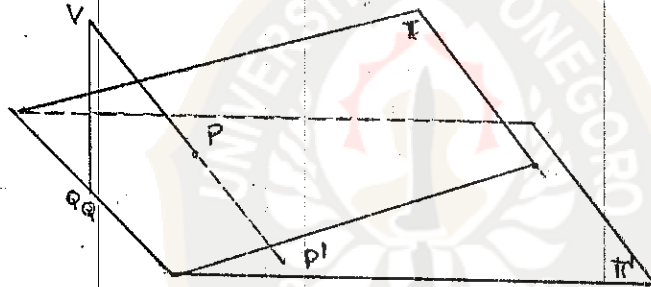


BAB III

IRISAN KERUCUT SEJATI

III.1. PRESPEKTIF DAN PROYEKSI

Suatu Prespektif (Transformasi prespektif) adalah suatu transformasi dari himpunan semua titik-titik di bidang perluasan (π) ke himpunan semua titik-titik pada bidang perluasan (π'), dengan setiap titik akan dipetakan secara tunggal.



V titik tertentu yang tidak terletak pada π dan π' disebut pusat prespektif. Sumbu prespektif yaitu perpotongan π dan π' yang merupakan garis tetap ($\phi \phi'$)

Definisi :

Jika V adalah titik sembarang dalam ruang, prespektif disebut prespektif sentral, sedang V adalah titik ideal dalam ruang prespektif disebut prespektif paralel.

Definisi :

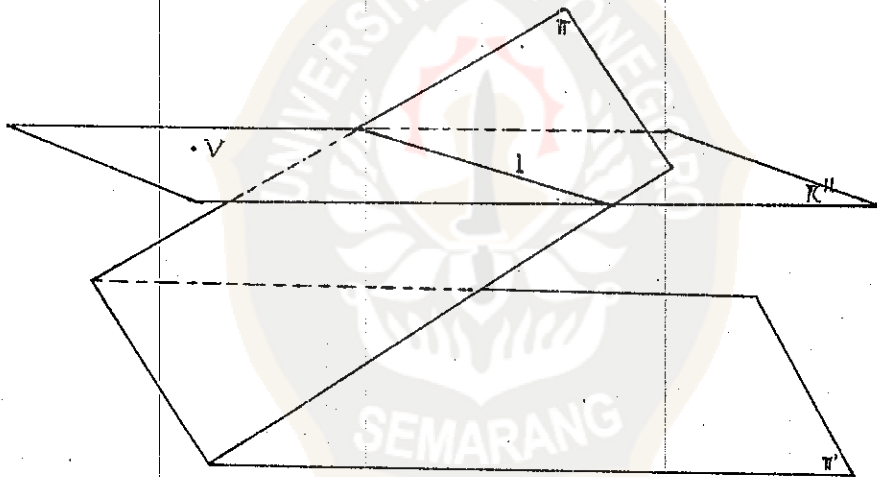
Sumbu prespektif yang petanya garis ada di ω disebut garis hilang dari π dan π' (memproyeksikan

Theorema (3.1.1)

Jika π suatu bidang, l adalah garis dalam π dan V titik yang tidak terletak pada π maka terdapatlah bidang π' dengan pusat prespektif V yang memetakan garis l dan π ke garis ω pada π' .

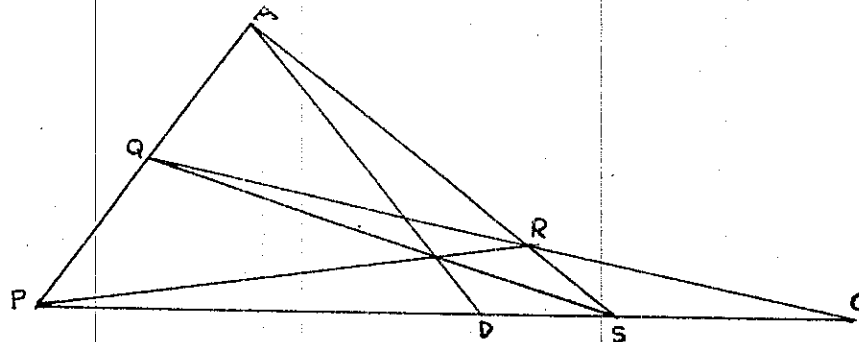
Bukti :

Dengan memilih bidang π' sembarang yang sejajar dengan bidang π'' yang melalui titik V dan garis l , jika V dibawa, ke π akan terdapat pada l .



Theorema (3.1.2)

PQRS adalah segi empat lengkap, dimana PQ dan SR berpotongan di A, PR dan SQ berpotongan di B, PS dan QR berpotongan di C, AB dan PS berpotongan di D, maka $(PS, DC) = -1$



Bukti :

$$(PS, DC) = -1 \rightarrow PD/SD \cdot SC/PC = -1$$

$$\text{dalam APS} \rightarrow AQ/QD \cdot PD/SD \cdot SR/RA = +1 \dots (1)$$

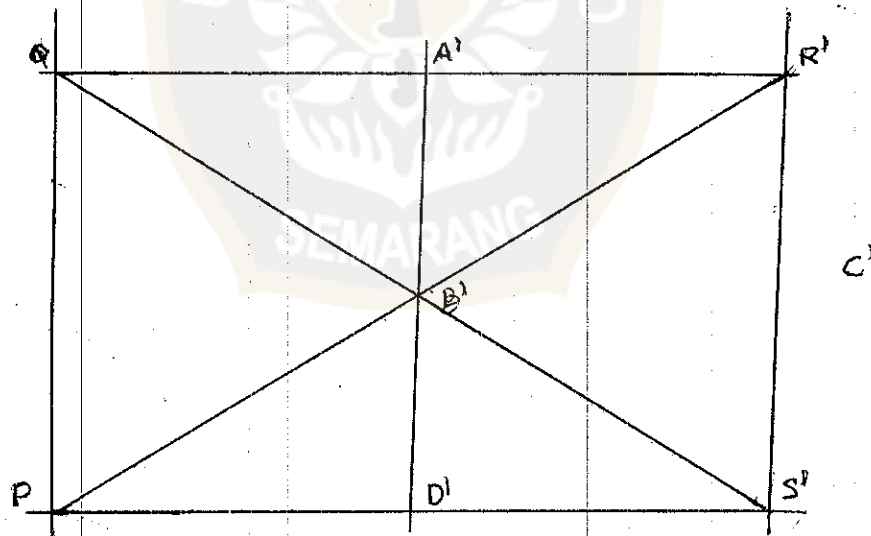
$$\text{dalam PCRA} \rightarrow PC/SC \cdot SR/RA \cdot AQ/QP = -1 \dots (2)$$

(1) : (2) didapatkan

$$AQ/QP \cdot PD/SD \cdot SR/RA \cdot SC/PC \cdot RA/SR \cdot QP/AQ = -1$$

maka $PD/SD \cdot SC/PC = -1$ terbukti.

