BAB III

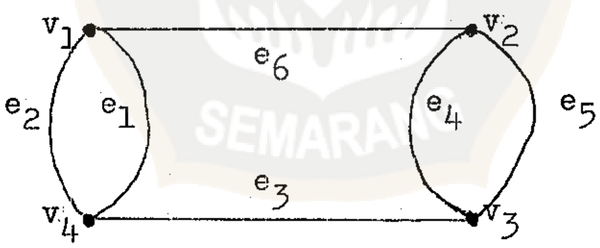
BEBERAPA PENGERTIAN DALAM TEORI GRAPH

3. 1. DEFINISI GRAPH

Definisi 3.1.1

Suatu graph G didefinisikan sebagai pasangan $G = \langle V, E \rangle$ yang terdiri dari himpunan obyek $V = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots \}$ dimana V merupakan himpunan dari elemen-elemen yang disebut titik (point) dan $V \neq \emptyset$, sedangkan $E = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots \}$ merupakan himpunan dari elemen-elemen yang disebut garis (line), sedemikian sehingga setiap garis e_k merupakan pasangan berurut dari titik (v_i, v_j).

Contoh :



Gambar 3.1 Graph $G = \langle V, E \rangle$

Keterangan :

e_1 merupakan pasangan berurut dari (v_1, v_4),

e_2 merupakan pasangan berurut dari (v_1, v_4) dan seterusnya.

Catatan :

Suatu garis dalam graph G dapat dipandang sebagai garis yang mempunyai dua arah, maka suatu titik juga dapat dipandang sebagai titik awal maupun titik akhir suatu garis.

Sebagai misal :

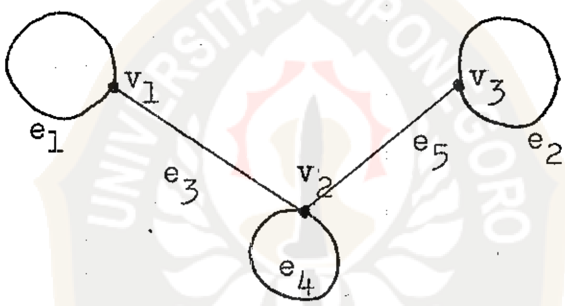
maka v_i adalah titik awal e_k, karena e_k berjalan dari v_i ke lah titik akhir e_k, karena dipandang garis e_k berjalan dari v_j ke v_i, sehingga v_j sebagai titik awal e_k.

3.2. GELUNG (LOOP) DAN GARIS PARALEL

Definisi 3.2.1

Gelung (loop) didefinisikan sebagai suatu garis dalam graph yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama atau suatu garis e_k sebagai pasangan berurut dari titik yang sama yaitu (v_i,v_i).

Contoh :



Gambar 3.2 Graph dengan tiga gelung.

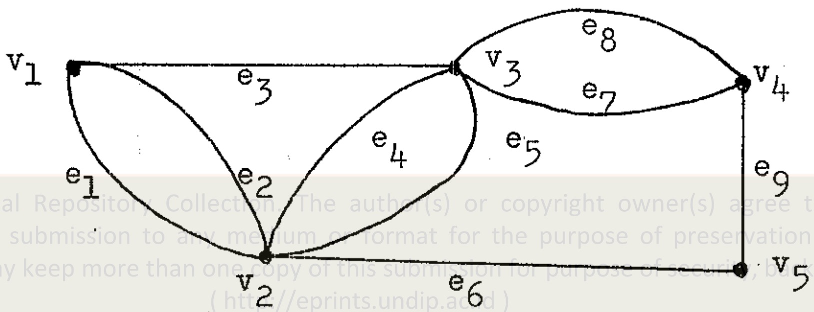
Keterangan :

v_1 adalah titik awal yang sekaligus merupakan titik akhir dari e_1, maka e_1 disebut gelung demikian juga e_2 dan e_4.

Definisi 3.2.2

Garis e_i dan e_j disebut garis paralel bila dan hanya bila titik awal e_i sama dengan titik awal e_j demikian juga titik akhir e_i sama dengan titik akhir e_j.

Contoh :



Gambar 3.3 Graph dengan 3 pasang garis

Keterangan :

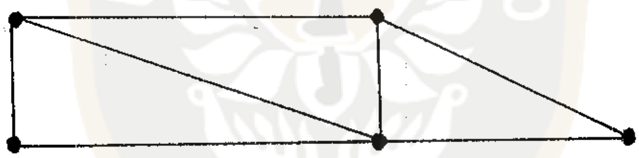
v_1 adalah titik awal dari e_1 dan e_2 dan v_2 adalah titik akhir dari e_1 dan e_2, maka e_1 dan e_2 merupakan garis paralel, demikian juga e_4 dan e_5 , e_7 dan e_8 .

Tetapi e_3 dan e_6 bukan merupakan garis paralel karena titik awal dan titik akhirnya tidak sama.

Definisi 3.2.3

Suatu graph G disebut graph sederhana (simple graph) bila dan hanya bila graph G tidak mempunyai gelung dan garis paralel.

Contoh :

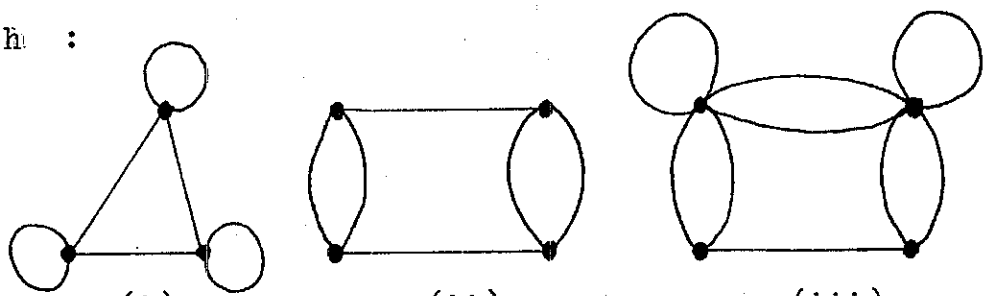


Gambar 3.4 Graph sederhana

Definisi 3.2.4

Suatu graph G disebut graph umum (general graph) bila dan hanya bila graph G mempunyai gelung atau garis paralel atau keduanya.

Contoh :



(i) (ii) (iii)

Gambar 3.5 Graph umum

(i) Graph dengan 3 buah gelung,

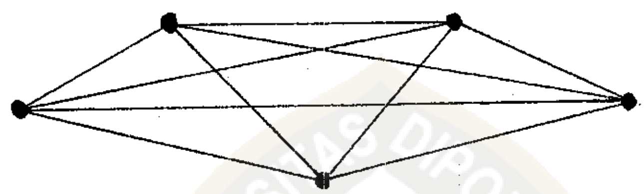
(ii) Graph dengan 2 pasang garis paralel,

(iii) Graph dengan 2 buah gelung dan 3 pasang garis paralel.

Definisi 3.2.5

Graph lengkap (complete graph) adalah graph sederhana yang mempunyai garis yang maksimal artinya setiap titik dari graph sederhana pasti dihubungkan oleh suatu garis .

Contoh :



Gambar 3.6 Graph Lengkap

3. 3 GRAPH BERHINGGA DAN GRAPH TIDAK BERHINGGA

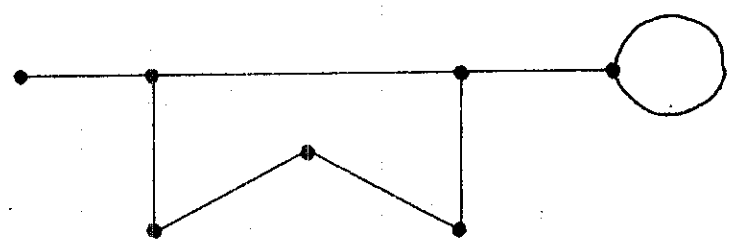
Definisi 3.3.1

Graph G disebut suatu graph berhingga (finitegraph) jika memenuhi :

a. V merupakan himpunan titik yang berhingga dan tidak kosong,

b. E merupakan himpunan garis yang berhingga.

