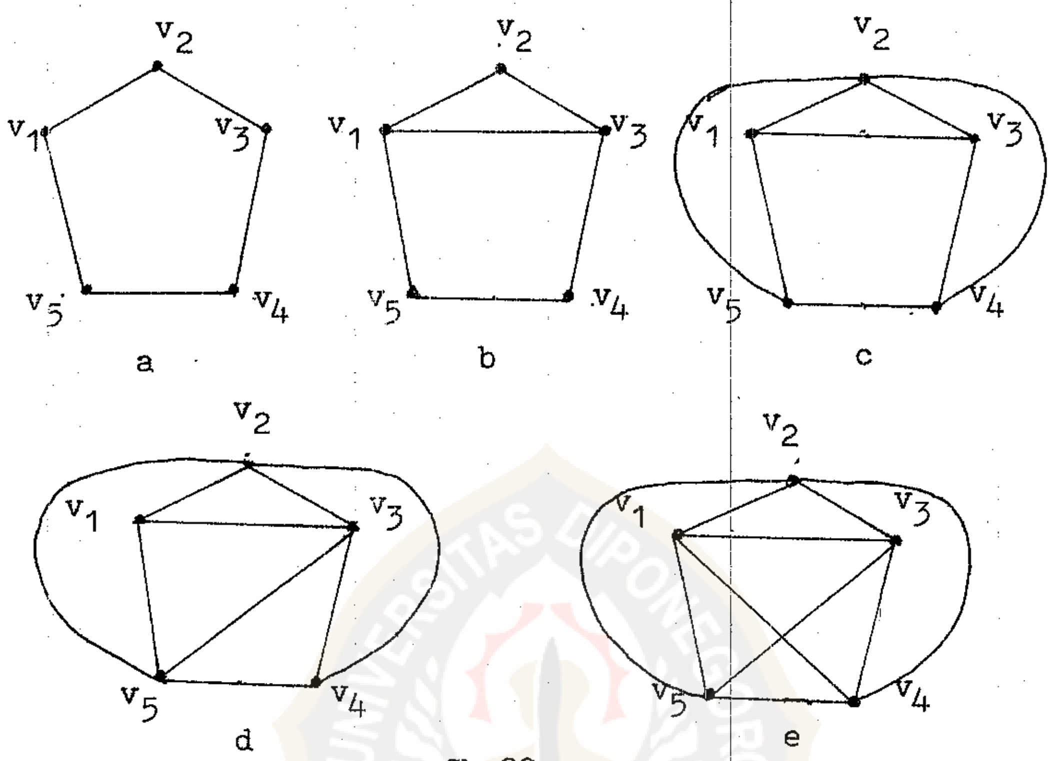
a b c

Gb.21

Teorema 6 :

Graph lengkap dengan lima titik (K_5) tidak planar.

Bukti: Diambil K_5 yang titik-titiknya v_1, v_2, v_3, v_4 dan v_5. K_5 ini merupakan graph sederhana. Ada sirkuit $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ yang merupakan segi lima (Gb.22.a),segi lima ini membagi bidang menjadi dua yaitu didalam dan diluar segi lima. Karena v_1 bertetangga dengan v_3 maka ada garis yang dilukis di dalam atau diluar segi lima,misal garis (v_1,v_3) dilukis didalam segi lima (Gb.22.b), selanjutnya garis (v_2,v_4) dan garis (v_2,v_3) keduanya tidak dapat dilukis didalam segi lima tanpa memotong garis yang sudah ada, maka kedua garis ini dilukis diluar segi lima (Gb.22.c). Garis (v_3,v_5)agar tidak memotong garis yang lain dilukis didalam segi lima (Gb.22.d). Yang terakhir garis (v_2,v_4) tidak dapat dilukis baik didalam maupun diluar segi lima tanpa memotong garis yang lain.(Gb.22.e). jadi graph K_5 tidak dapat dipancangkan pada bidang datar. Kesimpulannya K_5 tidak planar



Gb.22

Teorema 7:

Graph kuratowski ke dua ($K_{3,3}$) tidak planar.

