BAB II

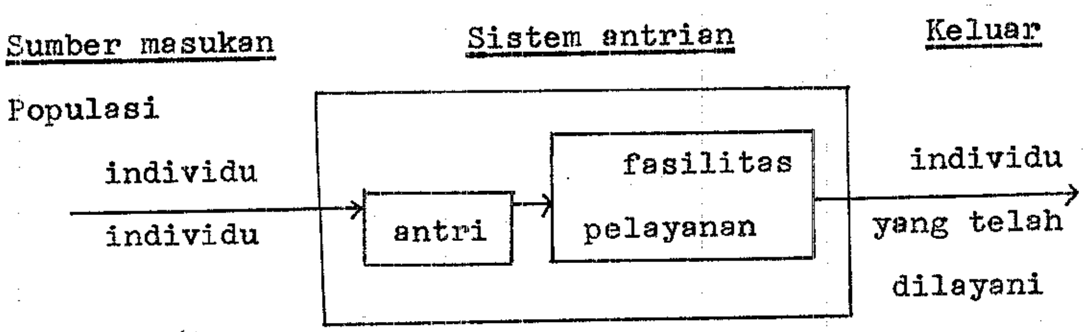
LANDASAN TEORI

2.1. BENTUK PRAKTIS MASALAH ANTRIAN

2.1.1. TUJUAN

Model-model antrian mempunyai tujuan dasar,yaitu untuk meminimumkan dua biaya,yaitu biaya langsung dan biaya tak langsung.Biaya langsung adalah biaya penyediaan fasilitas pelayanan dan biaya tak langsung adalah biaya yang timbul karena para individu harus menunggu untuk dilayani.Bila biaya langsung lebih dari jumlah optimal,maka pelayanan akan tertunda.

Model antrian yang paling sederhana adalah Model Single Channel.Dikatakan Single Channel karena sistim ini mempunyai antrian tunggal dan sebuah fasilitas pelayanan tunggal.



Gambar 1 : Model Single Channel

2.1.2. SUMBER MASUKAN (INPUT)

Suatu sistim antrian selalu mempunyai sumber masukan yang bisa berupa suatu populasi orang,barang,komponen atau kertas kerja yang datang pada sistim untuk dilayani.

besar dibanding dengan kapasitas sistem pelayanan.
Sebagai contoh,suatu populasi sejumlah 5.000 orang akan menjadi populasi yang besar bagi sebuah pengecer tetapi tidak demikian halnya bagi 100 supermarket yang ada.

2.1.3. POLA KEDATANGAN (ARRIVAL PATERN)

Pola kedatangan (Arrival Patern) adalah cara individu-individu dari populasi memasuki sistim.Tingkat kedatangan (Arrival Rate) dari individu-individu yaitu berapa banyak individu-individu yang datang per periode waktu bisa konstan ataupun acak/random. Tingkat kedatangan produk yang bergerak sepanjang lini produksi mungkin konstan,sedang pada telephone calls tingkat kedatangannya sering mengikuti suatu distribusi probabilitas Poisson.

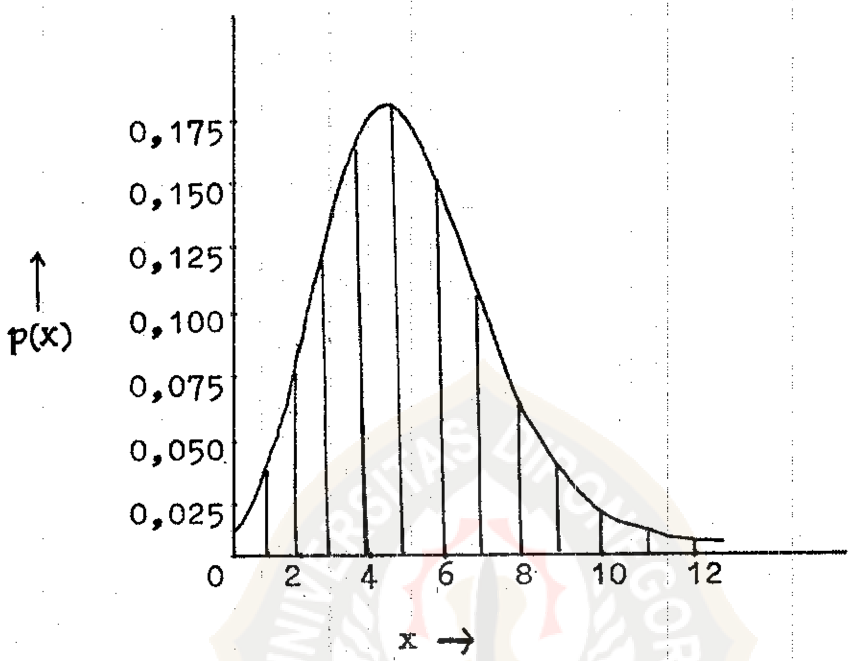
Pola kedatangan yang paling sering (umum) bila kedatangan-kedatangan didistribusikan secara random adalah distribusi probabilitas Poisson,karena distribusi Poisson menggambarkan jumlah kedatangan per unit waktu bila sejumlah besar variabel-variabel random mempengaruhi tingkat kedatangan.

Bila pola kedatangan individu-individu mengikuti suatu distribusi Poisson, maka waktu antar kedatangan (inter - arrival time) setiap individu adalah random dan mengikuti suatu distribusi Exponential.

Individu-individu (orang-orang, komponen, produk atau kertas kerja) mempunyai perilaku yang bervariasi dalam memasuki suatu sistim.