Contoh :



Gambar 3.7 Graph berhingga dengan 8 titik dan 8 garis.

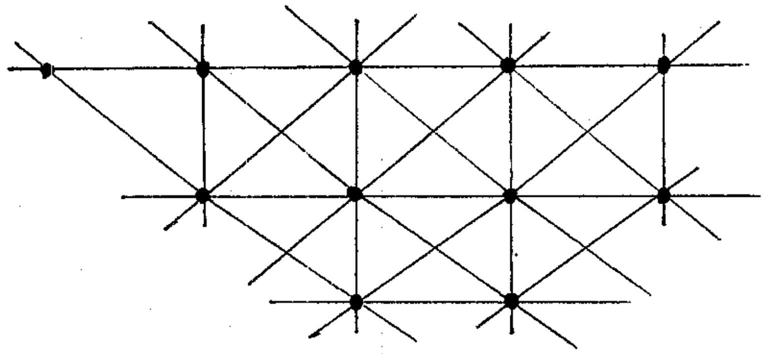
Definisi 3.3.2

Graph G disebut tidak berhingga (infinite graph) jika memenuhi :

a. V merupakan himpunan titik tidak berhingga dan tidak kosong,

b. E merupakan himpunan garis boleh berhingga.

Contoh :



Gambar 3.8 Graph tidak berhingga

Keterangan : Titik dari graph ini tidak berhingga banyaknya dan garis-garisnya tak berujung.

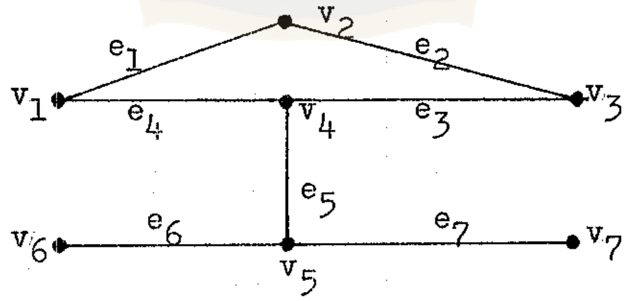
Catatan : Dalam pembahasan selanjutnya yang digunakan adalah graph berhingga.

3.4. INSIDEN DAN DERAJAD (DEGREE)

Definisi 3.4.1

Bila suatu titik v_i adalah suatu titik akhir dari beberapa garis e_j, maka v_i dan e_j dikatakan "insiden" satu dengan lainnya.

Contoh :



Gambar 3.9

Keterangan :

e_1, e_2 adalah insiden dengan v_2, e_3, e_4 dan e_5 insiden dengan v_4 dan sebagainya. Tetapi e_1 tidak insiden dengan v_3.

Definisi 3.4.2

Dua garis yang tidak paralel dikatakan sebagai tetangga (adjacent) jika garis-garis itu insiden pada suatu titik yang sama.

Contoh : Gambar 3.9

e_1 dan e_2 adalah tetangga, karena keduanya insi - den pada v_2; e_6 dan e_7 adalah tetangga, karena in siden pada v_5 .

Tetapi e_1 dan e_3 tidak tetangga, karena kedua garis tidak insiden pada titik yang sama.

Definisi 3.4.3

Dua titik dikatakan bertetangga (adjacent) jika titik-titik itu merupakan titik akhir (titik awal) dari garis yang sama.

Contoh : Gambar 3.9

v_1 dan v_2 adalah tetangga, karena merupakan titik akhir (titik awal) dari garis e_1.

v_1 dan v_3 bukan tetangga, karena tidak merupakan titik akhir (titik awal) dari garis yang sama, yaitu v_1 titik akhir dari e_4 dan v_3 titik akhir e_3.

Definisi 3.4.4

Derajad (degree) suatu titik v_i adalah banyaknya garis yang insiden dengan titik v_i, dengan cata - tan bahwa titik yang memiliki suatu gelung maka titik itu mempunyai derajad sama dengan dua.

Contoh : Gambar 3.9

Titik v_2 memiliki derajad dua, $d(v_5) = 3$, $d(v_1) = 2$, $d(v_6) = d(v_7) = 1$ dan sebagainya.

Teorema 3.1

Dalam setiap graph, hasil jumlah derajad dari semua titik v_i sama dengan dua kali jumlah garis e_j

atau :
$$\sum_i \text{derajad } v_i = 2 \sum_j e_j$$

Bukti : Dalam kenyataan, jelas bahwa setiap garis terle - tak antara dua titik, sehingga setiap garis itu memberi sumbangan pada $\sum_i$ derajad v_i adalah dua. Jadi terbukti bahwa $\sum_i$ derajad $v_i = 2 \sum_j e_j$

Teorema 3 .2

Dalam setiap graph, jumlah dari titik dengan derajad ganjil adalah selalu genap.

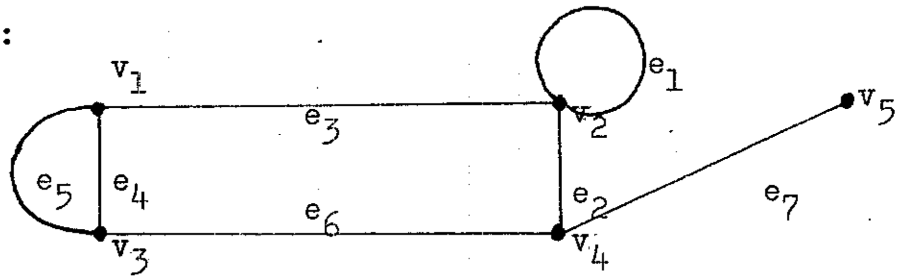
Bukti :

Pandang titik dengan derajad ganjil dan genap secara terpisah. Jumlah ruas kiri pada Teorema 3.1 sama dengan dua kali jumlah garis, masing-masimg titik dengan derajad genap dan ganjil dapat diletakkan sebagai berikut :

$$\sum_i d(v_i) = \sum_{genap} d(v_j) + \sum_{ganjil} d(v_k)$$

Karena $\sum d(v_i)$ adalah genap, maka $\sum d(v_j)$ adalah genap (jumlahan dari angka-angka genap) dan $\sum d(v_k)$ juga harus genap, sebab setiap $d(v_k)$ adalah ganjil , maka jumlah total dari $d(v_k)$ harus genap untuk membuat jumlah itu menjadi angka genap. Jadi teorema terbukti.

Contoh :



Gambar 3 .10

Keterangan :

$$d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)+d(v_4)+d(v_5) = 3+4+3+3+1 = 14$$
$$= 2 \times 7$$

Jumlah garis = 7, jadi jumlah derajad dari semua titik sama dengan 2 kali jumlah garis.

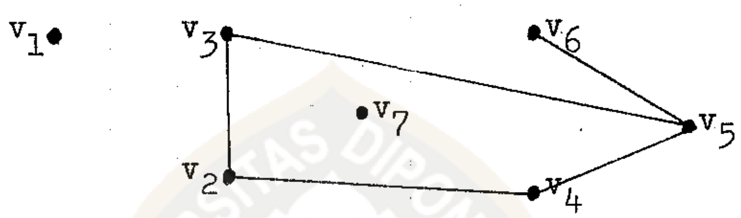
Titik berderajad ganjil adalah v_1, v_3, v_4 dan v_5 , jumlahnya empat (genap).

3.5. TITIK TERISOLASI DAN GRAPH NOL

Definisi 3.5.1

Suatu titik v_i dikatakan titik terisolasi (isolated point) bila dan hanya bila derajad titik v_i sama dengan nol artinya tidak ada satu garispun yang insiden dengan titik v_i.