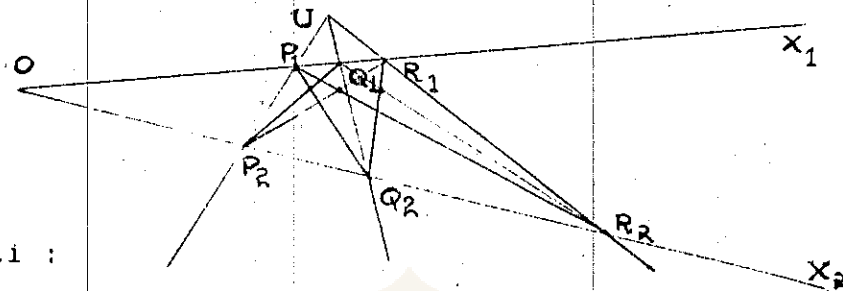
Proyeksikan garis AC ke ∞ maka $P'Q'R'S'$ adalah jajaran genjang dan Q' titik tengah dari $P'S'$ karena C' di ∞ , maka didapatkan $(P'S', D'C') = -1$



Theorema (3.1.3)

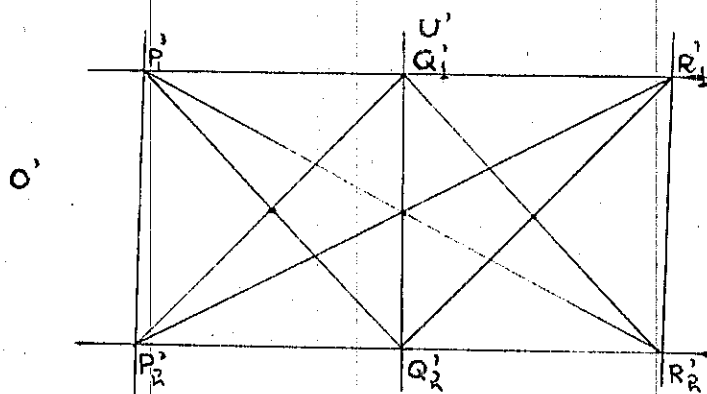
Jika tiga garis UP_1P_2 , UQ_1Q_2 , UR_1R_2 memotong dua

garis OX_1 dan OX_2 di P_1, Q_1, R_1 dan P_2, Q_2, R_2 maka titik potong di Q_1R_2, Q_2R_1, R_1P_2 dan R_2P_1, P_1Q_2, P_2Q_1 adalah kolinier pada suatu garis melalui titik O



Bukti :

Garis OU diproyeksikan ke ω , lihat (3.1.f) maka dengan $P_1'P_2' // Q_1'Q_2' // R_1'R_2'$, kemudian untuk garis $P_1'Q_1'R_1' // P_2'Q_2'R_2'$ dan ternyata perpotongan antara titik-titik $Q_1'R_2'$ dan $Q_2'R_1'$, $R_1'P_2'$ dan $R_2'P_1'$, $P_1'Q_1'$ dan $P_2'Q_1'$ adalah kolinier pada suatu garis sejajar dengan $P_1'Q_1'R_1'$ dan $P_2'Q_2'R_2'$, garis tersebut akan terletak pada garis antara garis $P_1'Q_1'R_1'$ dan $P_2'Q_2'R_2'$ sehingga titik-titik perpotongan yang bersesuaian dengan sebelum diproyeksikan akan kolinier pada garis yang melalui titik O

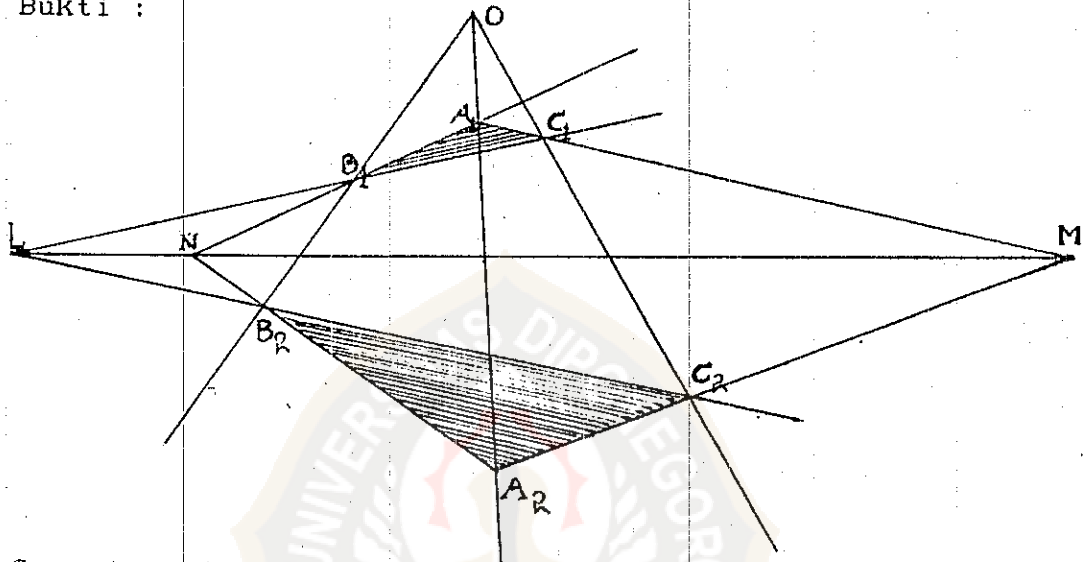


(3.1.f)

Theorema (3.1.4) Desargues dua segitiga,

Dua segitiga copolar bilamana dan hanya bilamana coaxial.

Bukti :



Syarat perlu :

Dua segitiga copolar adalah coaxial.

Dua segitiga $A_1B_1C_1$ dan $A_2B_2C_2$ copolar, dan B_1C_1 dan B_2C_2 berpotongan di L, C_1A_1 dan C_2A_2 berpotongan di M, sedangkan A_1B_1 dan A_2B_2 berpotongan di N, dan misalkan A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 konkuren di titik O, maka dengan memproyeksikan garis MN ke ω maka $A_1'B_1' // A_2'B_2'$ dan $O'B_1'/O'B_2' = O'A_1'/O'A_2' = O'C_1'/O'C_2'$ sehingga $B_1'C_1'$ dan $B_2'C_2'$ juga sejajar. Jadi perpotongan dari sisi-sisi segitiga $A_1'B_1'C_1'$ dan $A_2'B_2'C_2'$ yang bersesuaian juga kolinier pada garis ω , maka perpotongan dari sisi-sisi $A_1B_1C_1$ dan $A_2B_2C_2$ copolar dan juga coaxial.

Syarat cukup :

Segitiga coaxial dalam bidang copolar.

Misal L, M, N adalah kolinier dengan memproyeksikan garis

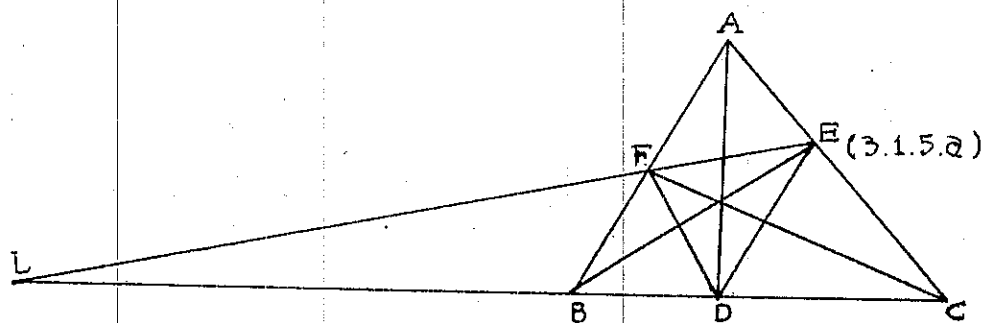
LMN ke ω , maka dua segitiga $A_1'B_1'C_1'$ dan $A_2'B_2'C_2'$ akan mempunyai sisi-sisi yang bersesuaian sejajar, dan karena homotetik satu dengan yang lain, $A_1'A_2', B_1'B_2', C_1'C_2'$ adalah konkuren di titik O, jadi segitiga coaxial dalam bidang copolar.

Theorema (3.1.5)

Terdapat suatu perspektif sehingga memberi segitiga ABC dan suatu titik G pada bidang (tetapi tidak terdapat pada sisi segitiga tersebut) ke suatu segitiga $A'B'C'$ dan G' sebagai titik berat.