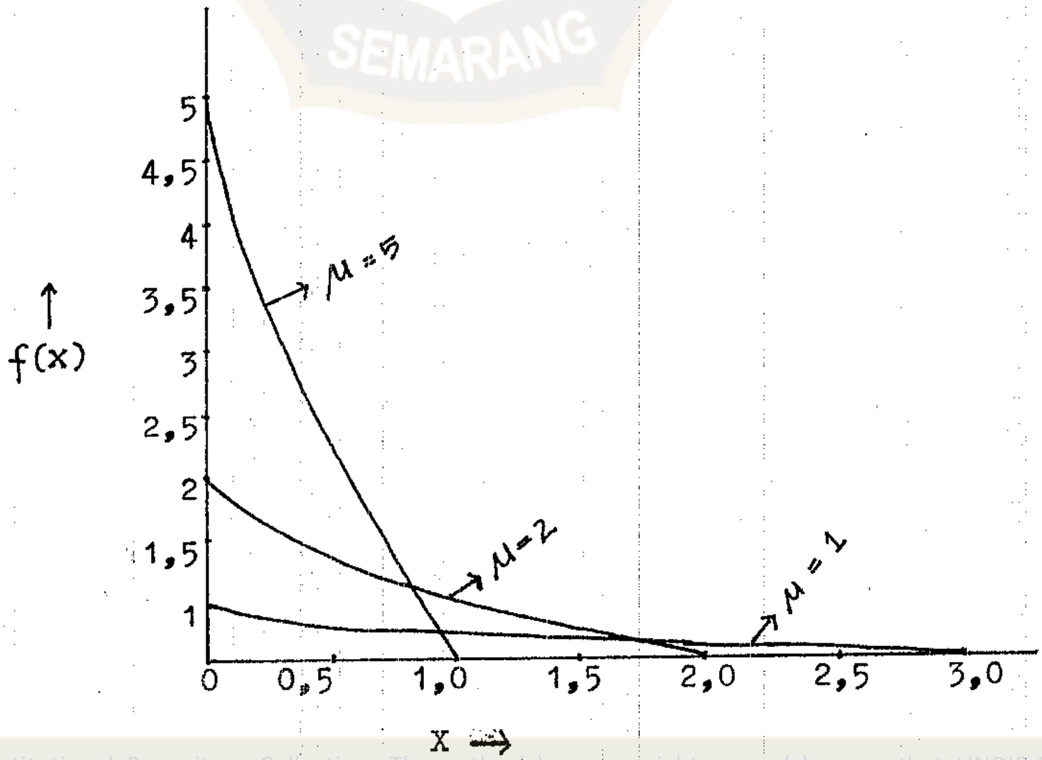
Perilaku penolakan (bulking) adalah bila individu atau orang memasuki sistem antrian, dan kemudian meninggalkan antrian karena antrian relatif panjang.

Perilaku bulk arrivals adalah variasi pola kedatangan suatu kelompok individu. yaitu bila lebih dari satu individu memasuki suatu sistem seketika secara bersama-sama.



Gambar 2 : Distribusi probabilitas Poisson

untuk $\lambda = 5$; $p(X) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X\,!}$



Gambar 3 : Distribusi Exponential

$f(X) = \mu\, e^{-\mu x}$

2.1.4. DISIPLIN ANTRIAN

Disiplin antrian (Queue Discipline) adalah pedoman keputusan untuk menseleksi individu-individu yang memasuki antrian yang akan dilayani terlebih dahulu (prioritas).

Pedoman dalam disiplin antrian yang paling umum adalah Datang Pertama Dilayani Dahulu (First Come First Served). Ada juga disiplin antrian yang lain seperti : Datang Terakhir Dilayani Dahulu (Last Come First Served) ; Waktu Pelayanan Terpendek (Shortest Operating (Service) Time)); Waktu Pelayanan Terpanjang (Longest Operating (Service) Time)) dan lain-lain.

Suatu rumah sakit mungkin punya pedoman seperti : pasien dalam kondisi darurat harus dilayani terlebih dahulu (Critical Condition First).

Model antrian dalam masalah ini dibatasi untuk disiplin antrian Datang Pertama Dilayani Dahulu (First Come First Served).

2.1.5. KEPANJANGAN ANTRIAN

Kepanjangan antrian dimaksudkan sebagai jumlah individu-individu yang antri untuk dapat memasuki sis - tim antrian. Kepanjangan antrian dikatakan terbatas (finite) bila kapasitas antrian menjadi faktor pembatas besarnya jumlah individu yang dapat dilayani dalam sistim secara nyata. Sebagai contoh,sistim yang punya antrian terbatas adalah jumlah tempat parkir atau stasion pelayanan, jumlah tempat tidur dirumah sakit, atau jumlah tempat minum di pelabuhan udara, dan lain-lain.

2.1.6. TINGKAT PELAYANAN

digunakan untuk melayani individu-individu dalam suatu sistem.
Waktu ini mungkin konstan, tetapi mungkin pula acak (ran dom). Bila waktu antar pelayanan mengikuti distribusi Exponential, maka pola pelayanannya mengikuti distribusi Poisson.

Perbedaan distribusi-distribusi waktu pelayanan dapat diliput oleh model-model antrian dengan mudah di - bandingkan dengan perbedaan distribusi waktu kedatangan-nya.

2.1.7. KELUAR (EXIT)

Individu-individu akan keluar (exit) dari sis - tim antrian, setelah mereka selesai dilayani. Sesudah ke luar,dia mungkin bergabung pada satu di antara kategori populasi. Dia mungkin bergabung dengan populasi asal dan mempunyai probabilitas yang sama untuk memasuki sistim kembali, atau mungkin bergabung dengan populasi lain yang punya probabilitas lebih kecil dalam hal kebutuhan pela - yanan tersebut kembali.

2.2. SISTIM DAN STRUKTUR ANTRIAN

2.2.1. SISTIM-SISTIM ANTRIAN

Sistim antrian dapat diklasifikasikan menjadi sis tem yang berbeda-beda. Klasifikasi menurut Hillier dan Lieberman adalah sebagai berikut :

a) Sistim pelayanan komersial
b) Sistim pelayanan bisnis industri
c) Sistim pelayanan transportasi
d) Sistim pelayanan sosial

Sistim pelayanan komersial merupakan aplikasi yang sangat luas dari model-model antrian, seperti restaurant, cafe-

taria, toko-toko, tempat potong rambut (salon), super market, dsb.
Sistim pelayanan bisnis industri dijumpai pada sistim penggudangan, informasi komputer, dsb.
Sistim pelayanan sosial aplikasinya pada sistim-sistim pelayanan yang dikelola oleh kantor-kantor dan jawatan-jawatan lokal maupun nasional, seperti kantor tenaga kerja, kantor registrasi SIM dan STNK, kantor pos, rumah sakit, puskesmas, dsb.

