BAB II

PRINSIP ESTIMASI TITIK

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sample random dari density $f(\ .\ ;\ \theta\ )$ dengan $f(.;\theta)$ diketahui dan parameter θ tidak diketahui . Ruang parameter Θ menyatakan himpunan yang terdiri dari harga - harga parameter θ yang mungkin . Tujuan estimasi titik adalah menentukan satu bilangan yang harganya mendekati harga parameter yang tak dike - tahui . Sedangkan statistik (fungsi dari observasi X_1, $X_2, \ldots, X_n$) untuk mengestimasi suatu parameter disebut estimator titik . Jika estimasi dari θ dinyatakan dengan $\hat{\theta}$ maka estimator titik dari θ dinyatakan dengan $\hat{\Theta}$. Misal - nya estimasi titik dari θ adalah $\hat{\theta} = \hat{\vartheta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maka estimator titik dari θ adalah $\hat{\Theta} = \hat{\vartheta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Berikutdibahas tentang metode untuk menentukan estimator titik .

2.1 METODE MAXIMUM LIKELIHOOD (KEMUNGKINAN MAXIMUM)

Prinsip dari estimasi maximum likelihood adalah memilih estimator titik untuk θ,ditulis $\hat{\Theta} = \hat{\vartheta}(X)$ yang me - maximumkan fungsi likelihood $L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definisi 2.1

Fungsi likelihood (fungsi kemungkinan) dari n va- riable random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dinotasikan $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ didefinisikan sebagai density bersama dari n variable random yaitu $f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ yang dipandang sebagai fungsi dari θ .

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sample random dari density $f(x\ ;\theta)$ maka density bersamanya adalah :

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1\ ;\theta).f(x_2;\theta)\ldots$$

$$.f(x_n;\theta)\ .$$

Sehingga jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sample random dari density $f(x\ ;\theta)$ maka fungsi likelihoodnya adalah :

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1;\theta).f(x_2;\theta).\ldots.f(x_n;\theta).$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i\ ;\theta)$$

Definisi 2.2

Misal $L(\theta) = L(\theta\ ; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fungsi likelihood untuk random variable $X_1, X_2, \ldots X_n$. Jika $\hat{\theta} = \hat{\vartheta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ harga $\theta \in \Theta$ yang memaximumkan $L(\theta)$ maka $\hat{\Theta} = \hat{\vartheta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ disebut estimator maximum likelihood dari θ .

Dan $\hat{\theta} = \hat{\vartheta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ disebut estimasi maximum likelihood dari θ untuk sample $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Syarat untuk menentukan harga θ agar $L(\theta)$ maximum adalah $\frac{d\ L(\theta)}{d\theta} = 0$. Misal $\frac{d\ L(\theta)}{d\theta} = 0$ dicapai pada $\theta = \hat{\theta}$ maka $\left.\frac{d^2\ L(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$.

Seringkali untuk menentukan θ yang memaximumkan $L(\theta)$ dicari dengan memaximumkan $\ln L(\theta)$. Hal ini boleh saja karena $L(\theta)$ dan $\ln L(\theta)$ mencapai maximum pada θ yang sama.

Jika $L(\theta)$ maximum pada $\theta = \hat{\theta}$ maka $\ln L(\theta)$ juga maximum pada $\theta = \hat{\theta}$.

BUKTI :

$L(\theta)$ maximum pada $\theta = \hat{\theta}$.

Berarti $\left.\frac{d\,L(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$ dan $\left.\frac{d^2\,L(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta} < 0$

Sekarang pandang $\text{Ln } L(\theta)$.

$\frac{d\,\text{Ln}\,L(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{L(\theta)} \frac{d\,L(\theta)}{d\theta}$. Karena $\left.\frac{d\,L(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$

maka $\left.\frac{d\,\text{Ln}\,L(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$.

