BAB II

TEORI PENUNJANG

Agar lebih mudah membahas Proses Branching, maka dalam bab ini diterangkan pengertian-pengertian, teori-teori dan beberapa contoh yang menunjang isi daripada Proses Branching tersebut.

II.1. KONSEP - KONSEP PENTING

Setiap hasil yang mungkin dari suatu eksperimen disebut out come. Dan setiap out come yang mungkin dari suatu eksperimen disebut titik sampel, biasanya diberi notasi ω, sedangkan keseluruhan dari out come yang mungkin disebut ruang sampel, yang biasanya diberi notasi Ω. Suatu event adalah suatu himpunan bagian dari ruang sampel. Kelas dengan anggota-anggotanya semua event yang mungkin dari suatu eksperiment disebut ruang event. Ruang event biasanya diberi notasi $\mathcal{A}$, sedangkan $\mathcal{F}$ dan β notasi untuk kelas yang terdiri atas sejumlah event.

II.2. FUNGSI PROBABILITAS

Sebelum menjelaskan fungsi probabilitas terlebih dahulu diterangkan mengenai fungsi.

DEFINISI II.2.1.

Suatu fungsi dari S ke T (atau S sebagai daerah sumber (domain) dan T sebagai daerah-kawan (co-domain) ialah suatu aturan yang pada setiap anggota dari S menentukan dengan tunggal satu anggota dalam T.

Suatu fungsi f dari S ke T disajikan dengan tanda,

$f : S \dashrightarrow T$. Apabila $s \in S$, maka kawannya (tunggal) yang berada dalam T disajikan dengan f(s), yang menyatakan bahwa s dibawa ke f(s).

Catatan : Apabila anggota sembarang dari himpunan S disajikan dengan perobah "x" , sedangkan anggota sembarang dari himpunan T disajikan dengan perobah "y" maka suatu fungsi f yang disajikan dengan $f : x \dashrightarrow y = f(x) = x^2$. Dalam terminologi lama orang berbicara tentang fungsi $y = x^2$. Ini kurang tepat. Sebab yang disebut fungsi ialah perkawanan seluruhnya. Sedangkan x^2 (=y) adalah kawan dari x, dan disebut harga dari fungsi untuk x. Terminologi lebih baik ialah bahwa rumus $y = x^2$ menentukan suatu fungsi.

DEFINISI II.2.3.

Misalkan Ω adalah ruang sampel dan $\mathcal{A}$ adalah aljabar event, suatu fungsi probabilitas P(.) adalah fungsi semua himpunan dengan domain $\mathcal{A}$ dan daerah kawan (kodomain) interval $[0,1]$ yang memenuhi :

i. $P(A) \geq 0$ untuk semua $A \in \mathcal{A}$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. jika $A_1, A_2, \ldots\ldots$ koleksi event-event yang saling asing dalam $\mathcal{A}$ (yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$, untuk $i \neq j$, $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ dan $j = 1, 2, 3, \ldots\ldots$) dan jika $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots = \bigcup_{i=1} A_i \in \mathcal{A}$, maka

$$P\left(\bigcup_{i=1} A_i\right) = \sum_{i=1} P(A_i)$$

Catatan : P(A) dibaca " probabilitas event A ".

Suatu ruang probabilitas adalah tripel $[\Omega, \mathcal{A}, P(.)]$ dimana Ω adalah ruang sampel, $\mathcal{A}$ adalah ruang event dan P(.) adalah fungsi probabilitas dengan domain .

DEFINISI II.2.3.

Diberikan ruang probabilitas $[\Omega, \mathcal{A}, P(.)]$, A dan B adalah dua event dalam $\mathcal{A}$. Probabilitas bersyarat dari

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Notasi untuk P(AB) adalah $P(A \cap B)$.

TEOREMA II.2.1.