2.2.2. STRUKTUR-STRUKTUR ANTRIAN

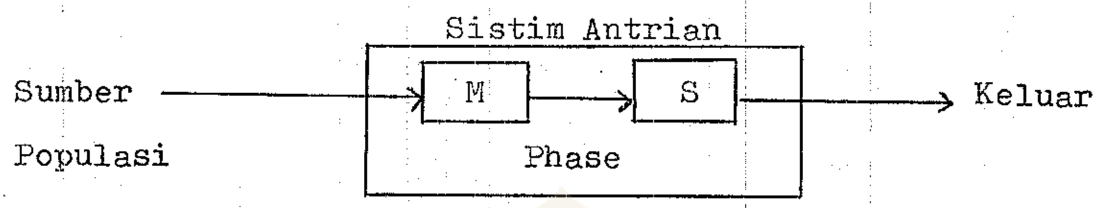
Dalam seluruh sistim antrian dikenal empat model struktur antrian dasar, yang digolongkan berdasarkan sifat proses pelayanannya. Fasilitas-fasilitas pelayanan diklasifikasikan dalam susunan saluran (channel) dan phase (pos pelayanan).
Istilah saluran atau channel berarti jumlah jalur atau tempat untuk memasuki sistim pelayanan (jumlah fasilitas pelayanan).
Istilah phase berarti jumlah station-station pelayanan (pos-pos yang harus dilalui para langganan sebelum pelayanan dikatakan lengkap).

2.2.2.1. SALURAN TUNGGAL POS PELAYANAN TUNGGAL (SINGLE CHANNEL SINGLE PHASE)

Merupakan model struktur antrian yang paling sederhana. Single channel berarti hanya ada satu fasilitas pelayanan atau hanya ada satu jalur untuk memasuki sistim pelayaman.

Single phase berarti hanya ada satu station pelayanan atau sekumpulan tunggal operasi yang dilaksanakan.

Setelah pelayanan selesai, individu-individu keluar dari sistim.
Model antrian Saluran Tunggal Pos Pelayanan Tunggal dapat digambarkan sebagai berikut :



Ketrangan : M = Antrian

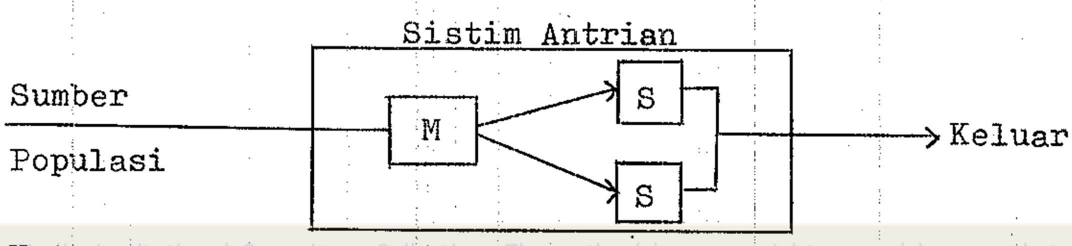
S = Server (Fasilitas Pelayanan)

Gambar 4 : Saluran Tunggal Pos Pelayanan Tunggal

Contohmodel antrian ini terlihat pada sebuah toko dengan seorang pelayan toko, seorang tukang cukur, pembelian tiket kereta api antar kota kecil yang dilayani oleh satu loket, dsb.

2.2.2.2. SALURAN BANYAK POS PELAYANAN TUNGGAL (MULTI CHANNEL SINGLE PHASE)

Model antrian ini terjadi bila ada antrian tunggal yang dilayani oleh lebih dari satu fasilitas pelayanan. Dapat digambarkan sebagai berikut :



Keterangan : M = Antrian

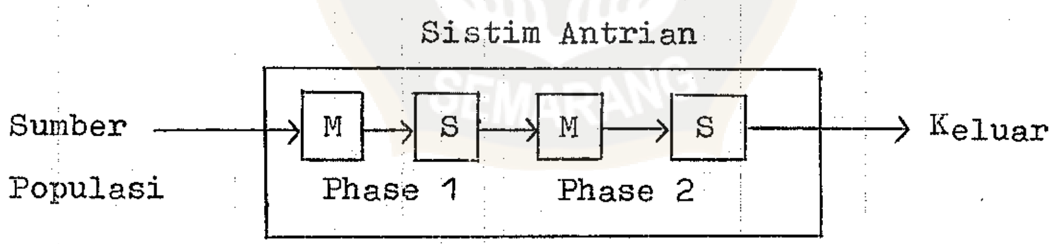
S = Server (Fasilitas Pelayanan)

Gambar 5 : Saluran Banyak Pos Pelayanan

Contoh model antrian ini adalah : sebuah salon dengan beberapa tukang potong, pembelian tiket oleh beberapa loket, sebuah toko dengan beberapa pelayan toko, dsb.