Dan $\frac{d^2\,\text{Ln}\,L(\theta)}{d\theta^2} = - \frac{dL(\theta)/d\theta}{(L(\theta))^2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{L(\theta)} \frac{d^2\,L(\theta)}{d\theta^2}$

$$= - \frac{(dL(\theta)/d\theta)^2}{L(\theta)^2} + \frac{1}{L(\theta)} . \frac{d^2L(\theta)}{d\theta^2}$$

Karena $\left.\frac{dL(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$ dan $\left.\frac{d^2\,L(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$

maka $\left.\frac{d^2\text{Ln}\,L(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \left.\frac{1}{L(\theta)} \frac{d^2L(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < \theta$

Terbukti $L(\theta)$ dan $\text{Ln } L(\theta)$ maximum pada $\theta = \hat{\theta}$.

Jika fungsi likelihood memuat k parameter :

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

Maka estimator maximum likelihood dari parameter $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ adalah random variable $\hat{\Theta}_1 = \hat{\vartheta}_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\hat{\Theta}_2 = \hat{\vartheta}_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ... , $\hat{\Theta}_k = \hat{\vartheta}_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

dengan $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ adalam Θ memaximumkan $L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$.

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ dicari dengan k persamaan :

$$\frac{\partial\, L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)}{\theta_2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)}{\partial \theta_k} = 0$$

Contoh 2.1

Misal n random sample diambil dari distribusi Bernoulli $f(x;p) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$

$0 \leq p \leq 1 \quad q = 1 - p$

Fungsi likelihood :

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} q^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} q^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Misalkan : $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$

maka $L(p) = p^y q^{n-y}$

$\ln L(p) = y \ln p + (n - y) \ln q$

Syarat Ln L(p) maximum $\frac{d \ln L(p)}{dp} = 0$

$$\frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{y}{p} - \frac{(n-y)}{q} = 0$$

$$\frac{y(1-p) - p(n-y)}{p(1-p)} = 0$$

$$y - np = 0$$

$$p = y/n$$

Jadi $\hat{p} = \frac{\Sigma x}{n} = \bar{x}$

$$\hat{P} = \bar{X}$$

Estimasi dari p adalah $\hat{p} = \bar{x}$

Estimator titik dari p adalah $\hat{P} = \bar{X}$

Contoh 2.2

Suatu n random sample dari distribusi Normal

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$$

Fungsi likelihoodnya :

$$L(\mu;\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2} (x_i-\mu)^2\right]$$

$$= \left[\frac{1}{\sigma^2 2\pi}\right]^{n/2} \exp \frac{-1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

Lonagoritma dari fungsi likelihood :

$$\ln L(\mu;\sigma^2) = -n/2 \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$= -n/2 \ln 2\pi - n/2 \ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Fungsi kemungkinan mencapai maximum :

i) $\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = 0$

ii) $\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\sigma^2} = 0$

i) $$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

$$\mu = \bar{x}$$

ii) $$\frac{\partial \ln L(U,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=i}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

Jadi estimasi dari μ adalah $\hat{\mu} = \bar{x}$

dan estimasi dari $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

SIFAT INVARIAN DARI ESTIMATOR MAXIMUM LIKELIHOOD

Misal $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ parameter berdimensi k dan Θ parameter space. Andaikan ditentukan estimasi maximum likelihood dari $\tau(\theta) = (\tau_1(\theta), \tau_2(\theta), \ldots, \tau_r(\theta))$ dengan $1 \leq r \leq k$. Misal T (ruang dimensi r) menyatakan range space dari transformasi $\tau(\theta)$.

Didefinisikan fungsi likelihood yang dibentuk oleh $\tau(.)$ (dinotasikan $M(\tau; x_1, x_2, \ldots, x_n)$) adalah :

$$M(\tau; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sup_{\{\theta : \tau(\theta) = \tau\}} L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$M(\tau; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fungsi dari τ dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tertentu. Estimasi dari $\tau = \tau(\theta)$ adalah $\hat{\tau}$ yang menyebabkan $M(\hat{\tau}; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maximum dari $M(\tau; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ untuk $\tau \in T$, sehingga : $M(\hat{\tau}; x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq M(\tau; x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

<u>Theorema 2.1</u>

Misal $\hat{\Theta} = (\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \ldots, \hat{\Theta}_k)$ dimana $\hat{\Theta}_j = \hat{\vartheta}_j(X_1, X_2, \ldots X_n)$ adalah estimator maximum likelihood dari $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ dalam density $f(\,.\,; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$