Contoh :

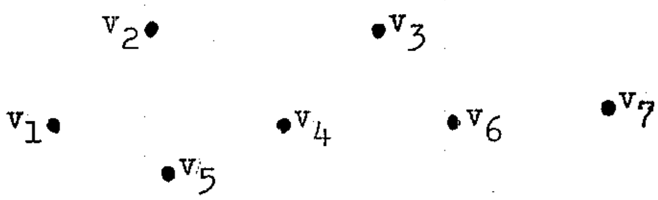


Gambar 3.11 Graph dan 2 titik terisolasi v_1 & v_7.

Definisi 3.5.3

Di dalam definisi dari graph $G = \langle V, E \rangle$, himpunan E diperbolehkan sama dengan nol atau kosong, maka graph yang tidak memiliki garis disebut graph nol. Dengan kata lain, setiap titik dalam graph nol merupakan titik terisolasi.

Contoh :



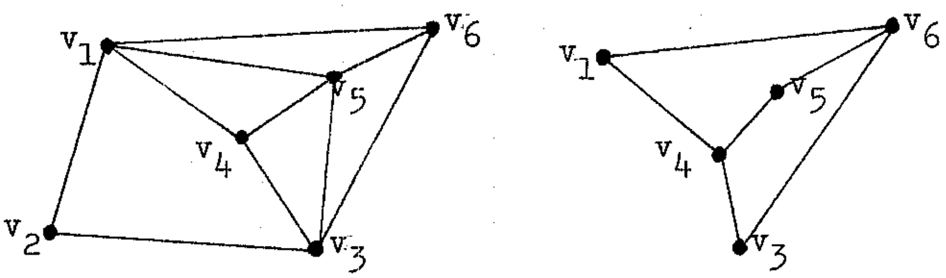
Gambar 3.12 Graph nol dengan 7 titik

3.6. S U B G R A P H

Definisi 3.6.1

Suatu graph G' dinamakan subgraph dari graph G jika semua titik-titik dan semua garis-garis dari graph G' berada dalam graph G, dan dalam subgraph G' susunan titik-titik dan garis-garis dari graph G tidak boleh dipindah atau ditukar letaknya, juga tidak boleh menambah titik atau garis yang baru.

Contoh :



Gambar 3.13 Graph G dan salah satu subgraph G'.

Pada dasarnya pengertian dari subgraph adalah sama dengan pengertian dari himpunan bagian (subset) pada teori himpunan. Simbul dari teori himpunan yaitu " $\subset$ " tetap digunakan dalam teori graph, $G' \subset G$ berarti G' adalah subgraph dari graph G.

Catatan :

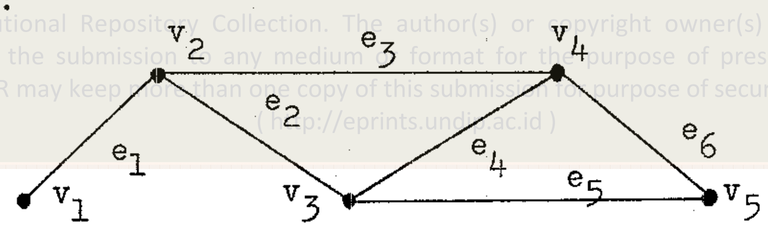
1. Setiap graph adalah subgraph pada dirinya sendiri
2. Suatu subgraph dari subgraph dalam graph G juga merupakan subgraph dari G.
3. Suatu titik tunggal dalam graph G adalah sub - graph dari G.
4. Garis tunggal dalam G, bersama-sama dengan titik akhirnya juga merupakan subgraph dari G.

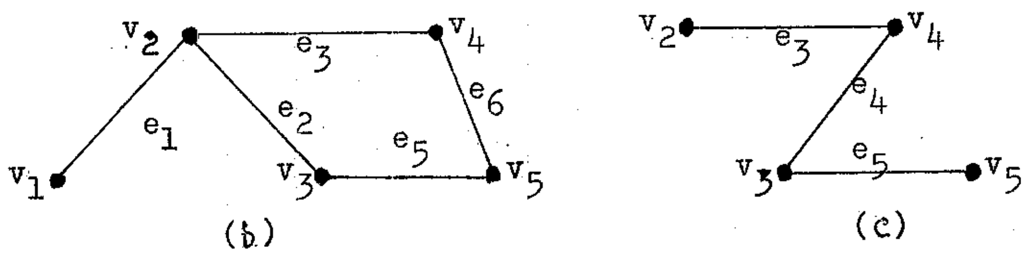
3.7. PATH DAN SIRKUIT

Definisi 3.7.1

Jalan (walk) adalah deretan bergantian dari titik dan garis, dimulai dan diakhiri dengan titik dimana setiap garis insiden dengan titik yang mendahului dan yang mengikutinya.

Contoh :





Gambar 3 .14 Graph dan dua buah jalan.

(a) Graph G,

(b) Jalan $v_1e_1v_2e_3v_4e_6v_5e_5v_3e_2v_2e_1v_1$ disingkat menjadi $v_1v_2v_4v_5v_3v_2v_1$ (ada titik dan garis yang diulang).

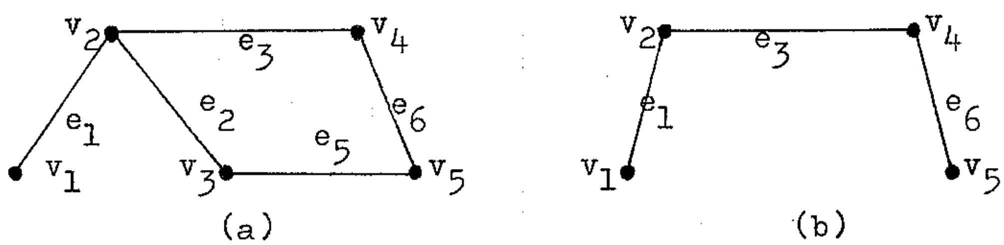
(c) Jalan $v_2e_3v_4e_4v_3e_5v_5$ atau $v_2v_4v_3v_5$.

Catatan : Dalam suatu jalan, titik maupun garis boleh diulang, bila titik awal sama dengan titik akhir maka jalan yang demikian disebut tertutup dan bila tidak disebut terbuka.

Definisi 3.7.2

Jalan tapak (trail) adalah suatu jalan dimana garisnya tidak boleh diulang tetapi titik-titiknya boleh diulang.

Contoh : Pada Gambar 3.14. (a)



Gambar 3.15 Suatu jalan tapak.

Keterangan :

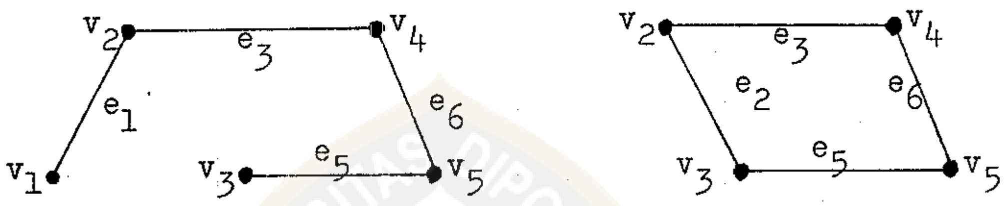
(a) Jalan tapak $v_1v_2v_3v_5v_4v_2$ (ada titik yang diulang tetapi tidak ada garis yang diulang).

(b) Jalan tapak $v_1v_2v_4v_5$ (tidak ada titik maupun garis yang diulang).

Definisi 3.7.3

Path (alur) adalah suatu jalan tapak dimana semua titik-titiknya tidak boleh diulang (terkecuali jika path itu tertutup dimana titik awal sama dengan titik akhirnya).

Contoh : Pada Gambar 3.14.(a)



(a) (b)

Gambar 3.16 Suatu path (alur).