2.2.2.3. SALURAN TUNGGAL POS PELAYANAN BANYAK
(SINGLE CHANNEL MULTI PHASE)

Istilah single channel menunjukkan bahwa hanya ada satu fasilitasvpelayanan atau hanya ada satu jalur untuk memasuki sistim pelayanan.
Istilah multi phase berarti ada lebih dari satu pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan dalam phase-phase.
Model antrian Saluran Tunggal Pos Pelayanan Banyak dapat digambarkan sebagai berikut :



Keterangan : M = Antrian
S = Server (Fasilitas Pelayanan)

Gambar 6 : Saluran Tunggal Pos Pelayanan Banyak

Contoh model antrian ini adalah, pencucian mobil, tukang cat mobil, sistim penggudangan ,dsb.
Arus kedatangan produk rokok ke gudang dan penyaluran produk rokok keluar dari gudang Perusahaan Rokok Siyem & Mandala Semaranghanya mempunyai satu jalur untuk memasuki sistim pelayanan dan ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan (dalam phase -

Pos Pelayanan Banyak (Single Channel Multi Phase).
Rumus-rumus model antrian yang dipakai pada model antrian Saluran Tunggal Pos Pelayanan Banyak, adalah sbb :

Theorema 1 : $$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}}$$

di mana : P_n = probabilitas jumlah individu dalam sistim

Q = panjang antrian dan ruang pelayanan

λ = jumlah rata-rata keadatangan

μ = jumlah rata-rata penyaluran

BUKTI :

Model antrian Saluran Tunggal Pos Pelayanan Banyak adalah termasuk model antrian Poisson, karena pola kedatangannya dan pola kepergiannya mengikuti distribusi Poisson (waktu antar kedatangan dan waktu antar pelayanan Exponential).

Tabel 1 :

Empat kejadian yang mungkin terjadi
untuk P_n(t+h) dengan $n > 0$

Kejadian	Probabilitas ada n langganan pada sistim pada saat (t)	Adanya antrian dalam sistim pada (t+h)	Kedatangan pada interval waktu (t) hingga (t+h)	Kepergian pada interval waktu (t) hingga (t+h)
1	P_n	n	1	1
2	P_{n-1}	n	1	0
3	P_{n+1}	n	0	1
4	P	n	0	0

Keterangan :

P_n = probabilitas ada n langganan dalam sistim dalam keadaan steady state (sistim dikatakan st steady state jika sifat-sifat dari sistim tersebut tidak berubah-ubah menurut perubahan waktu atau sistim tak tergantung pada waktu).

$P_n(t)$ = probabilitas ada n langganan dalam sistim pada saat (t).

$P_n(t+h)$ = probabilitas ada n langganan dalam sistim pada saat (t+h).

Maka :

$$P_n(t+h) = P_n(t)(\lambda_n h)(\mu_n h) + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} h)(1-\mu_{n-1} h)$$
$$+ P_{n+1}(t)(1-\lambda_{n+1} h)(\mu_{n+1} h)$$
$$+ P_n(t)(1-\lambda_n h)(1-\mu_n h)$$

$$P_n(t+h) = P_n(t)(\lambda_n h)(\mu_n h) + P_n(t)(1-\lambda_n h)(1-\mu_n h) +$$
$$P_{n+1}(t)(1-\lambda_{n+1} h)(\mu_{n+1} h) +$$
$$P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} h)(1-\mu_{n-1} h)$$

$$P_n(t+h) = P_n(t)(\mu_n \lambda_n h^2) + P_n(t) - P_n(t)(\mu_n h) +$$
$$P_{n+1}(t)(1-\lambda_{n+1} h)(\mu_{n+1} h) +$$
$$P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} h)(1-\mu_{n-1} h)$$

$$P_n(t+h) = P_n(t)(\mu_n \lambda_n h^2) + P_n(t) - P_n(t)(\mu_n h)$$
$$- P_n(t)(\lambda_n h) + P_n(t)(\lambda_n \mu_n h^2) +$$
$$P_{n+1}(t)(\mu_{n+1} h) - P_{n+1}(t)(\lambda_{n+1} \mu_{n+1} h^2)$$
$$+ P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} h) - P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \mu_{n-1} h^2)$$

$$P_n(t+h) = P_n(t) - P_n(t)(\mu_n h) - P_n(t)(\lambda_n h)$$
$$+ P \; (t)(\mu \; h) + P \; (t)(\lambda \; h)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(\lambda_n+\mu_n)hP_n(t) + (\mu_{n+1})h\ P_{n+1}(t) +}{h}$$

$$\frac{(\lambda_{n-1})h\ P_{n-1}(t)}{h}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+(\mu_{n+1})P_{n+1}(t)+(\lambda_{n-1})P_{n-1}(t)$$

Untuk $P_0(t+h)$ akan hanya ada satu kejadian dari dua kejadian yang mungkin terjadi.

tabel 2 :

Dua kejadian yang mungkin terjadi untuk P_0 (t+h)

Kejadian	Probabilitas ada n langgan pada sistim pada saat (t)	Adanya antrian dalam sistim pada (t+h)	Kedatangan pada interval waktu (t) hingga (t+h)	Kepergian pada interval waktu (t) hingga (t+h)
1	P_0	0	0	-
2	P_1	0	0	1

Maka :

$$P_0(t+h) = (1-\lambda_0 h)P_0(t) + (\mu_1)hP_1(t)$$

$$P_0(t+h) - P_0(t) = -(\lambda_0)hP_0(t) + (\mu_1)hP_1(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h}$$

$$\lim \quad -(\lambda_0)hP_0(t) + (\mu_1)hP_1(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda_0)P_0(t) + (\mu_1)P_1(t)$$

Maka untuk n = 0 didapat persamaan differential :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda_0)P_0(t) + (\mu_1)P_1(t)$$

untuk n = 1,2,3,...

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+(\mu_{n+1})P_{n+1}(t)+(\lambda_{n-1})P_{n-1}(t)$$

Untuk menyelesaikan kedua persamaan differensial tersebut di atas digunakan sistim steady state, dimana $P_n(t)$ tak lagi tergantung terhadap waktu dan $\frac{dP_n(t)}{dt}$ mendekati nol.

Dalam keadaan steady state, kedua persamaan differensial menjadi : untuk n = 0

$$0 = -(\lambda_0)P_0 + (\mu_1)P_1 \qquad \text{..........(i)}$$

untuk n = 1,2,3,...

$$0 = -(\lambda_n+\mu_n)P_n+(\mu_{n+1})P_{n+1}+(\lambda_{n-1})P_{n-1} \qquad \text{.......(ii)}$$

Model antrian Saluran Tunggal Pos Pelayanan Banyak mempunyai kapasitas antrian terbatas/finite sebanyak Q dan jika kapasitas antrian telah penuh, maka kedatangan dianggap tak ada lagi.