Jika $\tau(\theta) = (\tau_1(\theta), \tau_2(\theta), \ldots, \tau_r(\theta))$ untuk $1 \leq r \leq k$ maka estimator maximum likelihhod dari $\tau(\theta)$ adalah :

$$\tau(\hat{\Theta}) = (\tau_1(\hat{\Theta}), \tau_2(\hat{\Theta}), \ldots, \tau_k(\hat{\Theta})).$$

<u>Bukti</u> :

Misal $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)$ estimasi maximum likelihood dari $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$

Akan ditunjukkan bahwa :

$M(\tau(\hat{\theta}); x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq M(\tau; x_1, x_2, \ldots, x_n)$

untuk $\tau \in T$.

Dari definisi $M(\tau; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sup_{\{\theta : \tau(\theta) = \tau\}} L(\theta; x_1, \ldots, x_n)$

$= L(\hat{\theta};\ x_1, x_2, \ldots, x_n\ )$

$= \sup_{\{\theta : \tau(\theta) = \tau(\hat{\theta})\}} L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n\ )$

$= M(\tau(\hat{\theta}); x_1, x_2, \ldots, x_n\ )$

$M(\tau; x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant\ M(\tau(\hat{\theta}); x_1, x_2, \ldots, x_n\ )$

Jadi $\tau(\hat{\theta})$ estimasi maximumlikelihood dari $\tau(\theta)$ sehingga estimator maximum likelihood dari $\tau(\theta)$ adalah $\tau(\hat{\Theta}) = [\tau_1(\hat{\Theta}),\ \tau_2(\hat{\Theta}), \ldots,\ \tau_r(\hat{\Theta})]$

2.2 METODE BAYES

Definisi 2.3

Misalkan $T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ estimator dari $\tau(\theta)$ $E\ (T - \tau(\theta)\ )^2$ didefinisikan sebagai rata - rata kesalahan kuadrat (MSE) dari estimator $T = t(X_1\ ,\ X_2\ , \ldots, X_n\ )$ yaitu ukuran penyimpangan estimator $t(X_1, X_2, \ldots, X_n\ )$ dari $\tau(\theta)$.

$$E(T - \tau(\theta))^2 = E[t(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \tau(\theta)]^2$$

$$= \int \ldots \int [t(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \tau(\theta)]^2\ f(x_1;\theta)\ .\ f(x_2;\theta)\ \ldots .\ f(x_n;\theta)\ dx_1 . dx_2 \ldots dx_n\ .$$

2.2.1 FUNGSI KERUGIAN DAN FUNGSI RESIKO

Fungsi keputusan $t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ adalah fungsi yang didefinisikan dari $R^n \to R$. $T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n\ )$ dinamakan suatu keputusan .

Definisi 2.4

Misal t estimasi dari $\tau(\theta)$. Fungsi kerugian (fungsi loss) didefinisikan sebagai fungsi berharga real yang memenuhi :

i) $\ell(t;\theta) \geqslant 0$ untuk semua estimasi t yang mungkin dan semua $\theta \in \Theta$

ii) $\ell(t;\theta) = 0$ untuk $t = \tau(\theta)$.

Catatan :

$\ell(t;\theta)$:notasi dari fungsi kerugian .

$\ell(t;\theta)$ menyatakan kerugian yang diderita jika $\tau(\theta)$ di - estimasi dengan t.

Beberepa bentuk fungsi kerugian :

i) $\ell(t;\theta) = \rho(\theta)|t - \tau(\theta)|^r$ dengan $\rho(0) \geq 0$ dan $r > 0$. (Bentuk umum dari fungsi kerugian).

ii) $\ell(t;\theta) = [t - \tau(\theta)]^2$:error fungsi kerugian kuadrat (Banyak digunakan).

iii) $\ell(t;\theta) = |t - \tau(\theta)|$: error fungsi kerugian mutlak.