Keterangan :

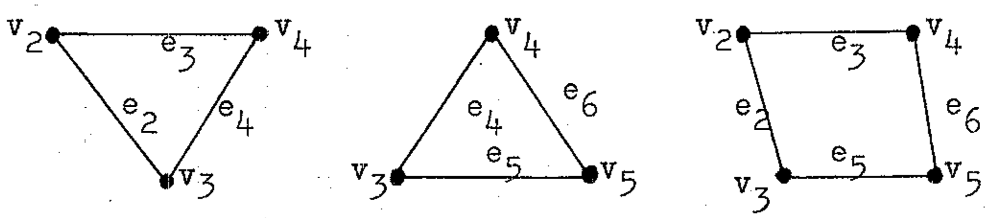
(a) Path $v_1v_2v_4v_5v_3$.

(b) Path $v_2v_3v_5v_4v_2$.

Definisi 3.7.4

Sirkuit (circuit) adalah suatu path yang tertutup berarti titik awal sama dengan titik akhir.

Contoh : Pada Gambar 3.14. (a)



(a) (b) (c)

Gambar 3.16 Suatu sirkuit.

Keterangan :

(a) Sirkuit $v_2e_2v_3e_4v_4e_3v_2$ atau $v_2v_3v_4v_2$.

(b) Sirkuit $v_3e_4v_4e_6v_5e_5v_3$ atau $v_3v_4v_5v_3$.

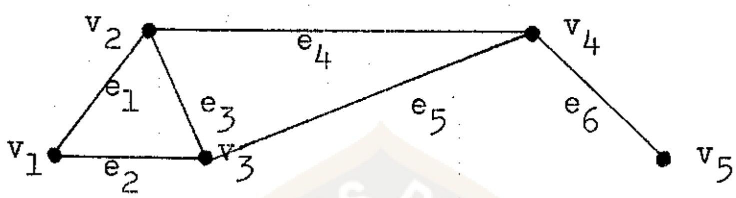
(c) Sirkuit $v_2e_3v_4e_6v_5e_5v_3e_2v_2$ atau $v_2v_4v_5v_3v_2$.

3.8. GRAPH TERHUBUNG, GRAPH TAK TERHUBUNG DAN KOMPONEN

Definisi 3.8.1

Suatu graph G disebut graph terhubung (connected graph) jika setiap pasangan titik (v_i, v_j) terdapat paling sedikit satu path.

Contoh :



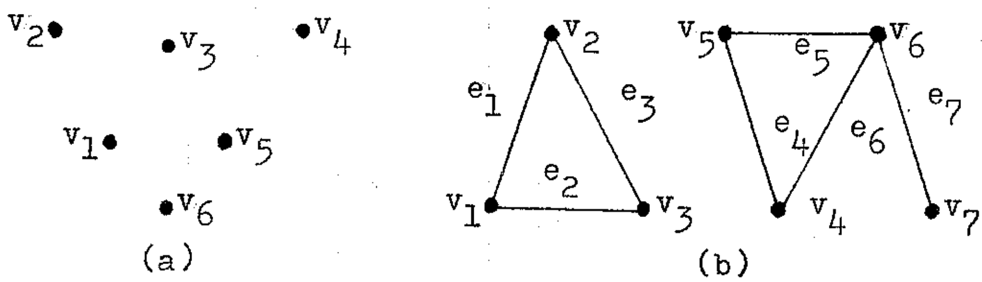
Gambar 3.17 Graph terhubung

Keterangan : Pasangan (v_1, v_5) dihubungkan $v_1e_1v_2e_4v_4e_6v_5$. Pasangan (v_2, v_3) dihubungkan $v_2e_3v_3$, dan sebagainya.

Definisi 3.8.2

Suatu graph G disebut graph tidak terhubung (disconnected graph) jika terdapat sekurang-kurangnya dua titik v_i dan v_j yang tidak terhubungkan oleh suatu path.

Contoh :



Gambar 3.18 (a). Graph nol (totally disconnected graph)

(b). Graph tidak terhubung

Keterangan : (a) Jelas graph tak terhubung, karena semua pasangan titiknya tidak terhubungkan oleh suatu path.

(b) Terdapat pasangan (v_2, v_5), (v_1, v_4), (v_2, v_7)

Definisi 3.8.3

Pandang suatu graph tidak terhubung yang terdiri dari dua atau lebih subgraph yang terhubung, maka setiap subgraph yang terhubung ini disebut suatu "k o m p o n e n".

Contoh : Pada Gambar 3.18 (a)

Graph nol terdiri atas enam subgraph yang tidak terhubung, jadi tidak mempunyai komponen.

Pada Gambar 3.18 (b)

Graph tidak terhubung terdiri atas dua subgraph yang terhubung, jadi terdiri dari dua komponen.

Dengan demikian komponen dari suatu graph terhubung adalah graph itu sendiri atau bisa dikatakan setiap graph terhubung adalah merupakan satu komponen. Dan pada setiap graph tidak terhubung G akan ditemukan paling sedikit dua subgraph yang terhubung dan subgraph ini tiada lain adalah suatu komponen.

Teorema 3.3

Suatu graph G adalah tidak terhubung bila dan hanya bila himpunan titik V dapat dipisahkan menjadi dua himpunan titik yang tidak kosong dan memisah menjadi V_1 dan V_2 sehingga tidak ada garis yang menghubungkan titik-titik dalam V_1 dan titik titik dalam V_2 .

Bukti :

Misalkan diambil titik sebarang dalam V_1 adalah a dan titik sebarang dalam V_2 adalah b, maka teorema diatas dapat disajikan sebagai :

Graph G tak terhubung $\Longleftrightarrow$ tidak ada garis yang menghubungkan titik a dan titik b, dimana $a \in V_1$ dan $b \in V_2$ serta $V_1 \cup V_2 = V$.

(===>) Titik a dan titik b tidak dihubungkan oleh garis maka titik a dan titik b tidak mempunyai path, sebab tidak ada garis yang menghubungkan titik-titik dalam V_1 dan titik-titik dalam V_2. Dengan demikian maka akan dapat ditemukan sepasang titik yaitu titik a dan titik b yang tidak dihubungkan oleh suatu path.

Menurut definisi graph tak terhubung, maka terbukti bahwa graph G tidak terhubung.

(<===) Tidak ada garis yang menghubungkan titik a dan titik b ===> graph G tak terhubung.

Andaikan graph G adalah terhubung.

Maka setiap pasangan titik dalam graph G minimal terdapat satu path yang menghubungkannya. Sedangkan diketahui bahwa terdapat sepasang titik yaitu titik a dan titik b yang tidak dihubungkan oleh suatu path. Dengan demikian maka pengandaian salah, yang benar adalah graph G tidak terhubung.

Karena (===>) dan (<===) terbukti, maka teorema berlaku.

3.9. POHON (TREE) DAN POHON PERENTANG (SPANNING TREE)

Definisi 3.9.1

Pohon (tree) P didefinisikan sebagai suatu graph yang terhubung dan tidak mempunyai sirkuit.

Contoh :

(a) (b) (c) (d)

Gambar 3.19 (a) Pohon dengan satu titik,

(b) Pohon dengan dua titik,

(c) Pohon dengan tiga titik.

Definisi 3.9.2

Hutan (forest) H didefinisikan sebagai suatu graph yang tidak mempunyai sirkuit.

Contoh :

Pada Gambar 3.19 keseluruhannya merupakan hutan atau gabungan dari pohon dengan 1,2,3 dan 4 titik adalah merupakan hutan.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa tiap pohon adalah merupakan hutan tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Teorema 3.4

Dalam pohon P pada setiap pasangan titiknya hanya terdapat satu path.