Misalkan $[\Omega, \mathcal{A}, P(.)]$ adalah ruang probabilitas dan $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ adalah koleksi dari event-event dalam $\mathcal{A}$ yang saling asing, yang memenuhi $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ dan $P(B_j) > 0$, untuk j = 1, 2, 3,.. ....., n. Maka untuk setiap $A \in \mathcal{A}$ berlaku :

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)\, P(B_j)$$

Bukti.

Karena $A = A\,\Omega$

$$= A(\bigcup_{j=1}^{n} B_j)$$

$$= \bigcup_{j=1}^{n} (AB_j)$$

dan karena AB_j ; j = 1, 2, 3,......., n saling asing maka menurut Definisi II.2.3. didapat :

$$P(A) = P(\sum_{j=1}^{n} (AB_j))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(AB_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)\, P(B_j)$$

Terbukti.

Contoh :

Dimisalkan terdapat kotak pertama dan kedua, jika kotak pertama berisi 3 bola merah dan 7 bola biru sedangkan kotak kedua berisi 6 bola merah dan 4 bola biru. Satu kotak dipilih secara raddom dan satu bola diambil dari kotak tersebut. Berapa probabilitas bahwa bola tersebut merah ?

Jawab.

Misalkan A adalah event diperoleh bola merah, B_1 dan B_2 adalah event dipilih kotak pertama dan kedua, sehingga probabilitas bahwa bola merah adalah :

$$P(A) = \sum_{j=1}^{2} P(A!B_j)\, P(B_j) = P(A!B_1)\, P(B_1) + P(A!B_2)\, P(B_2)$$

$$= \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{20}$$

II.3. PENGERTIAN RANDOM VARIABEL DISKRET

DEFINISI II.3.1.

Suatu random variabel adalah suatu fungsi berharga real yang harganya ditentukan oleh setiap anggota dalam ruang sampel.

Suatu random variabel dinyatakan dengan huruf besar, misalkan X, sedangkan harganya dinyatakan dengan huruf kecil, misalkan x.

DEFINISI II.3.2.

Suatu random variabel X disebut diskret jika range X (. . . . adalah countabel.

Catatan : Himpunan H disebut countabel jika H berhingga atau anggota-anggota dari H dapat dikawankan satu-satu dengan anggota-anggota himpunan bilangan alam.

II.3.1. DISTRIBUSI PROBABILITAS

Diberikan suatu ruang probabilitas $[\Omega, \mathcal{A}, P(.)]$ dan misalkan X adalah random variabel yang didefinisikan pada ruang sampel Ω dengan $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\}$ yang countabel. Suatu himpunan $\{\omega ! \ \omega \in \mathcal{A}, X(\omega) = x_i \in R_X\} \in \mathcal{A}$ atau ditulis sebagai $\{X = x_i\} = \{\omega ! \omega \in \mathcal{A}, X(\omega) = x_i \in R_X\}$.

DEFINISI II.3.3.

Diberikan ruang probabilitas $[\Omega, \mathcal{A}, P(.)]$ dan suatu random variabel X pada ruang sampel Ω, suatu fungsi $P_X = \{(x_i, P(X = x_i)) ! \ x_i \in R_X\}$ disebut distribusi probabilitas dari X.

Contoh :

Suatu mata uang dilemparkan dua kali. Jika random variabel X menyatakan jumlah muka dari pelemparan mata uang, maka $\Omega = \{(m,m),\ (m,b),\ (b,m),\ (b,b)\}$, dan jika $A \in \mathcal{A}$ dengan $P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{n_A}{4}$, maka $[\Omega,\ \mathcal{A},\ P(.)]$ adalah suatu ruang probabilitas.

Perhitungan.

$\{X = 0\} = \{(b,b)\}$, maka $P(X = 0) = P((b,b)) = \frac{1}{4}$.

$\{X = 1\} = \{(m,b),\ (b,m)\}$, maka $P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

$\{X = 2\} = \{(m,m)\}$, maka $P(X = 2) = P((m,m)) = \frac{1}{4}$.

Sehingga distribusi probabilitas X adalah $P_X = \{(0,\frac{1}{4}),\ (1,\frac{1}{2}),\ (2,\frac{1}{4})\}$.