Bukti :

Segitiga DEF dan segitiga ABC copolar dan juga coaxial, misalkan AG, BG, CG memotong sisi BC, CA, AB di titik D, E, F, jadi titik L, M, N yang merupakan perpotongan EF dan BC, FD dan CA, DE dan AB kolinier dengan theorema (3.1.2) maka $(BC, DL) = -1$. Proyeksikan garis LMN ke ω maka D' adalah titik tengah dari $B'C'$, dengan cara yang sama E' dan F' titik potong dari $C'A'$ dan $A'B'$ maka terbukti G' adalah titik berat segitiga $A'B'C'$ (3.1.5. a)

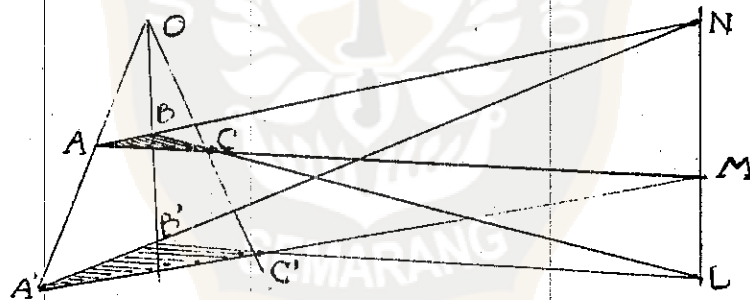


Contoh :

1. Theorema dua segitiga Desargues.

Segitiga-segitiga copolar (dalam ruang atau dalam suatu bidang) adalah coaxial dan sebaliknya.

a). Misalkan dua segitiga ABC dan $A'B'C'$ pada bidang π dan π' , dimana AA', BB', CC' adalah konkuren pada suatu titik O , untuk sisi-sisi BC dan $B'C'$ adalah coplanar dan berpotongan di titik L , CA dan $C'A'$ di N , AB dan $A'B'$ di M . Untuk titik L, M, N terletak pada suatu garis yang merupakan perpotongan bidang-bidang tersebut. Jadi terbukti bahwa segitiga-segitiga dalam bidang coaxial.

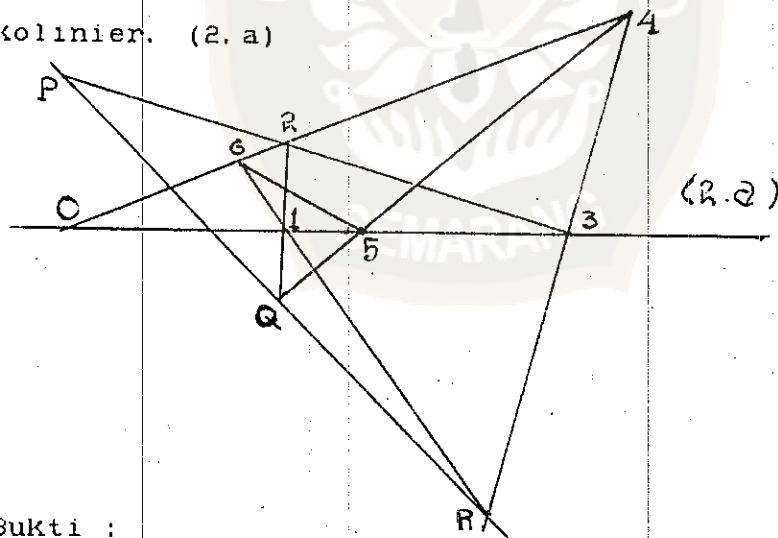


b). Misalkan dua bidang π dan π' berimpit dan titik L, M, N merupakan titik perpotongan BC dan $B'C'$, CA dan $C'A'$, AB dan $A'B'$ yang kolinier pada garis l di π . Misalkan π_1 menjadi perubahan bidang dari π dan sepintas lalu menembus l , misal P tidak pada π atau π_1 , dan PA', PB', PC' memotong π_1 di A_1, B_1, C_1 , maka $B_1, C_1, B'C'$ coplanar., sedemikian juga C_1, A_1, C', A' dan A_1, B_1, B', C' dan kita lihat bahwa perpotongan sisi-sisi segitiga $BC, B'C', B_1L_1$ di L , $CA, C'A', C_1A_1$ di M , $AB, A'B', A_1B_1$ di N . Jadi dua segitiga $A_1B_1C_1$ dan ABC

coaxial adalah copolar sehingga AA_1, BB_1, CC_1 konkuren pada titik Q yang mana QP memotong π pada titik O. Maka $AA'O$ semua terletak pada bidang yang ditentukan oleh PA_1A' dan QA_1A . Akibatnya AA' melalui O, BB' dan CC' melalui O, dan terbukti segitiga ABC dan $A'B'C'$ copolar.

2). Theorema Pappus

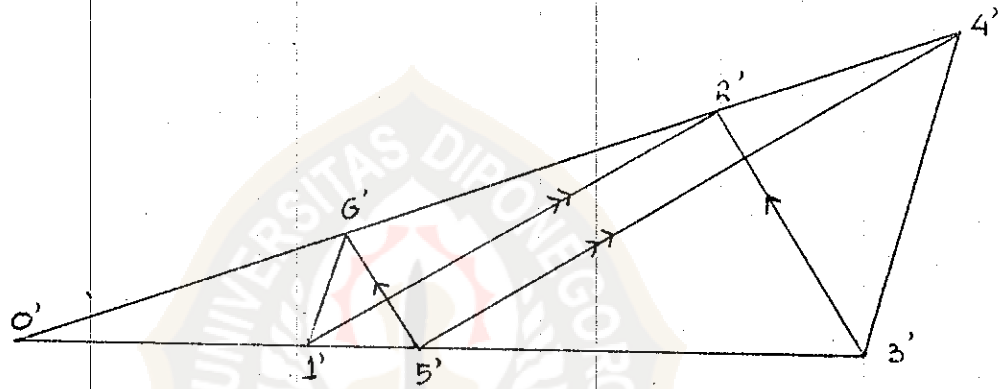
Jika 1, 2, 3, 4, 5, 6 titik-titik dari suatu segienam 1 2 3 4 5 6 yang terletak bersilangan pada suatu pasang garis, maka 3 titik potong P, Q, R dari sisi 2 3 dan 5 6, 4 5 dan 1 2, 6 1 dan 3 4 dari suatu segienam adalah kolinier. (2. a)



Bukti :

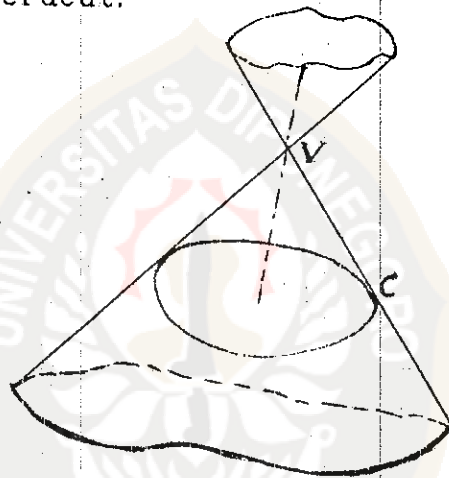
Garis PQ diproyeksikan ke ω dan misal titik potong di O dari garis 1 3 5 dan 2 4 6, yang tidak terletak pada PQ dimana 1', 3', 5' kolinier dan 2', 4', 6' kolinier, titik O' berhingga, 2'3' sejajar 5'6', dan 4'5' sejajar dengan 1'2', karena 2'3' sejajar 5'6' dan 4'5' sejajar 1'2' maka 6'1' sejajar dengan 3'4'.

$\overline{O'6'}/\overline{O'2'} = \overline{O'5'}/\overline{O'3'}$ dan $\overline{O'1'}/\overline{O'5'} = \overline{O'2'}/\overline{O'4'}$,
 maka $\overline{O'6'}/\overline{O'1'} = \overline{O'4'}/\overline{O'3'}$ dan $6'1'$ sejajar dengan $3'4'$.
 Jika O terletak pada garis PQ , maka garis $1'3'5'$ dan
 $2'4'6'$ sejajar, $1'5' = 2'4'$ dan $5'3' = 6'2'$ sehingga
 $1'3' = 6'4'$ oleh karena $6'1'$ sejajar dengan $3'4'$.