Untuk model ini c =1 (karena jumlah saluran hanya 1)

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda \\ 0 \end{cases} \quad \text{dan} \quad \mu_n = \begin{cases} \mu & ;\ \text{untuk } n=0,1,2,\ldots,Q-1 \\ 0 & ;\ \text{untuk } n=Q,Q+1,Q+2?\ldots \end{cases}$$

Persamaan (i) berlaku : $0=-(\lambda)P_0+(\mu)P_1$ .....(iii)

(ii) menjadi : $0=-(\lambda+\mu)P_n+(\mu)P_{n+1}+(\lambda)P_{n-1}$

.............(iv)

untuk n = 1,2, ..., Q

Dari persamaan (iii) diperoleh harga P_1 , yaitu :

$$0 = -(\lambda)\,P_0 + (\mu)\,P_1$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}\,P_0$$

Dari persamaan (iv) diperoleh , untuk n=1

$$0 = -(\lambda + \mu)P_1 + (\mu)P_2 + (\lambda)P_0$$

$$0 = -(\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\mu})P_0 + (\mu)P_2 + (\lambda)P_0$$

$$-P_2 = \frac{\left[-(\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\mu}) + \lambda\right]P_0}{\mu}$$

$$-P_2 = \frac{\left[-\frac{\lambda^2}{\mu} - \lambda + \lambda\right]P_0}{\mu}$$

$$P_2 = (\frac{\lambda}{\mu})^2\,P_0$$

Dari persamaan (iv)diperoleh,untuk n=2

$$0 = -(\lambda + \mu)P_2 + (\mu)P_3 + (\lambda)P_1$$

$$= -(\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\mu})^2 P_0 + (\mu)P_3 + (\lambda)(\frac{\lambda}{\mu})P_0$$

$$-P_3 = \frac{\left[-\frac{\lambda^3}{\mu} - \frac{\lambda^2}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu}\right]P_0}{\mu}$$

$$-P_3 = -\frac{\lambda^3}{\mu^3}\,P_0$$

$$P_3 = (\frac{\lambda}{\mu})^3\,P_0$$

Sehingga secara umum : $P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n\,P_0$

untuk n = 0,1,2,...,Q

$$\sum_{n=0}^{Q} P_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{Q} (\frac{\lambda}{\mu})^n\,P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{Q} (\frac{\lambda}{\mu})^n}$$

$$P_0 = \frac{1}{\dots (\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}$$

$$P_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - (\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}$$

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0$$

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - (\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}$$

Jadi theorema terbukti.

Theorema 2 :

$$n_t = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{1-(Q+1)(\frac{\lambda}{\mu})^Q + Q(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}{\left[1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}\right](1-\frac{\lambda}{\mu})}\right]$$

di mana : n_t = jumlah rata-rata individu dalam sistim

λ = jumlah rata-rata kedatangan

μ = jumlah rata-rata kepergian/penyaluran

Q = panjang antrian dan ruang pelayanan

BUKTI :

Jumlah rata-rata individu dalam sistim didefinisikan sebagai nilai harapan panjang antrian dalam sistim, sehingga didapatkan :

$$n_t = \sum_{n=1}^{Q} n\, P_n$$

$$n_t = \sum_{n=1}^{Q} n \left[\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}\right](\frac{\lambda}{\mu})^n$$

$$= \left[\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}\right] \sum_{n=1}^{Q} n\,(\frac{\lambda}{\mu})^n$$

$$= \left[\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}\right]\left[1.\frac{\lambda}{\mu} + 2.(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \ldots + Q(\frac{\lambda}{\mu})^Q\right]$$

Misal : $\left[1.\frac{\lambda}{\mu} + 2.(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \ldots + Q(\frac{\lambda}{\mu})^Q\right] = S_1$

$$S_1 = 1.\frac{\lambda}{\mu} + 2.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 3.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \ldots + Q.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q$$

$$S_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \ldots + (Q-1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q \quad -$$

$$S_1 - S_2 = \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q$$

$$S_1 - S_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$S_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + 3.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 + \ldots + (Q-1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q$$

$$S_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + 2.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 + \ldots + (Q-2)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q \quad -$$

$$S_2 - S_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q$$

$$S_2 - S_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q-1}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$S_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + 2.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 + 3.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 + \ldots + (Q-3)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q$$

$$S_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 + 2.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 + \ldots + (Q-4)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q \quad -$$

$$S_3 - S_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q$$

$$S_3 - S_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q-2}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

Dengan metoda yang sama akan didapatkan :

$$S_{Q-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q-1} + 2.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q$$

$$S_Q = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q \quad -$$

$$S_{Q-1} - S_Q = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q-1} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q-1}\left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$S_Q = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q\left[\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$S_1 = (S_1 - S_2) + (S_2 - S_3) + (S_3 - S_4) + \ldots + (S_{Q-1} + S_Q) + S_Q$$

$$S_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{1-(\frac{\lambda}{\mu})^Q}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right] + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left[\frac{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q-1}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right] +$$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\left[\frac{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q-2}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right] + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q-1}\left[\frac{1-(\frac{\lambda}{\mu})^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$+ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^Q\left[\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$S_1 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}+(\frac{\lambda}{\mu})^2-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}+\ldots+(\frac{\lambda}{\mu})^Q-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$= \frac{(\frac{\lambda}{\mu})+(\frac{\lambda}{\mu})^2+(\frac{\lambda}{\mu})^3+\ldots+(\frac{\lambda}{\mu})^Q-Q(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$= \frac{(\frac{\lambda}{\mu})\left[\frac{1-(\frac{\lambda}{\mu})^Q}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right] - Q(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$= \frac{(\frac{\lambda}{\mu})\left[1-(\frac{\lambda}{\mu})^Q\right] - Q(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}(1-\frac{\lambda}{\mu})}{(1-\frac{\lambda}{\mu})^2}$$

$$S_1 = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{(1-\frac{\lambda}{\mu})^2}\left[1-(\frac{\lambda}{\mu})^Q-Q(\frac{\lambda}{\mu})^Q(1-\frac{\lambda}{\mu})\right]$$

$$n_t = \left[\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}\right]\left[\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{(1-\frac{\lambda}{\mu})^2}\left\{1-(\frac{\lambda}{\mu})^Q-Q(\frac{\lambda}{\mu})^Q(1-\frac{\lambda}{\mu})\right\}\right]$$

$$n_t = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{1-(Q+1)(\frac{\lambda}{\mu})^Q + Q(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}{\left[1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}\right](1-\frac{\lambda}{\mu})}\right]$$

Jadi theorema terbukti.