Definisi 2.5

Jika diberikan fungsinkerugian $\ell(. ; .)$, fungsi resiko (notasi : $R_t(\theta)$) dari estimator $T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ didefinisikan : $R_t(\theta) = E[\ell(T;\theta)]$

$$R_t(\theta) = E[\ell(T;\theta)]$$
$$= E(\ell(t(X_1,X_2,\ldots,X_n));\theta)$$
$$= \int\ldots\int \ell(t(X_1,X_2,\ldots,X_n);\theta)\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\,dx_i .$$

dengan $f(x;\theta)$ fungsi density dari sample yang diambil.

Atau :

$$R_t(\theta) = E[\ell(T;\theta)]$$
$$= \int \ell(.;\theta)\, f_T(t)\,dt$$

dengan $f_T(t)$ density dari estimator T.

Fungsi resiko $R_t(\theta)$ menyatakan rata - rata kerugian dari estimator $T = t(X_1,X_2,\ldots,X_n)$.

2.2.2. Distribusi Posterior

$f(x;\theta)$ density dari random variable X untuk setiap $\theta \in \Theta$. $f(x|\theta) = f_{X|\Theta=\theta}(x|\theta)$ ddensity bersyarat.

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ random variabble dari density $f(.;\theta)$ dan diketahui density dari Θ adalah $g_\Theta(.)$.

Definisi 2.6

Density $g_\Theta(.)$ disebut distribusi apriori dari Θ. Density bersyarat dari pada $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, $\ldots$, $X_n = x_n$ dengan notasi $f_{\Theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n}(\theta|x_1,x_2,\ldots,x_n)$ disebut distribusi posteror dari Θ.

Perlu diketahui bahwa :

$$f_{Y|X=x}(y|x) = f_{X,Y}(x,y) \;/\; f_X(x)$$

$$= \frac{f_{X|Y=y}(x|y) \cdot f_Y(y)}{f_X(x)}$$

sehingga :

$$f_{\Theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n}(\theta|x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

$$= \frac{f_{X_1,\ldots,X_n|\Theta=\theta}(x_1,x_2,\ldots,x_n|\theta)\, g_\Theta(\theta)}{f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

$$= \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\right] g_\Theta(\theta)}{\int \left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\right] g_\Theta(\theta)\, d\theta}$$

Jika distribusi posterior dipandang sebagai fungsi like - lihood , maka jika ingin mengestimasi θ sesuai dengan estordari θ dengan θ memaximumkan distribusi posterior (estimasi dengan mode distribusi posterior).

Definisi 2.7

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sample random dari density $f(x|\theta)$ dengan θ harga random variable dari Θ dan diketahui density $g_\Theta(.)$. Posterior Bayes Estimator dari $\tau(\theta)$ yang berkaitan dengan priori $g_\Theta(.)$ didefinisikan sebagai $E[\tau(\Theta)|X_1, X_2, \ldots, X_n]$.

$$E(\tau(\Theta)\, X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n)$$

$$= \int \tau(\theta)\, f_{\Theta|X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n}(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\theta.$$

$$= \frac{\int \tau(\theta)\left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\right] g_\Theta(\theta)\; d\theta}{\int \left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\right] g_\Theta(\theta)\; d\theta}$$

Contoh 2.3

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ random sample dari density Bernoulli $f(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$ untuk $x = 0, 1$.
Distribusi priori dari Θ adalah $g_\Theta(\theta) = I_{(0,1)}(\theta)$
Tentukan posterior Bayes estimator dari θ dan $\tau(\theta) = \theta(1-\theta)$

Jawab :

$$f_{\Theta|X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n}(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\right] g_\Theta(\theta)}{\int \left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\right] g_\Theta(\theta)\, d\theta}$$

$$= \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\right] I_{(0,1)}(\theta)}{\int \left[\prod_{i=1}^{n} \ldots\right]}$$

$$= \frac{\theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n-\Sigma x_i} I_{(0,1)}(\theta)}{\int_0^1 \left[\theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n-\Sigma x_i}\right] d\theta}$$