III.2 IRISAN KERUCUT SEJATI

Kerucut adalah suatu permukaan yang dibentuk oleh suatu garis lurus yang bergerak sedemikian hingga selalu memotong dalam bentuk lingkaran C , dan melalui titik yang tidak terletak pada lingkaran C tersebut, misalkan V . Garis pembentuk untuk setiap posisi disebut elemen dari kerucut.



Kerucut tegak : Jika garis vertex kerucut dengan pusat lingkaran adalah tegak lurus pada bidang lingkaran tersebut.

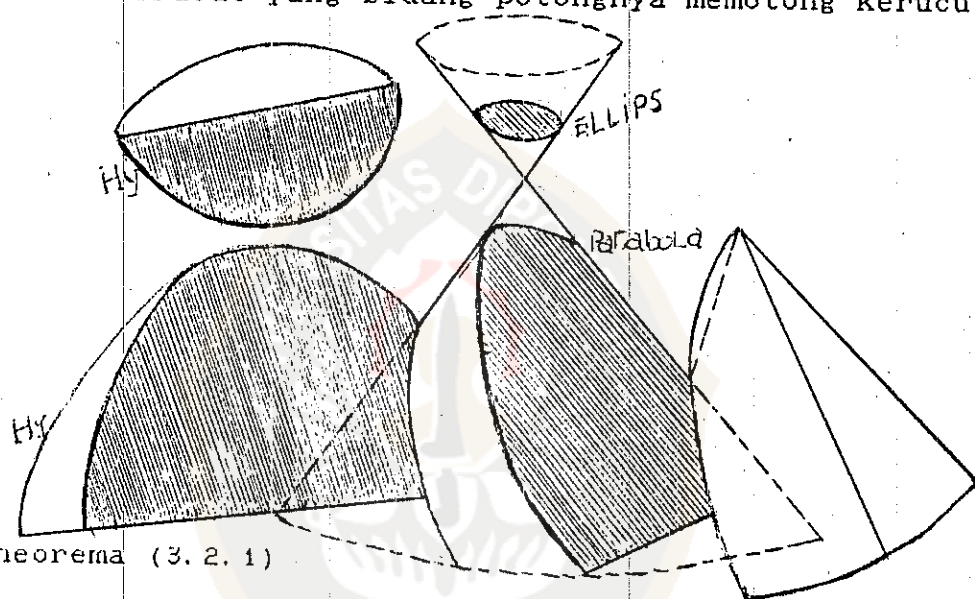
Kerucut miring : Jika garis vertex kerucut dengan pusat lingkaran tidak tegak lurus pada bidang lingkaran tersebut.

Irisan Kerucut sejati : Jika bidang potong tidak melalui vertex dari kerucut.

Kurva Parabola (suatu kurva yang tidak tertutup) adalah irisan kerucut sejati yang bidang potongnya sejajar dengan salah satu elemen dari kerucut.

Ellips (suatu kurva tertutup) adalah irisan kerucut sejati yang bidang potongnya memotong semua elemen dari kerucut.

Hyperbola (suatu kurva yang tidak tertutup) adalah irisan kerucut yang bidang potongnya memotong kerucut.



Theorema (3.2.1)

Suatu garis lurus pada bidang irisan kerucut sejati, memotong irisan kerucut pada dua titik, merupakan garis singgung ke irisan kerucut, atau tidak memotong irisan kerucut.

Theorema (3.2.2)

Suatu garis singgung tertentu pada sebuah irisan kerucut sejati disetiap titik pada irisan kerucut.

Theorema (3.2.3)

Suatu kerucut sejati membagi bidang kerucut, selain dari kerucut sendiri, dalam dua daerah sedemikian sehingga dari beberapa titik pada bidang

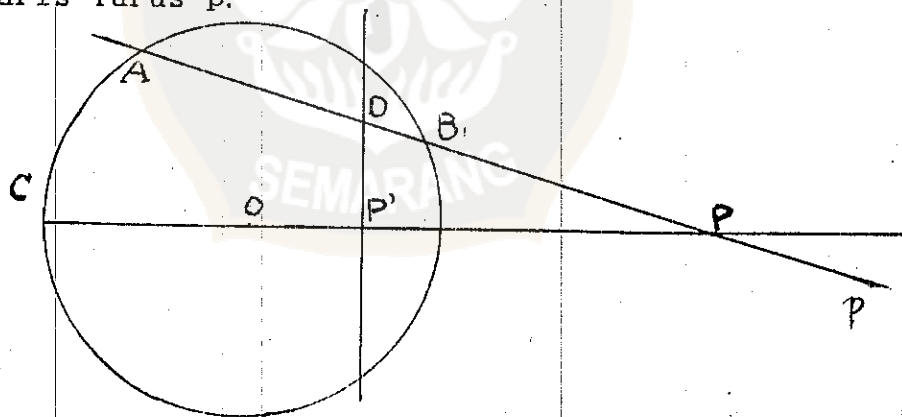
dapat digambar dua garis singgung pada kerucut dan beberapa titik pada daerah yang lain tidak dapat digambar garis singgung pada kerucut.

Definisi :

Dua daerah yang disebut pada theorema (3.2.3) yaitu daerah luar dan daerah dalam pada irisan kerucut sejati.

Theorema (3.2.4)

Jika sebuah garis sembarang melalui titik P dalam sebuah bidang irisan kerucut sejati C, memotong irisan kerucut tersebut, maka konjugate harmonik titik terhadap perpotongan dan irisan kerucut semua terletak pada garis lurus p.



Bukti :

Misal O pusat lingkaran, garis p memotong $O(r)$ di A dan B, dan misal P' invers dari P maka $P'D$ polar pada P, dengan melihat theorema (2.3.4) bahwa $(AB, DP) = -1$

Definisi :

Garis lurus p pada theorema (3.2.4) disebut garis polar dari titik P untuk irisan kerucut C, dan titik P disebut kutub(polar) dari garis p pada irisan kerucut.

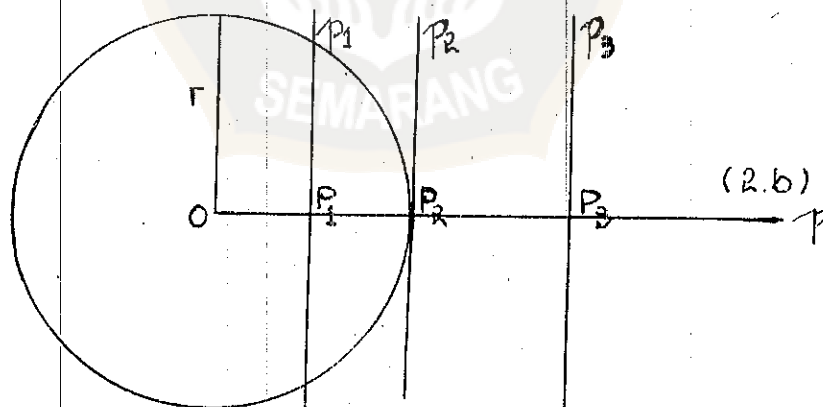
Theorema

(1). Polar dari suatu titik untuk irisan kerucut sejati akan memotong irisan kerucut, menyinggung suatu titik pada irisan kerucut, atau tidak memotong irisan kerucut tergantung dari titik tersebut diluar, pada, atau diluar irisan kerucut sejati.

(2). Jika titik P diluar suatu irisan kerucut sehingga polarnya akan melalui titik-titik pada garis-garis singgung terhadap irisan kerucut dari P .

Bukti :

(1) Misal irisan kerucut sejati adalah lingkaran $O(r)$ dan P_1 didalam lingkaran $O(r)$. P_2 menyinggung pada irisan kerucut atau pada lingkaran. P_3 tidak memotong irisan kerucut atau diluar lingkaran.