Bukti: Diperhatikan pemancangan $K_{3,3}$ sesuai penalaran pada bukti teorema 6, selalu dapat dianggap memuat segi enam beraturan misal $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_1$. Seandainya $K_{3,3}$ planar maka garis-garis (v_1,v_4), (v_2,v_5), dan (v_3,v_6) ketiganya harus diluar segi enam atau ketiganya berada didalam segi enam. Akan tetapi jika demikian ketiganya akan berpotongan, jadi $K_{3,3}$ bukan graph yang planar.

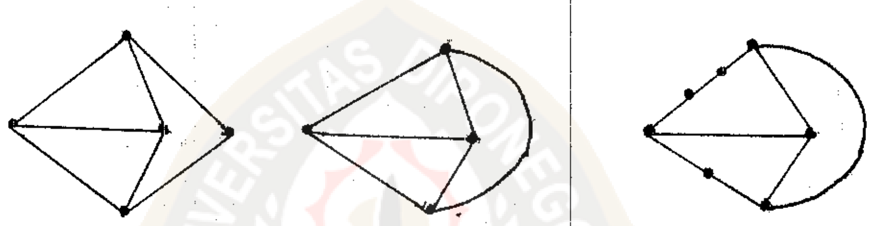
Beberapa sifat dua graph Kuratowski :

1. Keduanya merupakan graph reguler.
2. Keduanya merupakan graph yang tidak planar.
3. Menghapus satu titik atau satu garis akan membuat graph tersebut menjadi planar.
4. K_5 adalah graph yang tidak planar dengan jumlah titik paling sedikit dan $K_{3,3}$ graph yang tidak planar dengan jumlah garis paling sedikit.

Deffinisi 21

Dua graph dikatakan homeomorphik jika salah satu graph itu dapat diperoleh dari graph yang lain,dengan menciptakan garis yang seri (dengan cara menyisipkan titik-titik berderajat dua) atau dengan menggabungkan garis yang seri.

Contoh 18: Graph-graph Gb.23 masing-masing merupakan graph yang homeomorphik terhadap yang lain.



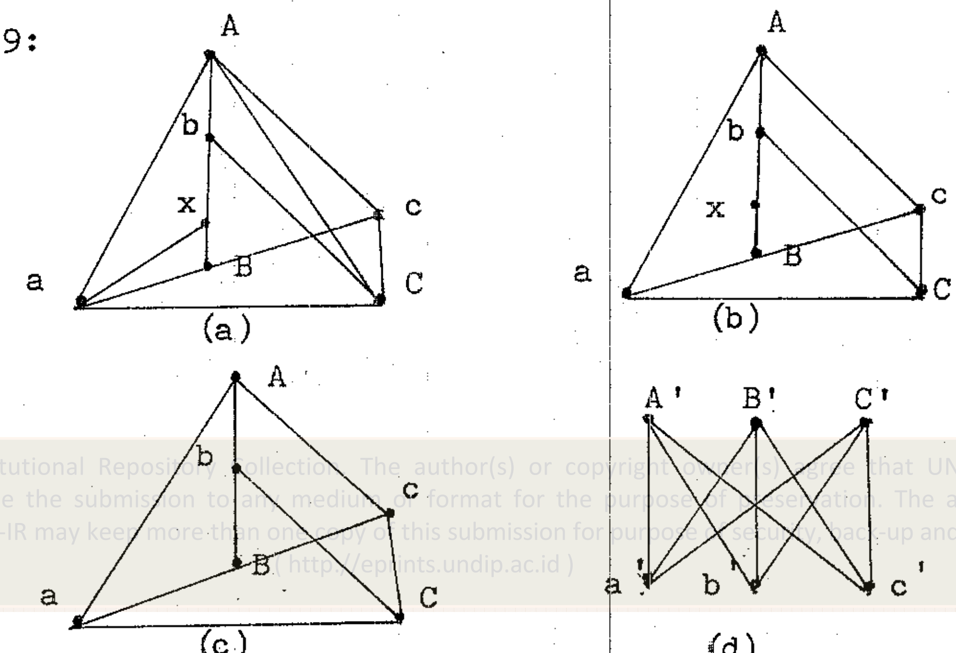
Gb.23

Teorema 8:

Graph yang mempunyai sub graph yang homeomorphik dengan K_5 atau $K_{3,3}$ tidak planar.

Bukti: Karena graph yang homeomorphik dengan K_5 atau $K_{3,3}$ tidak dapat dipancangkan pada bidang datar maka graph yang mempunyai sub graph homeomorphik dengan K_5 atau $K_{3,3}$ juga tidak dapat dipancangkan pada bidang datar yang berarti graph tersebut tidak planar.