Posterior Bayes estimator dari θ :

$$E(\Theta \mid X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n)$$

$$= \int \theta f_{\Theta \mid X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n}(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\theta$$

$$= \frac{\int_0^1 \theta\ \theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n-\Sigma x_i} d\theta}{\int_0^1 \theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n-\Sigma x_i} d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^1 \theta^{\Sigma x_i+1} (1-\theta)^{n-\Sigma x_i} d\theta}{\int_0^1 \theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n-\Sigma x_i} d\theta}$$

$$= \frac{B(\Sigma x_i + 2, n-\Sigma x_i + 1)}{B(\Sigma x_i + 1, n-\Sigma x_i + 1)}$$

$$= \frac{T(\Sigma x_i+2)\, T(n-\Sigma x_i+1)}{T(n+3)} \cdot \frac{T(n+2)}{T(\Sigma x_i+1) \cdot T(n-\Sigma x_i+1)}$$

$$= \frac{T(\Sigma x_i+2)\, T(n+2)}{(n+2)\, T(\Sigma x_i+1)\, T(n+2)}$$

$$= \frac{(\Sigma x_i+1)\, T(\Sigma x_i+1)}{(n+2)\, T(\Sigma x_i+1)}$$

$$= \frac{\Sigma x_i+1}{n+2}$$

Jadi posterior Bayes Estimator dari θ adalah $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i + 1}{n + 2}$

Posterior Bayes Estimator dari $\tau(\theta) = \theta(1-\theta)$:

$$E\left[\tau(\theta) \mid X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n\right]$$

$$= \int \theta(1-\theta)\, f_{\Theta \mid X_1=x_1, \ldots, X_n=x_n}(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\theta$$

$$= \frac{\int_0^1 \theta(1-\theta)\, \theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n-\Sigma x_i}\, d\theta}{\int_0^1 \theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n-\Sigma x_i}\, d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^1 \theta^{\Sigma x_i+1} (1-\theta)^{n-\Sigma x_i+1}\, d\theta}{\int_0^1 \theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n-\Sigma x_i}\, d\theta}$$

$$= \frac{B(\Sigma x_i+2\ ,\ n-\Sigma x_i+2)}{B(\Sigma x_i+1\ ,\ n-\Sigma x_i+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(x_i+2)\ \Gamma(n-x_i+2)\ \Gamma(n+2)}{\Gamma(\Sigma x_i+n+4)\ \Gamma(\Sigma x_i+1)\ \Gamma(n-\Sigma x_i+1)}$$

$$= \frac{(\Sigma x_i+1)\ (n-\Sigma x_i+1)}{(n+3)(n+2)}$$

Jadi posterior Bayes Estimator dari $\theta(1-\theta)$ adalah :

$$\frac{(\Sigma X_i + 1)\ (n - \Sigma X_i + 1)}{(n+3)\ (n+2)}$$

Definisi 2.8

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ random sample dari density $f(x|\theta)$ dan fungsi distribusi kumulatip $G(.)$ ber - kaitan dengan density $g(.) = g_\Theta(.)$. Estimasi $\tau(\theta)$ dengan fungsi kerugian $\ell(t;\theta)$ dan resiko $R_t(\theta)$. Bayes Risk dari estimator $T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yang berkaitan dengan kerugian $\ell(.;.)$ dan distribusi kumulatip $G(.)$ (notasi: $r(t) = r_{t,G}(t)$) di - definisikan dengan :

$$r(t) = r_{t,G}(t) = \int_\Theta R_t(\theta)\, g(\theta)\, d\theta$$

Definisi 2.9

Estimator Bayes dari $\tau(\theta)$ dinotasikan :

$T^*_{t,G} = t^*_{t,G}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ didefinisikan se - bagai estimator dengan Bayes Risk terkecil atau $t^*_{t,G}$ yang memenuhi :

$$r_{t,G}(t^*) = r_{t,G}(t^*_{t,G}) \leq r_{t,G}(t)$$

untuk setiap estimator $T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dari $\tau(\theta)$ yang lain .

