BAB II

M A T R I K S

2.1. PENGERTIAN MATRIKS

Definisi 2.1.1

Suatu matriks didefinisikan sebagai daftar bilangan real atau kompleks yang berbentuk segi empat dan tersusun secara teratur atas elemen-elemen menurut baris-baris dan kolom-kolom serta dibatasi oleh tanda kurung.

Contoh :

Matriks A berukuran (m x n) adalah :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

atau $A = \left[a_{ij}\right]$, dimana $i = 1,2, \ldots ,m$ dan $j = 1,2, \ldots ,n$.

2.2. OPERASI PADA MATRIKS

2.2.1 Kesamaan dua matriks

Definisi 2.2.1

Dua matriks $A = \left[a_{ij}\right]$ dan $B = \left[b_{ij}\right]$ berukuran (mxn) adalah sama bila dan hanya bila $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots ,m$ dan $j = 1,2, \ldots, n$.

2.2.2 Penjumlahan dua matriks

Definisi 2.2.2

Jumlah dua matriks yang berukuran sama yaitu (m x n) $A = \left[a_{ij}\right]$ dan $B = \left[b_{ij}\right]$ adalah suatu matriks $C = \left[c_{ij}\right]$ ukuran (m x n) dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.2.3 Perkalian suatu matriks dengan skalar

Definisi 2.2.3

Hasil kali matriks $A = [a_{ij}]$ ukuran (m x n) dengan skalar λ adalah berupa matriks $C = [c_{ij}]$, dengan $c_{ij} = \lambda . a_{ij}$ untuk setiap i dan j.

Beberapa hukum pada penjumlahan dan perkalian skalar, bila A, B dan C matriks berukuran sama dan λ skalar, adalah:

1. $A + B = B + A$ (komutatif)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (assosiatif)
3. $\lambda . (A + B) = \lambda A + \lambda B$ (distributif)
4. Selalu ada matriks D sedemikian sehingga $A + D = B$

   Catatan :

   Mengurangi matriks A dengan matriks B yaitu A - B adalah menjumlahkan matriks A dengan matriks -(B).

Definisi 2.2.4

Jika $A = [a_{ij}]$ berukuran (m x n) dan $B = [b_{ij}]$ berukuran (m x p), maka hasil kali A.B adalah matriks $C = [c_{ij}]$ ukuran (m x p) dengan :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . b_{kj}$$

untuk setiap i = 1,2,...,m dan j =1,2,...,p.

Jadi A dan B dapat dikalikan menjadi C, jika banyaknya kolom dari A sama dengan banyaknya baris B.

Beberapa hukum pada perkalian matriks, jika A,B dan C matriks-matriks yang memenuhi syarat-syarat perkalian matriks yang diperlukan, maka :

1. $A (B + C) = AB + AC$ (distributif)
2. $A (B C) = (A B) C$ (assosiatif)
3. Perkalian matriks pada umumnya tidak komutatif, yaitu :

   $A B \neq B A$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.3. BEBERAPA JENIS MATRIKS KHUSUS

Definisi 2.3.1

Matriks nol ditulis O adalah suatu matriks yang semua elemen-elemennya sama dengan nol.

Contoh :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.3.2

Matriks bujursangkar adalah suatu matriks yang mempunyai banyak kolom sama dengan banyaknya baris. Misal banyak kolom yaitu n maka disebut matriks bujursangkar order (ukuran) n.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ matriks bujursangkar order 3

Elemen-elemen a_{11}, a_{22}, a_{33} disebut elemen-elemen diagonal.

Definisi 2.3.3

Vektor baris adalah suatu matriks yang terdiri atas satu baris saja.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$ ukuran (1xn)

Definisi 2.3.4

Vektor kolom adalah suatu matriks yang terdiri atas satu kolom saja.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh :

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \text{ukuran } (n \times 1)$$

Definisi 2.3.5

Matriks bujursangkar $A = \{a_{ij}\}$ dikatakan matriks segi tiga atas (upper trianguler) apabila $a_{ij} = 0$ untuk setiap $i > j$.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definisi 2.3.6

Matriks bujursangkar $A = \{a_{ij}\}$ dikatakan matriks segitiga bawah (lower trianguler) apabila $a_{ij} = 0$ untuk setiap $i < j$.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.3.7

atas dan matriks segitiga bawah disebut matriks diagonal.

Contoh :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriks ini bisa dituliskan sebagai :

$D = \text{diag} \left\{ a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn} \right\}$

Definisi 2.3.8

Matriks skalar adalah matriks diagonal dengan semua elemen diagonalnya sama.