Bukti :

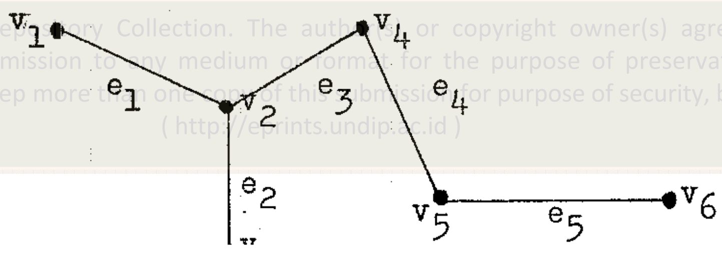
Diketahui bahwa pohon P adalah merupakan graph terhubung. Maka dalam graph terhubung paling sedikit setiap pasangan titik nya dihubungkan oleh satu path.

Andaikan dalam P terdapat titik a dan titik b yang dihubungkan oleh dua path, maka dalam P akan terdapat sirkuit, sebab setiap dua titik yang dihubungkan oleh dua path akan membentuk suatu sirkuit. Sedangkan dalam pohon P diketahui tidak boleh terdapat sirkuit, sehingga pengandaian salah.

Yang benar bahwa dalam pohon P, setiap pasangan titiknya hanya terdapat satu path saja.

Maka teorema ini berlaku.

Contoh :



Keterangan :

Setiap pasangan titiknya (v_i, v_j) hanya terdapat satu path, misalnya :

- (v_1, v_5) terdapat path $v_1 e_1 v_2 e_3 v_4 e_4 v_5$,
- (v_2, v_6) terdapat path $v_2 e_3 v_4 e_4 v_5 e_5 v_6$,
- (v_3, v_1) terdapat path $v_3 e_2 v_2 e_1 v_1$, dan sebagainya.

Teorema 3.5

Suatu pohon P dengan n titik akan mempunyai garis ssebanyak (n-1) buah.

Bukti :

Dari contoh pohon pada Gambar 3.19 telah terbukti bahwa untuk pohon dengan 1,2,3 dan 4 titik akan didapat 0,1,2,dan 3 garis.

Dengan demikian teorema berlaku untuk pohon P dengan 1,2,3 dan 4 titik.

Misalkan teorema berlaku untuk graph G dengan n-1 titik, maka akan dibuktikan teorema benar untuk G dengan n titik.

Ambil P dan pisahkan menjadi dua yaitu P_1 dan P_2 dimana P_1 dengan titik sebanyak n_1 buah, sedangkan P_2 dengan titik sebanyak n_2 buah, sehingga $P_1 \cup P_2 = P$ dan $n_1 + n_2 = n$.

Misalkan dalam P terdapat e buah garis maka dalam P_1 terdapat e_1 buah garis dan dalam P_2 terdapat e_2 buah garis dengan $e = e_1 + e_2 + 1$.

Pandang Gambar 3.21, dan ambil titik sebarang dalam P_1 yaitu v_i dan titik sebarang dalam P_2 yaitu v_j, dan hubungkan dengan suatu garis yaitu e_k

Misalkan garis e_k dihapus, maka akan terjadi dua pohon dengan banyaknya titik tetap, yaitu $n=n_1+n_2$

sedangkan banyaknya garis pada P yaitu $e-1 = e_1+e_2$ sehingga pada :

$$P_1 : e_1 = n_1 - 1 \quad .... \quad (i)$$

$$P_2 : e_2 = n_2 - 1 \quad .... \quad (ii)$$

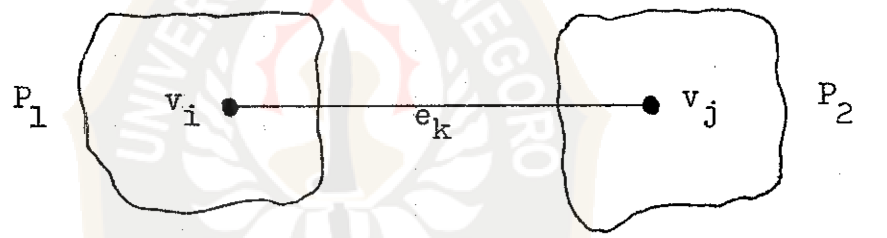
dari (i) dan (ii) diperoleh :

$$e_1 + e_2 = n_1 + n_2 - 2$$

$$e - 1 = n - 2$$

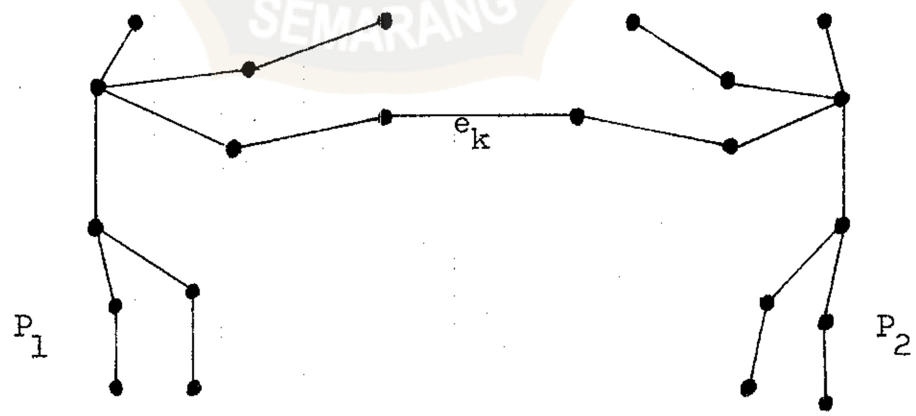
$$e = n - 1 .$$

Maka terbukti banyaknya garis pada P dengan n titik adalah sebanyak (n-1) garis.



Gambar 3.21

Contoh :



Gambar 3.22 Pohon P dengan 22 titik

Keterangan :

Pohon P terdiri dari 22 titik. P setelah garis e_k dihapus maka didapat dua pohon yaitu P_1 dengan n_1 = 11 titik dan 10 garis (e_1), jadi $e_1 = n_1 - 1$ dan P_2 dengan n_2 = 11 titik dan e_2 = 10 garis, jadi $e_2 = n_2 - 1$.

Maka untuk pohon P berlaku $e = e_1 + e_2 + 1$.

$e = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1$

$= n_1 + n_2 - 1$

$= 11 + 11 - 1 = 21 = n - 1$

Jadi pohon P dengan $n = 22$ titik terdapat garis sebanyak $e = 22 - 1 = 21$ buah.

Teorema 3.6

Graph G terhubung dengan n titik dan n-1 garis adalah suatu pohon.

Bukti :

Karena G terhubung, maka tinggal membuktikan bahwa G dengan n titik dan n-1 garis tidak mempunyai suatu sirkuit.

Andaikan G mempunyai sirkuit satu buah.

Karena G mempunyai satu sirkuit, maka terdapat suatu garis misalkan e_k dan jika garis tersebut dihapus maka didapat suatu graph $G - e_k$ adalah terhubung dan tidak mempunyai sirkuit dan ini merupakan suatu pohon dengan n titik dan n - 2 buah garis yaitu n - 1 garis dikurangi garis e_k.

Kontradiksi sebab diketahui G dengan n titik dan n-1 garis, pengandaian salah.

Yang benar bahwa graph G tidak mempunyai sirkuit, maka graph G terhubung dengan n titik dan n-1 garis adalah suatu pohon, teorema terbukti.

Contoh : Pada Gambar 3.22

Terlihat suatu graph terhubung dengan 22 titik dan 21 garis merupakan suatu pohon.

Teorema 3.7

Graph G adalah suatu pohon bila dan hanya bila G terhubung minimal.

Bukti :

Graph G terhubung minimal jika G terhubung dan memiliki jumlah garis yang minimal.

(==>) Graph G adalah suatu pohon ===> G terhubung minimal.

G adalah pohon, maka G terhubung dan tidak memilik i sirkuit, karena tidak mempunyai sirkuit maka G terhubung minimal, sebab jika dihapus salah satu garis dalam G maka pohon tersebut akan tidak terhubung lagi, dengan demikian sudah tidak merupakan suatu pohon. Maka terbukti bahwa G terhubung minimal.