Contoh 19:

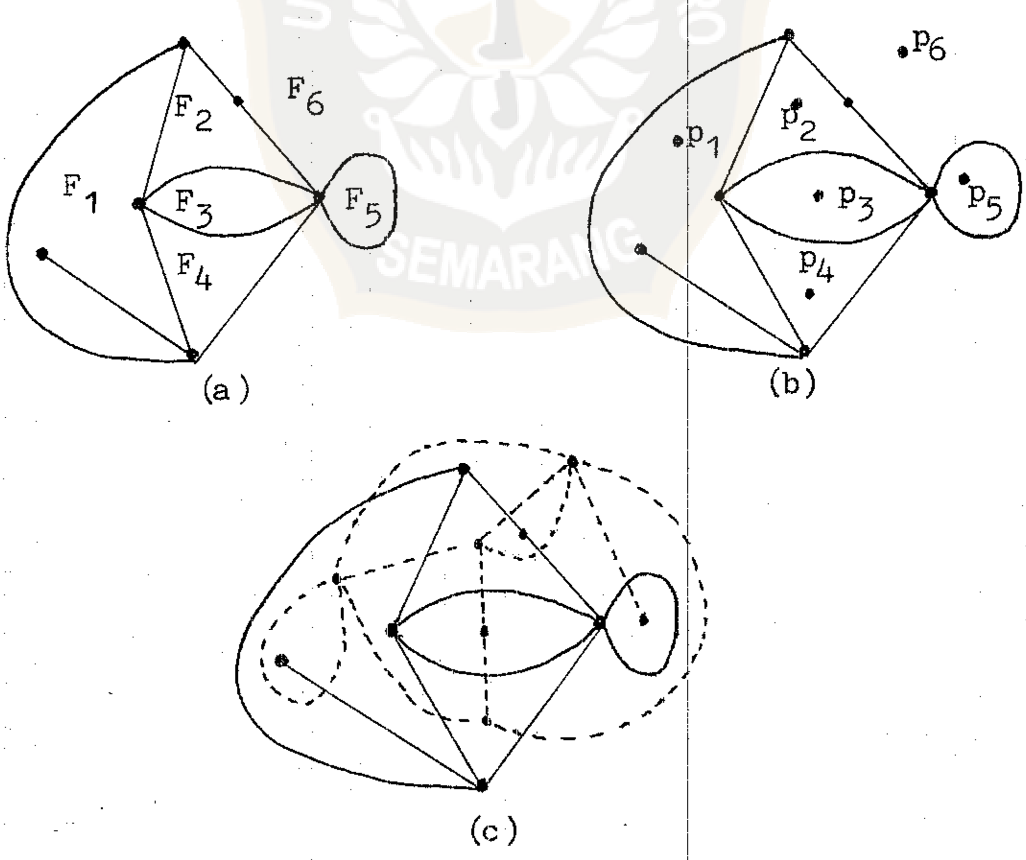


Gb.24

Keterangan: Graph Gb.24.a tidak planar sebab jika dua garis (a,x) dan (A,C) dihapus akan diperoleh sub graph Gb.24.b yang homeomorphik dengan Gb.24.c (yang diperoleh dari Gb.24.b denga menggabungkan garis yang seri pada titik x). Sedangkan Gb.24.c isomorphik dengan Gb.24.d yaitu $K_{3,3}$. Jadi Gb.24.a graph tidak planar.

2.13.3. Graph Dual.

Diambil graph bidang G dengan enam sisi F_1,F_2,F_3,F_4,F_5 dan F_6 (Gb.25.a). Enam titik p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 dan p_6 ditempatkan pada sisi-sisi G masing-masing satu titik seperti Gb.25.b



Gb.25

Kemudian enam titik $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_6$ dihubungkan dengan garis sesuai prosedur berikut :

Jika dua sisi F_i dan F_j bertetangga (mempunyai garis berserikat) dilukis garis (p_i,p_j) memotong ga-

garis berserikat lebih dari satu dilukis lagi garis (p_i,p_j) yang memotong masing-masing garis berserikat diantara F_i dan F_j tepat satu kali. Untuk garis e dari G yang berada pada satu sisi misal F_a dilukis gelung pada titik p_a yang memotong garis e satu kali.