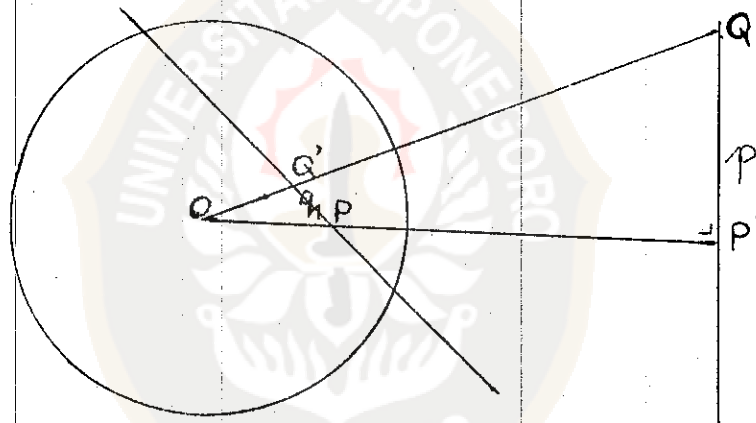
(2). P_3 titik diluar irisan kerucut, maka terbukti dari gambar (2b) bahwa polarnya akan melalui P_2 yang merupakan garis-garis singgung dari irisan kerucut.

Theorema (3.2.6)

(1). Jika untuk kerucut sejati, polar suatu P melalui Q , maka polar Q melalui P .

(2). Jika untuk irisan kerucut sejati, kutub dari garis p terletak pada garis q , maka kutub q terletak pada p .

(3). Jika untuk irisan Kerucut sejati, P dan Q adalah kutub dari p dan q , maka kutub pada garis PQ adalah titik perpotongan p dan q .



Bukti :

(1). Misal P dan Q adalah titik sembarang dan P' invers dari P , dan Q' invers dari Q , maka $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$ dan sudut $PP'Q$ sama dengan sudut $PQ'O$. Q polar dari P , sudut $PP'Q$ adalah siku-siku, untuk sudut $PQ'O$ siku-siku dan P polar Q . Jika $P' = Q$ maka theorema terbukti.

(2). Misal P dan Q kutub dari p dan q . q yang merupakan polar dari Q melalui P menurut (1) p polar dari P sedemikian hingga melalui Q .

(3). Misal p dan q berpotongan di R , maka polar P melalui R , polar Q melalui P sedemikian hingga polar R melalui Q yang berarti PQ polar dari R .

Definisi :

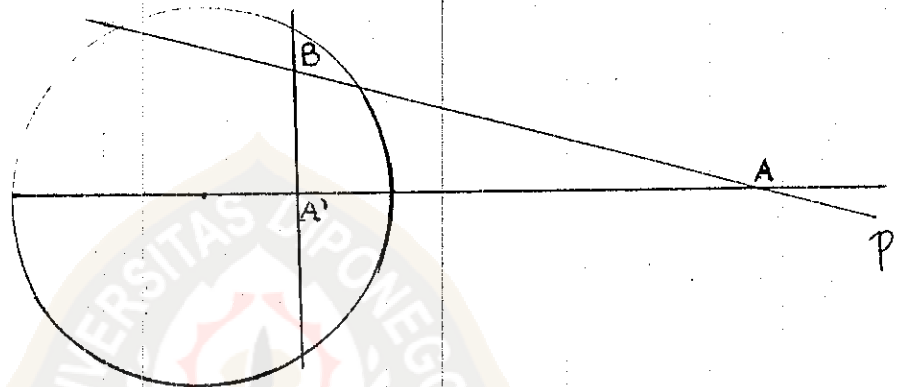
Dua titik masing-masing terletak pada polarnya untuk irisan kerucut sejati, disebut titik 'Conjugate' dari irisan kerucut sejati. Dua garis masing-masing melalui kutub dari yang lainnya untuk suatu irisan kerucut sejati, disebut garis Conjugate pada irisan kerucut sejati.

Akibatnya :

- (1). Untuk setiap titik pada suatu garis mempunyai titik Conjugate pada garis tersebut.
- (2). Untuk setiap garis yang Conjugate melalui titik.
- (3). Dua titik Conjugate pada suatu garis memotong irisan kerucut yang satu didalam dan yang lain diluar dari suatu irisan kerucut tersebut.
- (4). Dua garis Conjugate tertentu berpotongan diluar irisan kerucut, yang satu memotong irisan kerucut dan yang lain tidak.
- (5). Sembarang titik pada irisan kerucut sejati, Conjugate terhadap semua titik pada garis singgung irisan kerucut di titik tersebut.
- (6). Sembarang garis singgung pada irisan kerucut adalah Conjugate semua garis yang melalui titik.

Theorema (3.2.8)

Jika untuk suatu irisan kerucut sejati, dua titik conjugate terletak pada suatu garis yang memotong pada irisan kerucut, maka mereka akan dipisahkan secara harmonik oleh titik-titik potongnya.

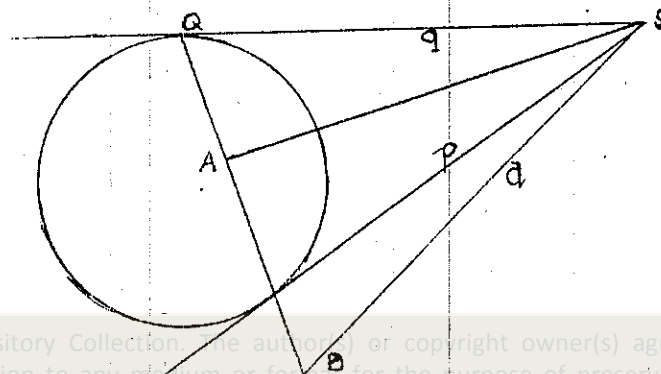


Bukti :

Misal A dan B adalah dua titik pada garis p, dan A' invers dari A dalam lingkaran, jika $B=A'$, untuk $B \neq A'$, yang mana $A'B$ polar dari A dan sudut $AA'B$ siku-siku, maka menurut theorema (3.2.4) A dan B dipisahkan secara harmonis oleh titik potongnya.

Theorema (3.2.9)

Jika untuk suatu irisan kerucut sejati, dua garis conjugate berpotongan diluar irisan kerucut sejati, mereka dipisahkan secara harmonis oleh garis-garis singgung pada irisan kerucut dari titiknya.



Bukti :

Misalkan a dan b suatu garis yang berpotongan dititik S , a dan b adalah garis conjugate untuk lingkaran, kutub A dari garis a terletak pada b , dan kutub B dari garis b terletak pada garis a , menurut theorema (3.2.6.(3)) garis AB polar dari S dan harus melalui titik P dan Q , A dan B tidak conjugate maka menurut theorema (3.2.8) menyatakan bahwa $(AB, PQ) = -1$, dan juga untuk $(ba, pq) = -1$