(<===) G terhubung minimal ==> Graph G adalah pohon.

G terhubung minimal, maka G harus bebas sirkuit. Karena G terhubung dan bebas sirkuit maka G adalah merupakan pohon, terbukti.

Dari (==>) dan (<==) maka teorema berlaku.

Contoh :

Pada Gambar 3 .22 adalah suatu pohon, sebab graphnya adalah graph terhubung dan mempunyai garis minimal. Karena dengan menghapus satu garis saja akan menyebabkan graph G tidak terhubung lagi, sehingga bukan merupakan pohon.

Teorema 3 .8

Graph G dengan n titik dan n-1 garis serta tidak memiliki sirkuit adalah terhubung.

Bukti :

Andaikan graph G dengan n titik dan n-1 garis serta tidak memiliki sirkuit adalah tidak terhubung.

Maka paling sedikit terdapat dua komponen yang setiap komponennya tidak mempunyai sirkuit.

Ambil G terdiri atas dua komponen yaitu P_1 dan P_2 dengan P_1 terdiri dari n_1 titik dan e_1 garis, sedangkan P_2 terdiri dari n_2 titik dan e_2 garis (untuk lebih jelasnya lihat Gambar 3.21).

Sekarang ambil titik sebarang $v_i \in P_1$ dan $v_j \in P_2$ jika kedua titik itu dihubungkan oleh suatu garis yaitu e_k maka $G + e_k$ adalah terhubung dan tetap tidak memiliki sirkuit atau merupakan pohon dengan n titik dan n buah garis.

Kontradiksi, sebab diketahui graph G terdiri atas n titik dan n-1 garis.

Maka pengandaian salah, yang benar adalah graph G terhubung, terbukti.

Contoh : Pada Gambar 3.22, suatu graph dengan n = 22 titik dan e = n-1 = 22-1 = 21 garis dan tidak mempunyai sirkuit adalah terhubung.

Akibat dari teorema 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 dan 3.8 maka dapat disimpulkan bahwa graph G dengan n titik disebut suatu pohon, apabila :

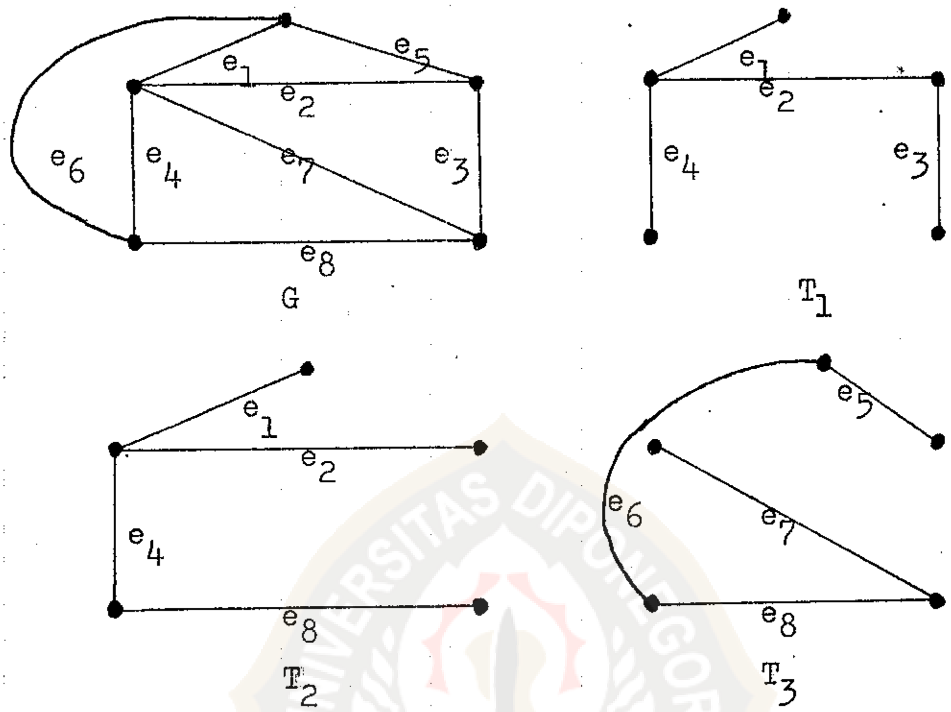
1. G terhubung dan tidak mempunyai sirkuit.
2. G terhubung dan mempunyai n-1 garis.
3. G tidak mempunyai sirkuit dan mempunyai n-1 garis
4. Setiap pasangan titik dalam G, hanya dihubungkan oleh satu path.
5. G adalah terhubung minimal.

Definisi 3.9.3

Suatu pohon P disebut pohon perentang dari graph terhubung G jika P adalah subgraph dari G dan P memuat semua titik dari graph G.

Contoh :

Contoh :



Gambar 3.23 Graph G dan pohon perentang T_1, T_2 dan T_3.

Pohon perentang dapat pula dibentuk dengan cara menghapus setiap sirkuit yang terdapat pada graph G. Misalkan kita mempunyai graph terhubung G, kemudian pilihlah salah satu sirkuit dan hapuslah salah satu garis dalam sirkuit itu misalkan e_1 maka terbentuk suatu graph $G - e_1$ yang tetap merupakan graph terhubung, selanjutnya teruskan dengan sirkuit yang lainnya sehingga tidak ada lagi sirkuit dan akan menghasilkan suatu pohon perentang.

Contoh :

Seperti pada Gambar 3.23, yaitu T_1 garis-garis e_5 e_6, e_7 dan e_8 adalah garis yang terhapus, pada T_2 garis e_3, e_5, e_6 dan e_7 yang dihapus, pada T_3 garis e_1, e_2, e_3 dan e_4 yang dihapus, sehingga hasil akhirnya tidak memiliki sirkuit dan dinamakan pohon perentang.

Didalam graph tidak terhubung dengan n titik dan e buah garis serta k buah komponen, dimana setiap komponen -

nya adalah merupakan graph yang terhubung, kemudian pada tiap komponen kerjakan cara penghapusan salah satu garis pada suatu sirkuit sehingga terbentuk pohon perentang-pohon perentang pada setiap komponennya dan dalam setiap komponennya hanya terdapat satu pohon perentang. Jadi banyaknya pohon perentang pada graph yang tidak terhubung adalah sama dengan banyaknya komponen yaitu k buah.

Definisi 3.9.4

Tali (chord) adalah garis-garis yang dihapus pada pohon perentang di dalam graph G.

Contoh :

Pada Gambar 3.23 yang merupakan tali adalah :

- pada T_1 yaitu garis e_5, e_6, e_7 dan e_8
- pada T_2 yaitu garis e_3, e_5, e_6 dan e_7
- pada T_3 yaitu garis e_1, e_2, e_3 dan e_4.

Definisi 3.9.5

Cabang (branch) adalah garis-garis yang terdapat pada pohon perentang dari graph G.

Contoh :

Pada Gambar 3.23 yang merupakan cabang adalah :

- pada T_1 yaitu garis e_1, e_2, e_3 dan e_4
- pada T_2 yaitu garis e_1, e_2, e_4 dam e_8
- pada T_3 yaitu garis e_5, e_6, e_7 dan e_8.

Dengan demikian, maka jumlah dari banyaknya cabang dan banyaknya tali dalam suatu graph G adalah banyaknya garis dalam graph itu.

Apabila suatu graph G didalamnya terdapat m buah sirkuit maka banyaknya tali sama dengan banyaknya sirkuit yaitu m buah. Dan jika graph G adalah merupakan pohon maka banyaknya tali pada graph tersebut sama dengan nol, sebab

Teorema 3.9

Dalam pohon perentang dari graph terhubung G dengan n titik dan e buah garis mempunyai (n-1) cabang dan (e-n+1) tali.

Bukti :

Pohon perentang juga merupakan pohon, dengan demikian maka sifat-sifat dari pohon juga berlaku untuk pohon perentang.