Prosedur diatas akan menghasilkan graph baru G* (Gb.25.c yang dilukis dengan garis terputus-putus),yang terdiri enam titik p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 dan garis-garis yang menghubungkan titik-titik tersebut. Graph G* yang diperoleh dengan prosedur diatas disebut Dual Geometrik dari G atau cukup disebut Duaal dari G.

Beberapa sifat hubungan diantara graph planar G dengan dual G* :

1. Garis yang membentuk gelung pada G akan menghasilkan garis akhir dalam G*.
2. Garis akhir dalam G menghasilkan gelung dalam G*.
3. Garis paralel dalam G menghasilkan garis seri dalam G*.
4. Garis seri dalam G menghasilkan garis paralel dalam G*.
5. Dari sifat-sifat diatas,banyaknya garis yang membatasi sisi F_i dalam G sama dengan derajat titik p_i dalam G* yang berkoresponden dengan F_i.
6. Graph G* juga dapat dipancangkan pada bidang dan merupakan graph yang planar.
7. Dual dari G* tidak lain G itu sendiri.

Teorema 9:

Suatu graph mempunyai dual jika dan hanya jika graphnya planar.

Bukti: Akan dibuktikan graph yang tidak planar tidak mempunyai dual. Diambil graph G yang tidak planar, ...

maka sesuai teorema 8 G akan mempunyai sub graph K_5 atau $K_{3,3}$. Untuk melihat graph G mempunyai dual hanya jika setiap sub graph g dari G dan setiap sub graph yang homeomorphik dengan g mempunyai dual. Untuk itu akan ditunjukkan baik K_5 maupun $K_{3,3}$ tidak mempunyai dual dengan cara mencari kontradiksinya.

a. Misal $K_{3,3}$ mempunyai dual D. Sifat bahwa himpunan pemotong (himpunan garis-garis graph G yang apabila dihapus mengakibatkan G tidak terhubung) berkorespondensi dengan sirkuit dalam D . Karena $K_{3,3}$ tidak mempunyai himpunan pemotong yang terdiri dari dua garis maka D tidak mempunyai sirkuit yang terdiri dari dua garis yaitu D tidak mempunyai sepasang garis paralel. Karena setiap sirkuit dalam $K_{3,3}$ mempunyai panjang 4 atau 6, D tidak mempunyai himpunan pemotong kurang dari 4 garis. Derajat setiap titik dalam D paling sedikit 4, karena D tidak mempunyai garis-garis paralel dan derajat setiap titiknya 4,maka D harus mempunyai paling sedikit lima titik yang masing-masing berderajat 4 atau lebih.Yaitu D harus mempunyai paling sedikit $\frac{1}{2}$ (5x4) = 10 garis, ini bertentangan sebab $K_{3,3}$ mempunyai 9 garis. Jadi $K_{3,3}$ tidak mempunyai dual.

b. Misal graph K_5 mempunyai dual H dan diketahui bahwa K_5 mempunyai sifat-sifat :
   1. terdiri 10 garis.
   2. Tidak mempunyai sepasang garis paralel.
   3. Tidak ada himpunan pemotong denga dua garis
   4. Himpunan pemotong hanya terdiri 4 atau 6 garis.

Akibatnya graph H harus :

2. Tidak mempunyai titik dengan derajat kurang dari tiga .
3. Tidak mempunyai sepasang garis paralel.
4. Hanya mempunyai sirkuit dengan panjang 4 atau 6.

Sekarang jika graph H mempunyai sirkuit dengan panjang 6 dan tidak lebih 3 garis dapat ditambahkan pada sirkuit tersebut tanpa menghasilkan sirkuit dengan panjang 3 atau sepasang garis paralel (Gb.21.c). Karena keduanya tidak dapat berada dalam H sebab H mempunyai 10 garis yang paling sedikit pada 7 titik dari H. Derajat masing-masing titik paling sedikit 3 sehingga H mempunyai paling sedikit 11 garis , Kontradiksi jadi K_5 tidak mempunyai dual.

Sebaliknya graph G mempunyai dual pasti planar sebab untuk memperoleh dual dari G dapat dilakukan setelah G dipancangkan pada bidang datar, dan graph yang bisa dipancangkan tidak lain graph yang planar Jadi terbukti teorema 9.