Pandang suatu fungsi kerugian yang dipakai untuk menca ri Estimator Bayes adalah fungsi error kerugian kua drat $(\ell[T-\tau(\theta)]^2)$.Misalkan estimator yang dicari disebut $t^*(.,\ldots,.)$,maka $t^*(.,\ldots,.)$ akan meminimumk an :

$\int_\Theta R_t(\theta)\, g(\theta)\, d\theta$.

$$\int_\Theta R_t(\theta)\, g(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_\Theta E\left[t(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \tau(\theta)\right]^2 g(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_\Theta \left\{ \int_X \left[t(x_1,\ldots,x_n) - \tau(\theta)\right]^2 f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n|\theta) . \prod_{i=1}^{n} dx_i \right\} g(\theta)\, d\theta .$$

$$= \int_X \left\{ \frac{\int_\Theta [\tau(\theta)-t(x_1,\dots,x_n)]^2 f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n|\theta)g(\theta)d\theta}{f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)} \right\} .$$

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) \prod_{i=1}^{n} dx_i$$

$$= \int_X \left\{ \int_\Theta [\tau(\theta)-t(x_1,\dots,x_n)]^2 f_{\Theta|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}(\theta|x_1,\dots,x_n) d\theta \right\}$$

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) \prod_{i=1}^{n} dx_i \quad .$$

Karena integrannya non negatip, maka double integral tsb. minimum jika :

$$\int_\Theta [\tau(\theta)-t(x_1,\dots,x_n)]^2 f_{\Theta|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}(\theta|x_1,\dots,x_n)d\theta$$

minimum untuk setiap $x_1,x_2,\dots,x_n$.

$$\int_\Theta [\tau(\theta)- (x_1,\dots,x_n)]^2 f_{\Theta|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}(\theta|x_1,\dots,x_n)d\theta$$

$$= \int_\Theta \{(\tau(\theta))^2 - 2\tau(\theta)t(x_1,\dots,x_n) + [t(x_1,\dots,x_n)]^2\} .$$

$$f_{\Theta|X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n}(\theta|x_1,x_2,\dots,x_n)\ d\theta \ .$$

$$= \int_\Theta [\tau(\theta)]^2 f_{\Theta|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}(\theta|x_1,x_2,\dots,x_n)\ d\theta \ -$$

$$2t(x_1,\dots,x_n)\int_\Theta \tau(\theta) f_{\Theta|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}(\theta|x_1,\dots,x_n)\ d\theta$$

$$+[t(x_1,\dots,x_2)]^2 \int_\Theta f_{\Theta|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}(\theta|x_1,\dots,x_n)\ d\theta.$$

Pandang persamaan diatas berbentuk :

$c - 2bt + at^2 = f(t)$ dengan $a > 0$,

sehingga $f(t) = at^2-2bt + c$ minimum pada $t = b/a$

Jadi integral diatas minimum pada :

$$t^*(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$= \frac{\int \tau(\theta)\, f_{\Theta|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}(\theta|x_1,\dots,x_n)\, d\theta}{\int f_{\Theta|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}(\theta|x_1,\dots,x_n)\, d\theta}.$$

$$= \frac{\int \tau(\theta) \left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\right] g(\theta)\, d\theta}{\int \left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\right] g(\theta)\, d\theta}$$

$$= E\left[\tau(\Theta) | X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n)\right]$$

Theorema 2.2

Misalkan $X_1,X_2,\dots,X_n$ random sample dari density $f(x|\theta)$ dan $g(\theta)$ density dari Θ . Fungsi kerugian $\tau(\theta)$ adalah $\ell(t;\theta)$. Maka estimator Bayes adalah estimator $t^*(X_1,X_2,\dots,X_n)$ yang meminimumkan :

$$\int_{\Theta} \ell(t(x_1,x_2,\dots,x_n);\theta) f_{\Theta|X_1=x_2,\dots,X_n=x_n}(\theta|x_1,\dots,x_n)\, d\theta$$

Bukti :

Untuk sembara ng fungsi kerugian $\ell(t;\theta)$ dicari estimator yang me minimumkan $\int_{\Theta} R_t(t)\, g(\theta)\, d\theta$.

$$\int_{\Theta} R_t(t)\, g(\theta) d\theta$$

$$= \int_{\Theta} \left[\int_{\mathcal{X}} \ell(t(x_1,\dots,x_n);\theta) f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n|\theta). \prod_{i=1}^{n} dx_i\right] g(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{\mathcal{X}} \left[\int_{\Theta} \ell(t(x_1,\dots,x_2);\theta) f_{\Theta|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}(\theta|x_1,\dots,x_n)\, d\theta\right] . f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) \prod_{i=1}^{n} dx_i .$$

Jadi integral diatas minimum equivalen dengan meminimumkan integral yang ada dalam kurung (disebut posterior Risk).