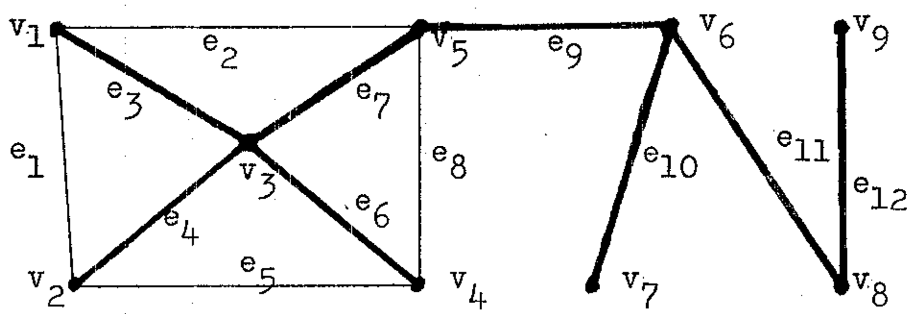
Menurut teorema 3.5 suatu pohon dengan n titik akan mempunyai n-1 garis, garis-garis tersebut merupakan cabang dari pohon yang juga berlaku untuk pohon perentang.

Sekarang akan dicari banyaknya tali. Diatas disebutkan bahwa jumlahan dari banyaknya cabang dan banyaknya tali adalah banyaknya garis dalam graph terhubung, dengan demikian banyaknya tali dalam graph terhubung adalah :

$$e - (n - 1) = e - n + 1 .$$

Maka terbukti bahwa dalam graph terhubung dengan n titik dan e buah garis mempunyai (n-1) cabang dan (e-n+1) tali.

Contoh :



Gambar 3.24 Graph dan pohon perentangnya.

Keterangan :

Graph terhubung G dengan 9 titik dan 12 garis, dalam pohon perentang (garis tebal) mempunyai cabang banyak $e - n + 1 = 12 - 9 + 1 = 4$ buah.

Adapun cabang dari pohon perentang diatas adalah $e_3, e_4, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}$ dan e_{12}. Sedangkan talinya adalah e_1, e_2, e_5 dan e_8 .

Teorema 3.10

Dalam pohon perentang dari graph G yang tidak terhubung dengan n titik dan e buah garis serta k buah komponen mempunyai $(n - k)$ cabang dan $(e - n + k)$ buah tali.

Bukti :

Dalam graph tidak terhubung G dengan k buah komponen, maka terdapat sebanyak k subgraph yang terhubung. Dari teorema 3.9 disebutkan bahwa dalam graph terhubung dengan ntitik dan e buah garis memiliki $(n - 1)$ cabang dan $(e - n + 1)$ tali.

Karena terdiri dari k komponen, maka banyaknya titik dalam graph tidak terhubung G adalah :

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Pandang salah satu komponen, misalkan K_1 dengan n_1 titik dan e_1 buah garis maka akan didapat sebanyak $(n_1 - 1)$ cabang dan $(e_1 - n_1 + 1)$ tali.

Karena terdapat sebanyak k buah komponen, maka banyaknya cabang dalam graph tidak terhubung adalah :

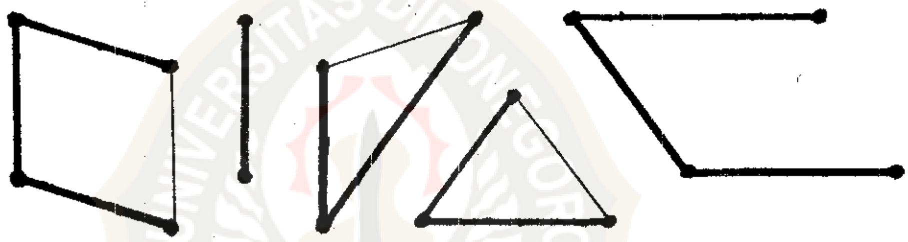
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) &= (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) \\ &= \underbrace{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)}_{= n} - \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{= k} \\ &= n - k .\end{aligned}$$

Dengan jalan yang sama, maka banyaknya tali adalah :

$$\sum_{i=1}^{k}(e_i-n_i+1) = (e_1-n_1+1)+(e_2-n_2+1)+\ldots+(e_k-n_k+1)$$
$$= (e_1+e_2+\ldots+e_k) - (n_1+n_2+\ \ldots\ +n_k)$$
$$+ (1+1+\ \ldots\ +1)$$
$$= e - n + k\ .$$

Maka terbukti bahwa graph tidak terhubung dengan n titik dan e buah garis serta k buah komponen memiliki (n - k) cabang dan (e - n + k) tali.

Contoh :



Gambar 3.25 Graph tidak terhubung G

Keterangan :

Graph tidak terhubung G terdiri dari lima kompo - nen, dimana pada setiap komponen diperoleh pohon perentangnya (bergaris tebal).

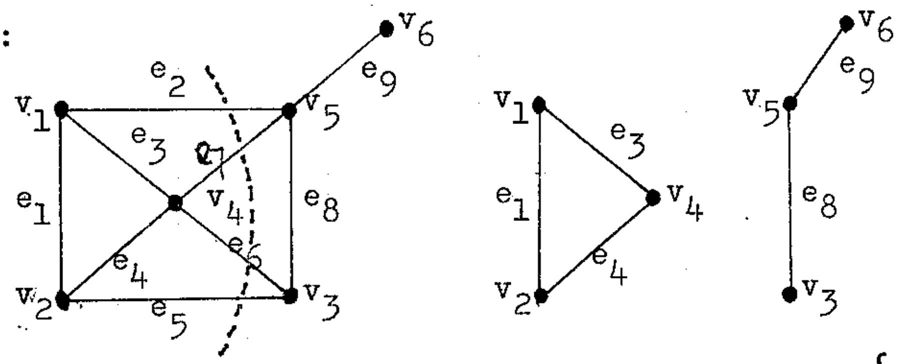
Graph G terdiri dari dari 16 titik dan 14 garis, pada pohon perentangnya mempunyai cabang sebanyak n - k = 16 - 5 = 11 buah, dan memiliki tali sebanyak e - n + k = 14 - 16 + 5 = 3 buah.

3 .10. HIMPUNAN PEMOTONG (CUT - SET)

Dalam suatu graph terhubung G, yang dimaksudkan dengan suatu hinpunan pemotong adalah himpunan garis - garis yang dihapus dari graph G yang menyebabkan graph G tidak terhubungkan lagi dan himpunan garis ini tidak mempunyai himpunan bagian sejati dari garis yang juga mengakibatkan graph G tidak terhubungkan lagi.

Contoh :

Contoh :



Gambar 3.26 Graph G dan himpunan pemotong $\{e_2, e_5, e_6, e_7\}$ yang memotong graph G menjadi dua.

Keterangan :

Himpunan garis $\{e_2, e_5, e_6, e_7\}$ adalah merupakan suatu himpunan pemotong, karena tidak ada himpunan bagian sejati dari garis yang mengakibatkan G tak terhubungkan.

Beberapa himpunan pemotong yang lain, seperti ; $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$; $\{e_1, e_2, e_3\}$; $\{e_1, e_4, e_5\}$; $\{e_5, e_6, e_8\}$; $\{e_2, e_7, e_8\}$ dan sebagainya. Serta himpunan garis yang hanya terdiri dari satu garis saja misalnya $\{e_9\}$ juga merupakan suatu himpunan pemotong.

Himpunan garis $\{e_2, e_7, e_8, e_9\}$ bukanlah himpunan pemotong karena himpunan ini mempunyai himpunan bagian sejati yaitu $\{e_2, e_7, e_8\}$ dan juga $\{e_9\}$ yang masing-masing juga mengakibatkan G tidak terhubungkan lagi.