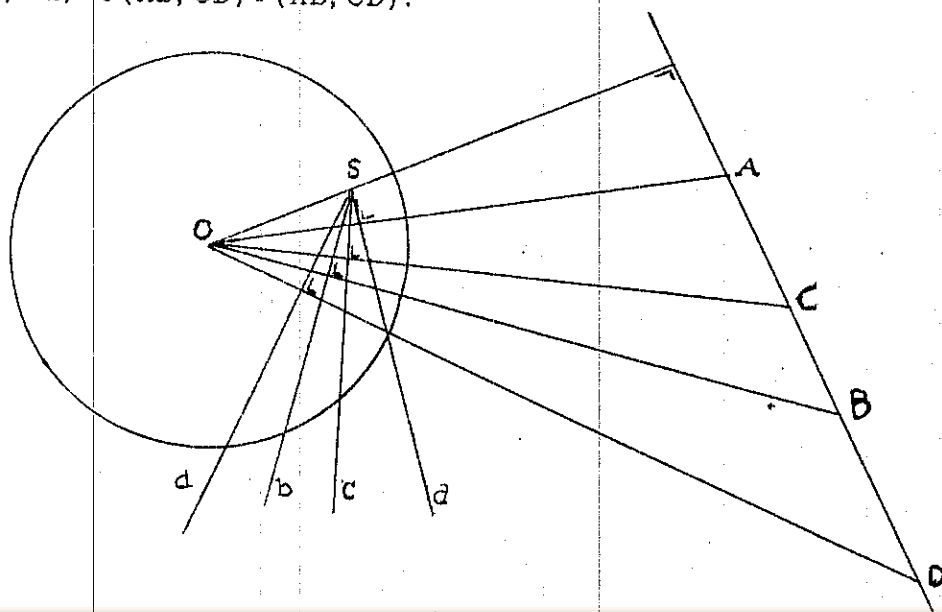
Theorema (3.2.10)

Jika A, B, C, D empat titik kolinier yang berlainan, dan a, b, c, d adalah polar-polar pada irisan kerucut sejati, maka $(AB, CD) = (ab, cd)$.

Bukti :

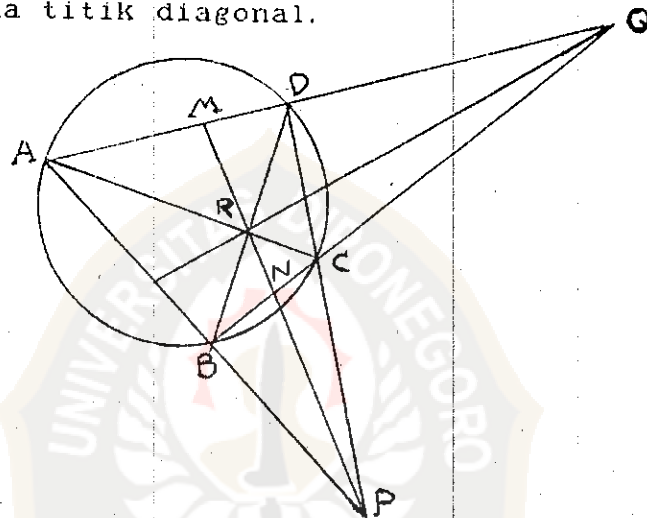
a, b, c, d adalah polar terhadap S , garis $ABCD$ kutub terhadap $O(1. b)$

$(ab, cd) = O(AB, CD) = (AB, CD)$.



Theorema (3.2.11)

Jika ABCD adalah segi empat lengkap tertentu dari suatu irisan kerucut sejati, maka tiap-tiap titik diagonal dari segi empat lengkap adalah kutub, untuk irisan kerucut tersebut, dari garis yang ditentukan oleh dua titik diagonal.

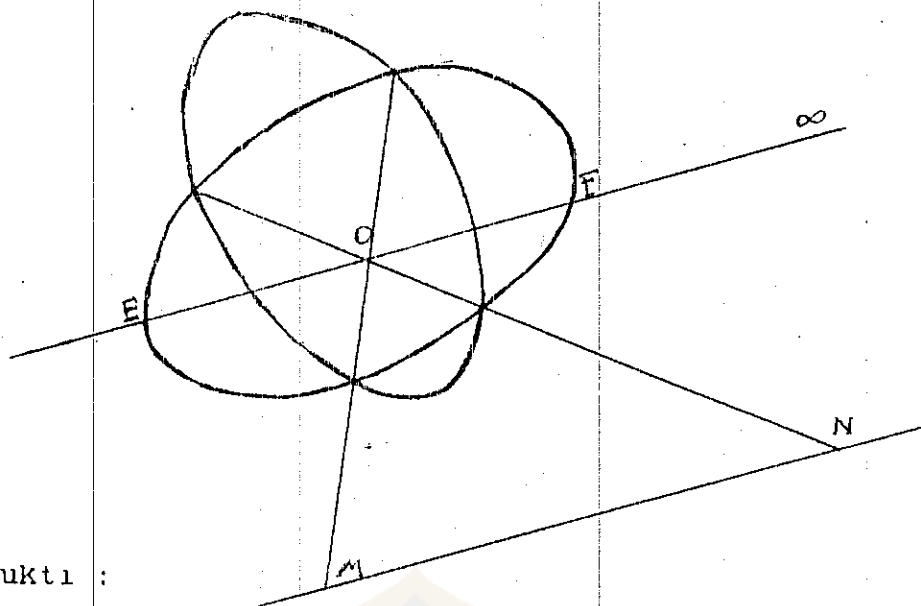


Bukti :

Misal irisan kerucut adalah sebuah lingkaran, segi empat lengkap dalam suatu lingkaran tersebut adalah ABCD. $(AD, MQ) = (BC, NQ) = -1$ dengan melihat theorema (3.2.8) garis PR polar dari titik Q, sedangkan QR polar dari titik P, menurut theorema (3.2.6(3)) bahwa garis PQ adalah polar dari titik R.

1. Theorema Butterfly.

Jika titik O merupakan titik tengah garis RS pada suatu irisan kerucut sejati C_1 , misalkan dua garis yang lain TU dan VW melalui O, dan misalkan suatu irisan kerucut C_2 melalui U, V, T, W memotong garis di E dan F, maka O adalah titik tengah dari EF (1.2).

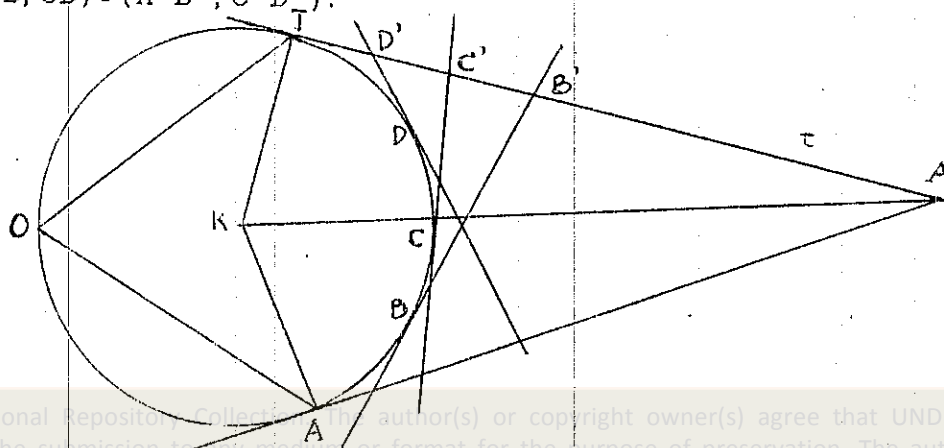


Bukti :

MN, polar dari O pada irisan kerucut C_1 , memotong TU di M dan VW di N, maka $(VW, ON) = (TU, OM) = -1$, MN juga polar dari O pada irisan kerucut C_2 , dan RS sejajar MN maka $(RS, O\infty) = (EF, O\infty) = -1$ dan O adalah titik tengah pada EF (3.10.3)

2. Theorema Chasles'.

A, B, C, D adalah empat titik pada suatu irisan kerucut dan misalkan garis singgung dari irisan kerucut pada titik yang melalui titik-titik A, B, C, D berpotongan dengan garis singgung tetap t dari irisan kerucut di titik A', B', C', D' sehingga jika O merupakan sembarang titik pada irisan kerucut sejati, maka $O(AB, CD) = (A'B', C'D')$.