Jadi elemen $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$

Contoh :

$$D = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}$$

Definisi 2.3.9

Matriks Identitas I adalah matriks skalar dengan elemen diagonalnya sama dengan satu.

Jadi elemen $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$.

Contoh :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 00 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.3.10

Pandang suatu matriks $A = \{a_{ij}\}$ berukuran (m x n) maka transpose dari A adalah A^T berukuran (n x m) yang didapat dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A sebagai kolom ke-i dari A^T atau $A^T = \{a_{ji}\}$ Dengan kata lain, A^T didapat dengan menukar baris baris A menjadi kolom-kolom A^T dan sebaliknya.

Beberapa sifat matriks transpose :

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(A B)^T = B^T A^T$

Definisi 2.3.11

Matriks simetris adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri, dengan perkataan lain $A = A^T$ atau $\{a_{ij}\} = \{a_{ji}\}$ untuk semua i dan j. Jadi matriks simetris merupakan matriks bujur sangkar.

Definisi 2.3.12

Dua matriks bujur sangkar A dan B dikatakan orthogonal jika memenuhi hubungan :

$$A \cdot B^T = B \cdot A^T = 0$$

Jadi :

$$\{a_{ij}\} \cdot \{b_{ji}\} = \{b_{ij}\} \cdot \{a_{ji}\} = 0$$

2.4 D E T E R M I N A N

Bila A adalah matriks bujur sangkar yang berukuran (n x n) dengan unsur-unsur bilangan real atau kompleks , yaitu :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

maka A bisa dikaitkan secara tunggal dengan harga bilangan real atau kompleks yang disebut determinan matriks A dan ditulis det A atau $|A|$.

Matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $(n \times n)$.

Minor untuk a_{ij} ditulis M_{ij}, sedangkan $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ disebut kofaktor untuk a_{ij}.

Det A bisa dijabarkan menurut baris ke-i atau kolom ke-j sebagai berikut :

(i). Penjabaran determinan manurut baris ke-i :

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \text{untuk } i \text{ tertentu dan } 1 \leq j \leq n.$$

(ii). Penjabaran determinan manurut kolom ke - j :

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \text{untuk } j \text{ tertentu dan } 1 \leq i \leq n.$$

Contohnya, penjabaran $|A|$ menurut baris ke - 1 adalah :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Di bawah ini diberikan sifat-sifat determinan yang tidak akan dibuktikan :

(i). Suatu determinan berorde - n mempunyai n^2 suku.

(ii). Dalam setiap determinan berorde lebih dari satu , banyaknya suku yang bertanda (+) sama dengan banyak nya suku yang bertanda (-).

(iii). Harga determinan tidak berubah bila baris diganti kolom atau sebaliknya.

(iv). Bila dalam determinan, dua kolom atau baris ditukar kan, terjadi determinan baru yang berharga berlawan an dengan determinan semula.

(v). Bila suatu determinan mempunyai dua baris/kolom

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

yang sama, harga determinan sama dengan 0.

(vi). Bila semuamunsur dari kolom/batis suatu detrminan dikalikan dengan k, harga determinan juga terkalikan dengan k.

(vii). Bila dalam suatu determinan, unsur-unsur suatu kolom atau baris adalah 0 maka harga determinannya sama dengan 0.

(viii) Harga determinan tidak akan berubah bila unsur-unsurnya dari suatu baris/kolom setelah dikalikan dengan suatu konstanta ditambahkan kepada unsur-unsur suatu baris/kolom yang lain.

(ix). Bila A dan B matriks bertipe (n x n) maka :

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| .$$

Definisi 2.4.1

Suatu matriks B disebut invers dari matriks A bila dan hanya bila dipenuhi : $A \cdot B = B \cdot A = I$, dimana I adalah matriks identitas.

Jadi A dan B pastilah dua matriks bujur sangkar berorde sama.

Untuk selanjutnya invers dari A ditulis " A^{-1} ".

Invers dari matriks A (jika ada) dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

dengan $|A| \neq 0$, dan A_{ij} adalah kofaktor-kofaktor dari matriks A. A memiliki invers jika matriks A adalah matriks non singulir.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Beberapa sifat dari suatu invers adalah :

(i). Misalkan A dan B dua matriks non singulir. Perkalian dari dua matriks non singulir adalah non singulir. Dan $(A . B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$.

(ii). Invers dari invers matriks adalah matriks itu sendiri atau $(A^{-1})^{-1} = A$.

(iii). Matriks identitas mempunyai invers dirinya sendiri artinya $I . I^{-1} = I$ jadi $I^{-1} = I$.

(iv). Invers dari suatu transpose matriks A adalah transpose dari pada invers, yaitu $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

------oOo-------

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)