Theorema 3 : $n_q = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left[\frac{1-Q(\frac{\lambda}{\mu})^{Q-1}+(Q-1)(\frac{\lambda}{\mu})^{Q}}{(1-\frac{\lambda}{\mu})(1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1})}\right]$

di mana : n_q = jumlah rata-rata individu dalam antrian

λ = jumlah rata-rata kedatangan

μ = jumlah rata-rata penyaluran

Q = kepanjangan antrian dan ruang pelayanan

BUKTI :

Jumlah rata-rata banyaknya individu dalam antrian adalah jumlah rata-rata individu dalam sistim yang sedang dilayani dalam saluran/channel, sehingga didapatkan :

$$n_q = \sum_{n=c+1}^{Q} (n-c)\, P_n$$

di mana c = saluran/channel

Model Saluran Tunggal Pos Pelayanan Banyak mempunyai saluran tunggal, sehingga c = 1

$$\begin{aligned}
n_q &= \sum_{n=c+1}^{Q} (n-c)\, P_n \\
&= \sum_{n=2}^{Q} (n-1)\, P_n \\
&= \sum_{n=2}^{Q} nP_n - \sum_{n=2}^{Q} P_n \\
&= \sum_{n=1}^{Q} nP_n - P_1 - (P_2 + P_3 + \dots + P_Q) \\
&= \sum_{n=1}^{Q} nP_n - P_1 - (1 - P_0 - P_1) \\
&= n_t - (1 - P_0) \\
&= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{1-(Q+1)(\frac{\lambda}{\mu})^{Q}+Q(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}{\left[1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}\right](1-\frac{\lambda}{\mu})}\right] - 1 +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}}$$

$$n_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left\{1-(Q+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q}+Q\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}\right\}+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}\right]\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} - \frac{\left\{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}\right]\left[1-\frac{\lambda}{\mu}\right]\right\}}{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}\right]\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$n_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-(Q+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}+Q\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+2}+1-2\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}\right]} - \frac{\left[1-\frac{\lambda}{\mu}-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+2}\right]}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}\right]}$$

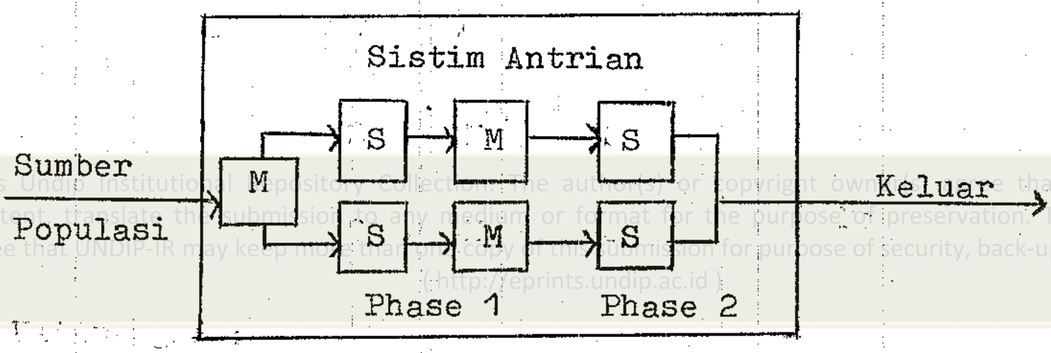
$$n_q = \frac{-Q\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+Q\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2}-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}\right]}$$

$$n_q = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left[\frac{1-Q\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q-1}+(Q-1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}\right]}\right]$$

Jadi theorema terbukti.

2.2.2.4. SALURAN BANYAK POS PELAYANAN BANYAK (MULTI CHANNEL MULTI PHASE)

Sistim model antrian Saluran Banyak Pos Pelayanan Banyak ditunjukkan dalam gambar sebagai berikut :



Gambar 7 : Saluran Banyak Pos Pelayanan Banyak

Keterangan : M = Antrian

S = Server (Fasilitas Pelayanan)

Setiap sistim-sistim ini mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap, sehingga lebih dari satu individu dapat dilayani pada suatu waktu. Sebagai contoh, pendaftaran ulang (herregistrasi) para mahasiswa di universitas, pelayanan pada pasien di rumah sakit dari pendaftaran, diagnosa, penyembuhan sampai pembayaran, dsb.

2.2.3. KARAKTERISTIK-KARAKTERISTIK PENTING SISTIM ANTRIAN

Telah dibahas elemen-elemen dan karakteristik-karakteristik utama sistim antrian. Berikut ini daftar karakteristik-karakteristik tersebut dengan asumsi-asumsi yang paling umum :

Karakteristik antrian	Asumsi-asumsi umum
Sumber populasi	Tak terbatas atau terbatas
Pola kedatangan	Tingkat kedatangan Poisson Waktu antar kedatangan Exponential
Kepanjangan antrian	Tak terbatas atau terbatas
Disiplin antrian	First Come First Served
Pola pelayanan	Tingkat pelayanan Poisson Waktu antar pelayanan Exponential
Keluar	Langsung kembali ke populasi

2.3. DISTRIBUSI POISSON DAN DISTRIBUSI EXPONENTIAL

Telah dikemukakan sebelumnya, bahwa asumsi umum yang harus dipenuhi dalam pemakaian teori antrian adalah distribusi tingkat kedatangan dan distribusi tingkat pelayanan umumnya adalah Poisson dan distribusi waktu antar kedatangan dan waktu antar pelayanan umumnya Exponential.