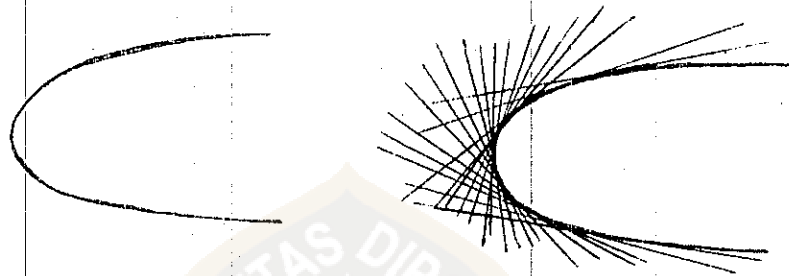
Bukti :

Misalkan irisan kerucut sejati adalah lingkaran, misalkan K pusat lingkaran dan T titik singgung pada garis singgung t dimana sudut $A'TK$ adalah setengah dari sudut AKT dan terbukti bahwa pencils $O(AB, CD)$ dan $K(A'B', C'D')$ adalah konkuren, dan $O(AB, CD) = K(A'B', C'D') = (A'B', C'D')$



III. 3. IRISAN KERUCUT SEJATI SEBAGAI SELUBUNG GARIS.

Kurva adalah tempat kedudukan titik-titik-
disebut suatu kurva titik, atau sebagai suatu selubung
dari garis-garis singgungnya maka disebut kurva garis.



Notasi : Perbandingan dari empat titik yang
berbeda, yang merupakan titik-titik potong dari suatu
garis u dengan garis lain a, b, c, d yang dinyatakan
dengan $u(a, b, c, d)$, $u(a)$ didefinisikan titik dengan basis
 u yang dipotong oleh garis a .

Theorema (3. 3. 1).

Jika a, b, c, d adalah empat garis singgung yang
berbeda dari suatu irisan kerucut sejati dan u, v adalah
dua garis singgung sembarang dari irisan kerucut sejati
maka $u(ab, cd) = v(ab, cd)$, dengan $u(a)$, misalkan, diambil
sebagai titik singgung dari garis singgung a , jika u
berimpit dengan a .

Bukti : Akibat langsung dari Theorema Chasles.

Theorema (3. 3. 2)

Jika p adalah suatu garis singgung variabel (yang
bergerak) dari suatu irisan kerucut sejati, dan jika
dua garis singgung sembarang dari irisan kerucut u, p

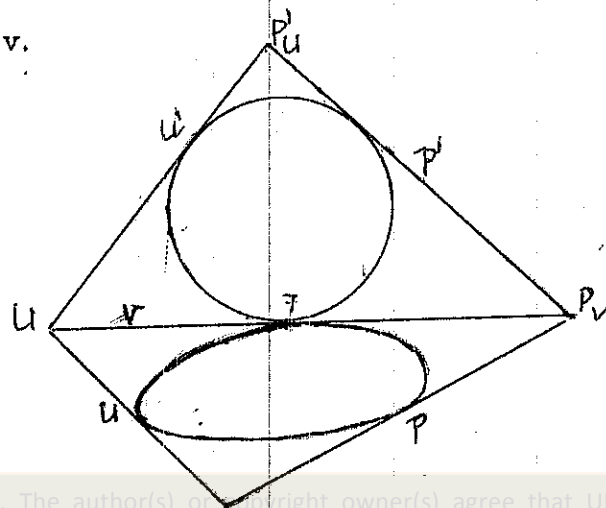
maka range lengkap $u(p)$ dan $v(p)$ adalah homografik dan karenanya titik $u(v)$ tidak berkorespondensi dengan titik $v(u)$.

Bukti :

Jika p_1, p_2, p_3, p_4 kedudukan dari p yang berbeda, maka mengingat theorema (3.3.1) bahwa $u(p_1 p_2, p_3 p_4) = v(p_1 p_2, p_3 p_4)$, jadi range lengkap $u(p)$ dan $v(p)$ homografik. Juga titik $u(v)$ tidak berkorespondensi dengan titik $v(u)$, karena jika keduanya berkorespondensi, menurut theorema (2.4.2(1)) selubung dari p akan merupakan suatu titik, padahal tidak mungkin, karena selubung dari p adalah irisan kerucut sejati.

Theorema (3.3.3)

Selubung dari garis-garis yang menghubungkan titik-titik yang berkorespondensi dari dua range homografik, pada basis u dan v yang berbeda, dengan titik $u(v)$ tidak berkorespondensi dengan titik $v(u)$ maka disebut suatu irisan kerucut sejati yang menyinggung u dan v .

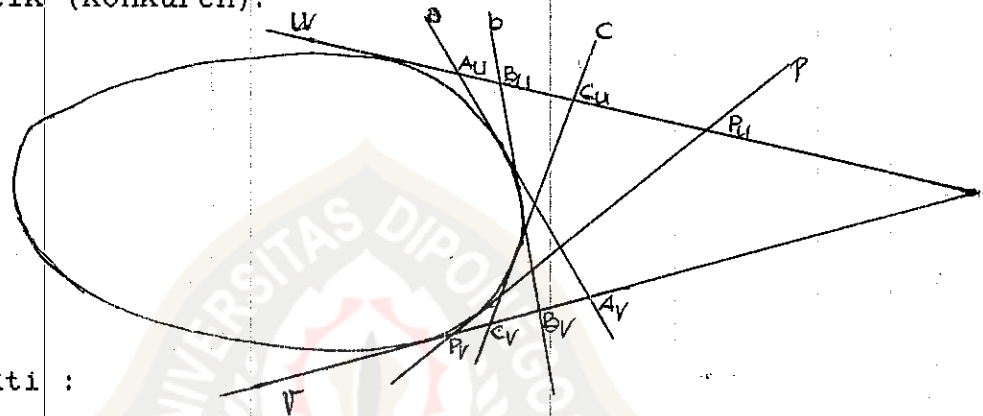


Bukti :

Misal p adalah suatu garis variabel dari suatu selubungnya dan p memotong u di P_u dan memotong v di P_v , maka range P_u dan P_v adalah homografi. Misalkan U adalah titik perpotongan garis u dan v dan T pada v berkorespondensi dengan U pada u . Diketahui T tidak berimpit dengan U . Kita buat sembarang lingkaran yang menyinggung v di T dan u' , p' merupakan garis-garis singgung lain terhadap U dan P_v ke lingkaran tersebut. Perpotongan u' dan p' dinyatakan oleh P_u' , karena range (U, P_u) dan (T, P_v) adalah homografik, menurut theorema (3.3.2) maka range (T, P_v) dan (U, P_u') homografik, sehingga (U, P_u) dan (U, P_u') adalah range homografik. Kita putar lingkaran tersebut dengan garis singgung u' dan p' terhadap garis v , dan misalkan u'', p'', P_u'' menyatakan posisi baru dari u', p', P_u' , maka range (U, P_u) dan (U, P_u'') adalah homografik, titik rangenya U berkorespondensi dengan dirinya sendiri, maka dengan theorema (2.4.2(1)) garis variabel P_u, P_u'' melalui suatu titik tertentu O . Dengan O sebagai pusat prespektifitas, kita lihat bahwa garis variabel p'' diproyeksikan ke garis variabel p terhadap garis p'' yang menyelubungi suatu lingkaran dan menyinggung garis u', u'' jadi p pasti menyelubungi suatu irisan kerucut sejati yang menyinggung garis u dan v .

Theorema (3.3.4)

Terdapat satu dan hanya satu garis singgung irisan kerucut yang menyinggung lima garis bidang yang berbeda dengan tiga diantaranya tidak melalui satu titik (konkuren).