Cara lain untuk menentukan suatu himpunan pemotong, yaitu :

Jika kita memisahkan semua titik dari graph terhubung G menjadi dua himpunan bagian secara nyata , maka yang disebut dengan himpunan pemotong adalah jumlah minimal garis-garis yang dihapus dari grap G dan yang menghilangkan (merusak) semua path antara dua himpunan titik-titik graph G.

Contoh :

menghubungkan himpunan titik $\{v_1, v_2, v_4\}$ dan $\{v_3, v_5, v_6\}$.

Catatan : bahwa satu atau kedua dari himpunan bagian dari titik-titik ini boleh terdiri atas satu titik saja .

Teorema 3 .11

Setiap himpunan pemotong dalam suatu graph terhubung G harus terdiri paling sedikit atas satu cabang dari setiap pohon perentang dalam graph G.

Bukti :

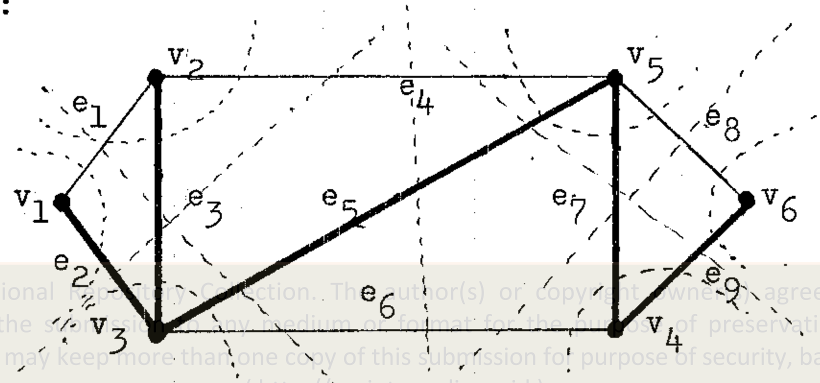
Diketahui G adalah graph terhubung.

Dari definisi bahwa himpunan pemotong adalah himpunan garis-garis dalam graph G yang dihapus, sehingga graph G itu tidak terhubungkan lagi.

Pandang T adalah pohon perentang dari graph G, maka setiap pasangan titik-titiknya hanya terdapat satu path. Sehingga apabila salah satu garis dalam T ini dihapus, maka menyebabkan T terbagi atas dua pohon.

Jadi terbukti bahwa setiap himpunan pemotong harus mengandung paling sedikit satu cabang dari pohon perentang dalam graph G.

Contoh :



Gambar 3.27 Graph G dengan pohon perentang (garis tebal)

Keterangan :

Terlihat pada Gambar, bahwa setiap himpunan pemo- paling sedikit terdiri atas satu cabang dari pohon perentang dalam graph itu.

Teorema 3 .12

Dalam suatu graph terhubung G, setiap himpunan dari garis yang minimal dan paling sedikit mengandung satu cabang dari pohon perentang graph G disebut suatu himpunan pemotong.

Bukti :

Diberikan suatu graph terhubung G.
Pandang Q adalah himpunan dari garis yang minimal dan paling sedikit mengandung satu cabang dari setiap pohon perentang dari G.
G – Q adalah subgraph yang tersisa setelah penghapusan garis dalam Q dari G. Karena subgraph G-Q bukan merupakan pohon perentang dari G, maka G-Q adalah tidak terhubung (salah satu komponennya boleh terdiri dari satu titik terisolasi). ?
Juga, karena Q adalah himpunan dari garis yang minimal yang dimiliki, maka setiap garis e dari Q apabila digabungkan pada G – Q akan menimbulkan paling sedikit satu pohon perentang dari G.
Jadi subgraph G – Q + e adalah graph terhubung.
Maka dari itu, Q adalah himpunan minimal dari garis yang dihapus dari G yang menyebebkan G tidak terhubung lagi. Dari definisi, maka Q adalah suatu himpunan pemotong.

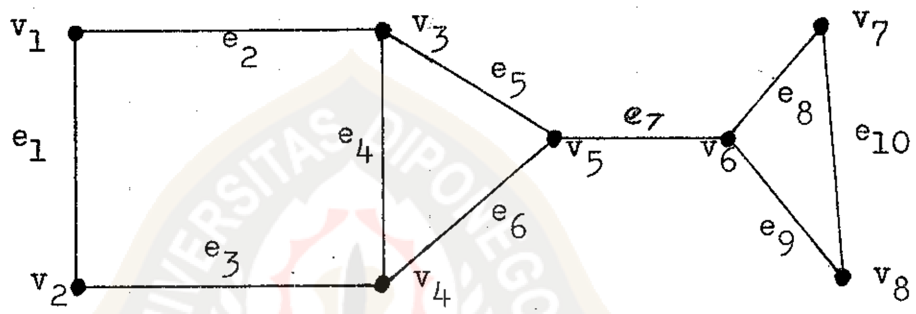
3 .11. SEPARABLE GRAPH DAN NONSEPARABLE GRAPH

Definisi 3 .11.1

tong (cut-point) dari graph G apabila penghapusan titik v_i beserta garis-garis yang insiden dengan v_i menghasilkan graph yang komponennya lebih banyak dari komponen semula.

Jadi jika v_i titik pemotong dari graph terhubung G, maka $G - v_i$ adalah graph tidak terhubung.

Contoh :



Gambar 3.28

Keterangan :

v_5 adalah titik pemotong, karena bila dihapus menghasilkan dua komponen. Demikian juga v_6, tetapi v_7 bukan titik pemotong sebab apabila dihapus tidak menghasilakn graph yang tidak terhubung.

Definisi 3.11.2

Suatu garis e_k dari graph G disebut suatu jembatan (bridge) dari graph G apabila penghapusan garis e_k dari G menghasilkan graph yang komponennya lebih banyak dari komponen semula.

Contoh :

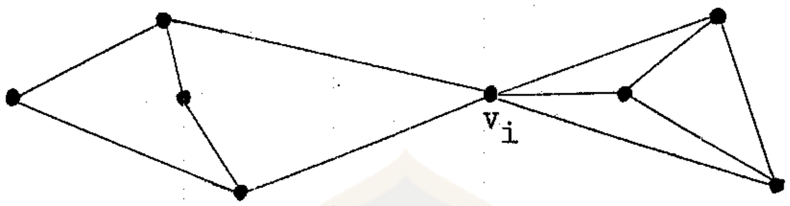
Pada Gambar 3.28, garis e_7 adalah jembatan dari graph itu, karena bila dihapus menghasilkan dua komponen. Garis e_{10} bukan jembatan.

Catatan : Definisi dari titik pemotong hanya berlaku pada graph terhubung yang mempunyai tiga titik atau lebih dan bukan merupakan graph lengkap.

Definisi 3 .11.3

Separable graph (graph yang dapat dipisahkan) adalah suatu graph terhubung, bukan graph nol dan graph itu mempunyai titik pemotong.

Contoh :



Gambar 3.29 Separable graph G

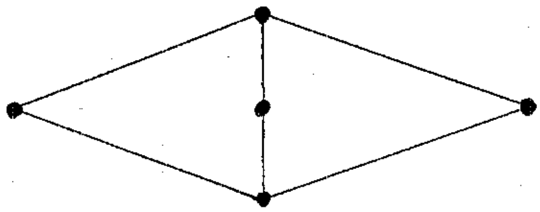
Keterangan :

Graph G ini disebut separable graph, karena mempunyai titik pemotong yaitu v_i.

Definisi 3 .11.4

Nonseparable graph (graph yang tidak dapat dipisahkan) adalah suatu graph terhubung, bukan graph nol dan tidak mempunyai titik pemotong.

Contoh :



Gambar 3.30 Non separable graph

Definisi 3.11.5

Suatu blok (block) dari graph G adalah subgraph yang tidak dapat dipisahkan yang maksimal dari graph tersebut.

Contoh :

Pada Gambar 3.29, graph tersebut terdapat dua blok, yaitu :