2.3.1. DISTRIBUSI POISSON

Definisi 1 : Suatu perubah acak (random variabel) x mempunyai distribusi Poisson jika fungsi densiti dari x adalah :

$$f_x(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{untuk } x = 0,1,2,.. \\ 0 & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

di mana $\lambda > 0$ dan merupakan parameter.
Probabilitas dari distribusi Poisson untuk interval x=a sampai x=b dinyatakan dengan jumlah :

$$P(x=a,x=b) = \sum_{k=a}^{b} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Harga rata-rata dan variansi dari distribusi Poisson adalah sama , yakni = λ ,atau $\mu = \lambda = \sigma^2$

2.3.2. DISTRIBUSI EXPONENTIAL

Definisi 2 : Suatu perubah acak (random variabel) x berdistribusi Exponential, jika fungsi densiti dari x adalah :

$$f_x(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{untuk } x > 0 \end{cases}$$

di mana $\lambda > 0$ dan merupakan parameter.

Probabilitas dari distribusi Exponential untuk interval x=c sampai x=d adalah :

$$P(x=c,x=d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x} \Big]_c^d$$

Distribusi Exponential mempunyai harga rata-rata(mean) dan standard deviasi yang sama yaitu $\frac{1}{\lambda}$ atau $\mu = \frac{1}{\lambda} = \sigma$ atau $\mu = \frac{1}{\lambda}$ dan $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

2.4. RATA-RATA DAN STANDARD DEVIASI

Pada setiap kelompok data yang telah dikumpulkan, baik mengenai sampel ataupun populasi, selain data itu disajikan dalam bentuk tabel dan diagram, masih diperlukan ukuran-ukuran yang merupakan wakil kumpulan data tersebut.

Ukuran dihitung dari sekumpulan data dalam sampel yang dinamakan statistik. Apabila ukuran itu dihitung dari kumpulan data dalam populasi atau dipakai untuk menyatakan populasi, maka disebut parameter.

Beberapa macam ukuran yang dipakai di sini adalah :

Rata-rata ($\overline{x}$ atau μ) dan standard deviasi (s atau σ)

2.4.1. RATA-RATA

Definisi 3 : Jika dari suatu populasi telah diambil sampel sebesar N, maka dapat dihitung harga rata-rata dari sampel ($\overline{x}$), yaitu :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

2.4.2. STANDARD DEVIASI

pel sebesar N, akan dapat dihitung pula harga standard deviasi (s), yaitu :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$$

di mana : x_1 ,x_2 ,....,x_N adalah nilai data kuantitatif.

N adalah ukuran sampel (banyaknya data yang diambil).

Setiap kelompok data yang telah dikumpulkan dilakukan pengujian statistik untuk mengetahui apakah ukuran sampel sudah cukup atau belum, pada tingkat kepercayaan 99% dan ketelitian ± 1%.

Dari tabel distribusi Normal dapat diketahui bahwa untuk mendapatkan interval atau kepercayaan 99% dibutuhkan interval ± 2,58 σ.

Untuk suatu kelompok data yang telah dikumpulkan, dapat diketahui harga rata-rata $\overline{x}$ dan standard deviasi s.

Jumlah sampel atau ukuran sampel (=N') yang sebenarnya harus ada agar didapat kepercayaan sebesar 99% dan ketelitian ± 1% , yakni :

$$N' = \left(\frac{2{,}58 \ . \ s}{0{,}1 \ . \ \overline{x}}\right)^2 = \left(\frac{2{,}58}{0{,}10}\right)^2 \left(\frac{s}{\overline{x}}\right)^2$$

$$N' = 666 \left(\frac{s}{\overline{x}}\right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Jadi ukuran sampel yang telah diambil (=N) baru dikatakan cukup jika $N \geqslant N' = 666 \left(\frac{s}{\overline{x}}\right)^2$.

Jika $N < N'$ maka harus dilakukan pengambilan sampel lagi sebanyak (N' - N) kali lagi, jika data tersebut me -

2.5. MINIMISASI BIAYA

Dalam teori antrian dikenal bermacam-macam biaya yaitu : 1. Biaya tak langsung (indirect cost)

2. Biaya langsung (direct cost)

2.5.1. BIAYA TAK LANGSUNG (INDIRECT COST)

Biaya tak langsung adalah biaya menunggu (cost of waiting) pada individu-individu yang menunggu.
Biaya menunggu terjadi bila suatu sistim mempunyai fasilitas pelayanan yang tak memadai.
Biaya menunggu akan mudah ditentukan bila individu yang menunggu berasal dari sistim internal, misal : karyawan atau persediaan. Tetapi biaya menunggu akan menjadi sulit ditentukan pada biaya langganan yang menunggu.
Biaya menunggu mencakup biaya menganggurnya para karyawan, kehilangan langganan, persediaan yang berlebihan, kehilangan penjualan, dsb.

Dari uraian di atas, yaitu bahwa biaya tak langsung adalah biaya yang timbul karena para individu-individu harus menunggu untuk dilayani, dapat ditentukan rumus bagi biaya tak langsung atau biaya menunggu (cost of waiting) sebagai berikut :

Definisi 5 : Biaya tak langsung (biaya menunggu):

$$n_t \cdot c_w$$

di mana n_t = Jumlah individu dalam antrian dan fasilitas pelayanan.

c_w = Biaya menunggu per satuan waktu per individu.

Biaya menunggu dapat dikurangi dengan menambah fasili -

sung (biaya penyediaan pelayanan = cost of service)

2.5.2. BIAYA LANGSUNG

Biaya langsung mencakup : biaya tetap investasi awal dalam peralatan atau fasilitas, biaya-biaya pemasangan dan fasilitas serta latihan bagi karyawan, biaya pemeliharaan, dsb.