Bukti :

Misal lima garis tersebut adalah u, v, a, b, c , ambil u dan v sebagai basis dari range-rangennya, a, b, c memotong u, v di A_u, B_u, C_u dan A_v, B_v, C_v untuk menghasilkan range homografik maka ambil sembarang titik P_u pada u dan P_v pada v demikian hingga $(A_u B_u, C_u P_u) = (A_v B_v, C_v P_v)$ yang mana A_u dan A_v , B_u dan B_v , C_u dan C_v adalah titik-titik yang bersesuaian, mengingat theorema (3.2.3) titik $u(v)$ tidak bersesuaian dengan titik $v(u)$ karena tidak ada 3 dari 5 garis yang konkuren. selubung dari $P_u P_v$ adalah suatu irisan kerucut sejati yang menyinggung 5 garis a, b, c, u, v hal ini jelas, karena garis singgung lain misal p pada suatu irisan kerucut sejati yang menyinggung u, v, a, b, c yang melalui sembarang titik P_u dari u tertentu dengan tunggal sebagai garis hubung $P_u P_v$ dengan

$(A_u B_u, C_u P_u) = (A_v B_v, C_v P_v)$, sehingga semua irisan kerucut

sejati yang menyinggung, v, a, b, c merupakan selubung dari garis variabel p yang sama. Jadi semua irisan kerucut sejati berimpit.



III. 4. RESIPROKASI DAN DASAR DUALITAS

Definisi .

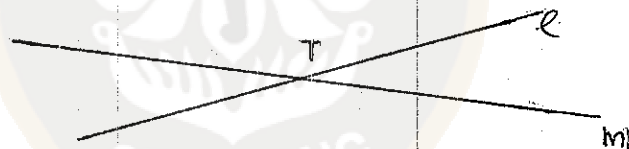
Dualitas adalah pergantian suatu titik dengan garis dan garis dengan titik.

Contoh :

1). Dua titik menentukan satu dan hanya satu garis yaitu garis yang penghubung dua titik tersebut.



2). Duagaris menentukan satu dan hanya satu titik yaitu perpotongan duagaris melalui titik tersebut.

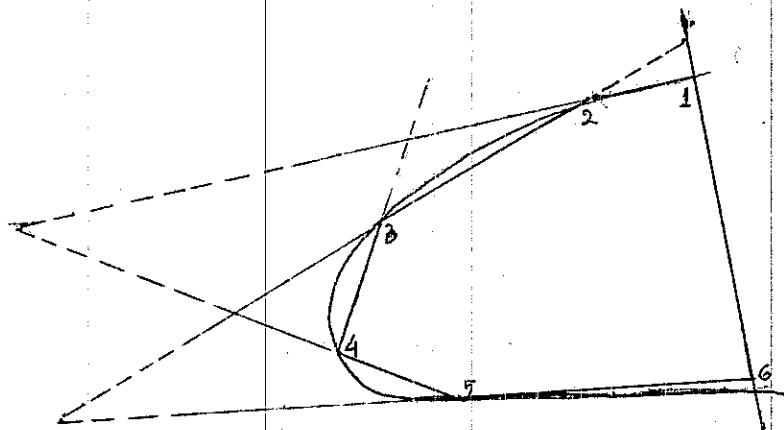


Theorema Pascals (3. 4. 1)

Jika 6 titik 1, 2, 3, 4, 5, 6 terletak pada suatu irisan kerucut sejati, maka titik-titik tersebut ditentukan oleh 3 pasang garis yaitu $(1, 2), (4, 5); (2, 3), (5, 6); (3, 4), (6, 1)$.

Dengan dualitasnya didapatkan :

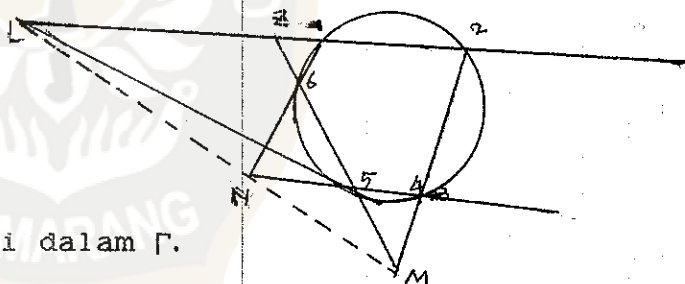
Jika enam garis 1, 2, 3, 4, 5, 6 terletak pada irisan kerucut sejati, maka garis tersebut ditentukan oleh 3 pasang titik $(1, 2), (4, 5); (2, 3), (5, 6); (3, 4), (6, 1)$.



Theorema Brianchons (3.4.2)

Jika suatu segienam dalam suatu irisan kerucut sejati, maka titik-titik perpotongan adalah tiga pasangan sisi-sisinya kolinier (gb 3.4.2.1)

Jika suatu segienam membatasi dalam irisan kerucut sejati, maka garis-garis yang menghubungkan tiga garis yang bertemu akan konkuren.



Definisi Resiprokasi dalam Γ .

Γ suatu irisan kerucut sejati tertentu, maka transformasi yang memetakan setiap titik P dari bidang perluasan kedalam garis polar p' dan setiap garis p dalam bidang perluasan kedalam kutub P' terhadap Γ , disebut Resiprokasi dalam Γ .

Theorema (3.4.3).

1). suatu kurva titik resiprokasi kedalam sebuah kurva garis.

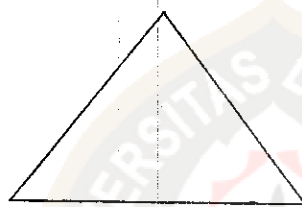
2). Sebuah garis (sebagai daerah titik-titik kolinier) resiprokasi ke suatu titik (suatu pencils dari garis konkuren).

3). Dasar suatu irisan kerucut sejati ke dirinya sendiri.

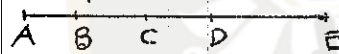
4). Resiprokasi dalam suatu dasar dari irisan kerucut sejati bersifat selubung.

Bukti :

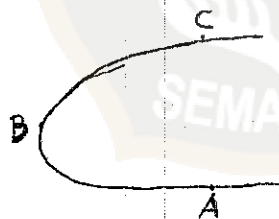
1).



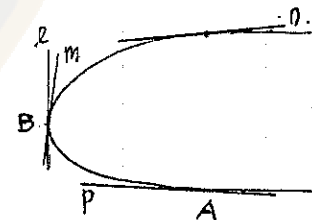
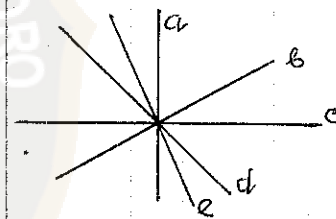
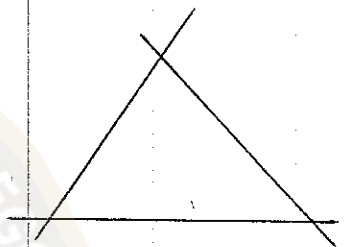
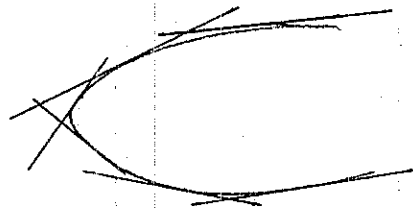
2).



3).

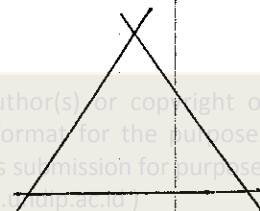
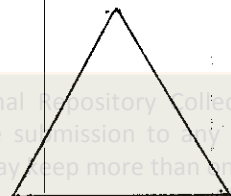


4).



Theorema (3.4.2).

Sebuah irisan kerucut sejati mereprokasi kedalam sebuah irisan kerucut sejati.



Misalkan sebuah irisan kerucut merupakan tempat kedudukan dari titik P yang merupakan perpotongan garis-garis dari dua pencils, pada titik potong tertentu meresiprokasi kedalam dua jarak pada basis tertentu, berarti bahwa resiprokasi di segitiga merupakan selubung dari pertemuan P' dari titik-titik yang berhubungan dua jarak, maka menurut theorema (3.3.3) bahwa reprokasi dari irisan kerucut sejati merupakan sebuah irisan kerucut.