Jadi estimator Bayes dari $\tau(\theta)$ adalah estimator yang meminumkan posterior Risk yaitu estimator $t^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yang meminimumkan :

$$\int_{\Theta} (\ell(x_1,\ldots,x_n);\theta) f_{\Theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n}(\theta|x_1,\ldots,x_n) d\theta .$$

Terbukti.

Contoh :

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ random sample dari density $f(x|\theta) = (1/\theta)\, I_{(0,\theta)}(x)$. Estimasi θ dengan fungsi kerugian $\ell(t;\theta) = (t-\theta)^2/\theta^2$. Dianggap Θ mempunyai density $g(\theta) = I_{(0,1)}(\theta)$.

Misalkan $y_n = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Akan dicari estimator Bayes .

Jawab : Distribusi posterior dari Θ :

$$f_{\Theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n}(\theta|x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

$$= \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\right] g(\theta)}{\int \left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\right] g(\theta)\, d\theta}$$

$$= \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} 1/\theta \;\; I_{(0,\theta)}(x_i)\right] I_{(0,1)}(\theta)}{\int_0^1 \left[\prod_{i=1}^{n} 1/\theta \;\; I_{(0,\theta)}(x_i)\right] d\theta}$$

$$= \frac{(1/\theta)^n \left[\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i)\right] I_{(0,1)}(\theta)}{\int_0^1 (1/\theta)^n \left[\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i)\right] d\theta}$$

$$= \frac{(1/\theta)^n \; I_{(y_n,1)}(\theta)}{\int (1/\theta)^n \; I_{(y_n,1)}(\theta)\, d\theta}$$

$$= \frac{(1/\theta)^n \; I_{(y_n,1)}(\theta)}{\left[\frac{1}{1-n}\right](\theta)^{1-n}\Big|_{y_n}^{1}}$$

$$= \frac{(1/\theta)^n \; I_{(y_n,1)}(\theta)}{\frac{1}{n-1}\left[\left[\frac{1}{y_n}\right]^{n-1} - 1\right]}$$

Estimator Bayes yang dicari adalah estimator yang me - minimumkan :

$$\frac{\int \left[\frac{t(y_n)-\theta}{\theta}\right]^2 \frac{1}{\theta^n} \; I_{(y_n,\theta)}(\theta)\, d\theta}{\frac{1}{n-1}\left[\left[\frac{1}{y_n}\right]^{n-1} - 1\right]}$$

atau estimator yang meminimumkan :

$$\int_{y_n}^{1} \frac{[t(y_n) - \theta]^2 \, d\theta}{\theta^{n+2}}$$

$$= \left[t(y_n)\right]^2 \int_{y_n}^{1} \frac{1}{\theta^{n+2}}\, d\theta \;-\; 2t(y_n)\int_{y_n}^{1} \frac{1}{\theta^{n+1}}\, d\theta$$

$$+ \int_{y_n}^{1} 1 / \theta^n \; d\theta$$

(merupakan fungsi dalam $t(y_n)$)

Sehingga $\int_{y_n}^{1} \frac{[t(y_n)-\theta]^2 d\theta}{\theta^{n+2}}$ minimum pada :

$$t^*(y\ ) = \frac{\int_{y_n}^{1} 1 / \theta^{n+2} \; d\theta}{\int_{y_n}^{1} 1 / \theta^{n+2} d\theta}$$

$$= \frac{-1/n \quad \theta^{-n}\Big|_{y_n}^{1}}{-1/_{1+n} \quad \theta^{-1-n}\Big|_{y_n}^{1}}$$

$$= \frac{\left[\frac{1+n}{n}\right]\left[1 - 1/y_n^{\,n}\right]}{1 - 1/y_n^{n+1}}$$

$$= \left[\frac{n+1}{n}\right] y_n \frac{\left[1 - y_n^{\,n}\right]}{1 - y_n^{\,n+1}}$$

Estimator Bayes :

$$\left[\frac{n+1}{n}\right] Y_n \frac{\left[1 - Y_n^n\right]}{1 - Y_n^{n+1}}$$