Dari uraian diatas, yaitu bahwa biaya langsung adalah biaya penyediaan pelayanan, maka dapat ditentukan rumus bagi biaya langsung atau biaya penyediaan pelayanan (cost of service) sebagai berikut :

Definisi 6 : Biaya langsung (biaya penyediaan pelayanan): $S \cdot c_s$

di mana : S = Jumlah fasilitas pelayanan

c_s = Biaya produksi per periode waktu per fasilitas pelayanan

2.5.3. BIAYA TOTAL

Dari kedua biaya di atas, dapat ditentukan biaya total, yaitu jumlah dari biaya langsung dan biaya tak langsung, sehingga :

Definisi 7 : Biaya total = Biaya langsung + Biaya tak langsung

$$= S \cdot c_s + n_t \cdot c_w$$

Tujuan dasar teori antrian adalah meminimalkan kedua biaya tersebut.

2.6. TEST HIPOTESA

Di dalam penggunaan teori antrian, test hipotesa digunakan untuk menguji apakah harga rata-rata (mean) dan standard deviasi beberapa kelompok hasilpengamatan sama atau tidak sama.

Test hipotesa juga dipergunakan untuk menguji apakah suatu kelompok hasil pengamatan mempunyai suatu karakteristik tertentu (mengenai harga rata-rata dan standard deviasi).

Pengujian tersebut menggunakan distribusi t- student dan distribusi Chi-Kwadrat pada tingkat ketelitian α.

Secara umum beberapa prosedur pengujian hipotesa adalah sebagai berikut :

2.6.1. MENGUJI DENGAN DISTRIBUSI T-STUDENT

Test 1 : Menguji suatu harga rata-rata

a. Hitung harga kritis $t = \dfrac{\bar{x} - \theta_0}{s/\sqrt{n}}$

di mana : $\bar{x}$ = harga rata-rata dari sampel populasi

θ_0 = harga rata-rata dari populasi yang akan diuji

s = standard deviasi sampel

n = ukuran sampel

b. Hipotesa nol (H) dan hipotesa alternatif (A) yaitu :

H : $\theta = \theta_0$

A : $\theta \neq \theta_0$

c. Kriteria pengujian adalah : H kita terima jika $-t_{1-1/2\alpha} < t < t_{1-1/2\alpha}$ di mana $t_{1-1/2\alpha}$ didapat dari daftar distribusi t dengan peluang $(1-1/2\alpha)$ dan dk = n-1. Dalam hal lainnya H ditolak.

Test 2 : Menguji kesamaan dua harga rata-rata

a. Hitung harga kritis dari : $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$

di mana : $\bar{x}_1$ = harga rata-rata sampel populasi I

$\bar{x}_2$ = harga rata-rata sampel populasi II

s_1 = standard deviasi populasi I

s_2 = standard deviasi populasi II

n_1 = ukuran sampel populasi I

n_2 = ukuran sampel populasi II

b. Hipotesa nol (H) dan hipotesa alternatif (A) yaitu :

H : $\mu_1 = \mu_2$

A : $\mu_1 \neq \mu_2$

c. Kriteria pengujian adalah : terima hipotesa jika

$$- \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2} < t < \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

dengan :

$w_1 = s_1^2/n_1$ $\qquad$ $w_2 = s_2^2/n_2$

$t_1 = t_{(1-1/2\alpha),(n_1-1)}$ $\qquad$ $t_2 = t_{(1-1/2\alpha),(n_2-1)}$

Untuk harga-harga t lainnya H ditolak.

2.6.2. MENGUJI DENGAN DISTRIBUSI CHI-KWADRAT

Test 3 : Menguji harga suatu variansi

a. Hitung harga kritis $\chi^2 = \dfrac{(n-1)\, s^2}{\sigma_0^2}$

di mana : s = standard deviasi sampel

σ_0 = standard deviasi yang akan diuji

n = ukuran sampel

b. Hipotesa nol (H) dan hipotesa alternatif (A) yaitu :

H : $\sigma^2 = \sigma_0^2$

A : $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$\chi^2_{1/2\alpha} < \chi^2 < \chi^2_{1-1/2\alpha}$ di mana $\chi^2_{1/2\alpha}$ dan $\chi^2_{1-1/2\alpha}$ didapat dari daftar distribusi Chi-Kwadrat dengan dk = (n-1) dan masing-masing dengan peluang 1/2 α dan (1-1/2α). Dalam hal lainnya H ditolak.

2.7. TEST KECOCOKAN (TEST GOODNESS OF FIT)

Test 4 : Test kecocokan dipergunakan untuk mengetahui dan menguji apakah suatu populasi tertentu mengikuti atau mendekati suatu distribusi teoritis tertentu, dengan tingkat kepercayaan sebesar (1- α)

Pengujian tersebut menggunakan statistik Chi-Kwadrat (χ^2), yaitu : $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$; di mana

f_i = frekwensi pengamatan untuk masing-masing pengamatan atau kelas pengamatan. Untuk kelas pengamatan atau data pengamatan yang berkelompok, sebagai point estimator diambil harga tengah kelas.

e_i = frekwensi ekspektasi untuk masing-masing pengamatan atau kelas pengamatan, yang merupakan hasil kali antara total jumlah frekwensi dengan probabilitas teoritis masing-masing pengamatan.

Jika $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,v}$, maka dapat diterima bahwa populasi tersebut distribusinya mengikuti atau cukup mendekati distribusi teoritis yang diuji dengan derajat kebebasan v=k-1 dan tingkat kepercayaan (1- α). Nilai-nilai $\chi^2_{\alpha,v}$ dapat dilihat pada tabel distribusi Chi-Kwadrat

Dalam masalah antrian ini test Kecocokan (Test Goodness Of Fit) digunakan untuk mengetahui apakah jum-

Poisson dan digunakan untuk mengetahui apakah waktu antar kedatangan dan waktu antar pelayanan mengikuti distribusi Exponential.

Seperti pada penentuan ukuran sampel yang menggunakan tingkat kepercayaan 99%, dalam test hipotesa dan test Kecocokan (test Goodness Of Fit)digunakan tingkat kepercayaan 99%, sehingga $\alpha = 1\%$.