DEFINISI II.3.4.

Distribusi berserikat dari dua random variabel X dan Y pada ruang sampel Ω di dalam ruang probabilitas $[\Omega,\ \mathcal{A},\ P(.)]$ adalah fungsi $\{((x_i,y_j),P(X = x_i,\ Y = y_j)) \mid x_i \in R_X,\ y_j \in R_Y\}$.

Contoh :

Suatu kotak berisi empat bola bernomor ; 1, 2, 3 dan 4. Dua bola diambil secara random. Jika dua random variabel X dan Y didefinisikan pada Ω dimana X menyatakan jumlah dari dua nomor yang diambil dan Y menyatakan nomor yang lebih besar dari dua nomor yang diambil. Ditanyakan distribusi probabilitas berserikat dari random variabel X dan Y ?

Penyelesaian .

Untuk $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \frac{n_A}{6}$, sehingga $[\Omega,\ \mathcal{A},\ P(.)]$ suatu ruang probabilitas. Didapat ruang sampel $\Omega = \{(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4)\}$, dan $R_X = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $R_Y = \{2,\ 3,\ 4\}$.

$\{X = 3\} = \{(1,2)\}$, $\{Y = 2\} = \{(1,2)\}$

$\{X = 4\} = \{(1,3)\}$, $\{Y = 3\} = \{(1,3),\ (2,3)\}$

$\{X = 5\} = \{(1,4),\ (2,3)\}$, $\{Y = 4\} = \{(1,4),\ (2,4),\ (3,4)\}$

$\{X = 6\} = \{(2,4)\}$, $\{X = 7\} = \{(3,4)\}$

Jika diambil event $\{X = 3,\ Y = 2\}$,

sehingga $P(X = 3,\ Y = 2) = P((1,2)) = \frac{1}{6}$. Dengan cara yang sama dapat dihitung :

$P(X = 3,\ Y = 3) = P(X = 3,\ Y = 4) = P(X = 4,\ Y = 2) =$
$P(X = 4,\ Y = 4) = P(X = 5,\ Y = 2) = P(X = 6,\ Y = 2) =$
$P(X = 6,\ Y = 2) = P(X = 7,\ Y = 2) = P(X = 7,\ Y = 3) =$
$P(\emptyset) = 0$.

$P(X = 5,\ Y = 4) = P((1,4)) = \frac{1}{6}$.

$P(X = 4,\ Y = 3) = P((1,3)) = \frac{1}{6}$.

$P(X = 6,\ Y = 4) = P((2,4)) = \frac{1}{6}$.

$P(X = 5,\ Y = 3) = P((2,3)) = \frac{1}{6}$.

$P(X = 7,\ Y = 4) = P((3,4)) = \frac{1}{6}$.

Didapat tabel distribusi probabilitas berserikat dari X dan Y sebagai berikut :

$R_Y \backslash R_X$	3	4	5	6	7	P_Y
2	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$
4	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
P_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Tabel 2.3.a.

Prosedur diatas secara mudah dapat dinyatakan sebagai berikut. Misalkan $[\Omega,\ \mathcal{A},\ P(.)]$ ruang probabilitas, X dan Y dua random variabel yang didefinisikan pada ruang sampel Ω, dan jika $R_X = \{x_1,\ x_2, \ldots\ldots\}$, dan $R_Y = \{y_1,\ y_2, \ldots\}$

Jika probabilitas berserikat dari dua random variabel X dan

Untuk singkatnya jika $P_X(x_i) = P(X = x_i)$ dan $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$, dengan i = 1, 2, 3,....... dan j = 1, 2, 3,.......
Untuk suatu $x_i \in R_X$ maka dapat dihitung $P_X(x_i)$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} P_X(x_i) &= P(X = x_i) \\ &= P(\{X = x_i\}) \\ &= P(\{X = x_i\} \bigcup_{j=1} \{Y = y_j\}) \\ &= P(\bigcup_{j=1} \{X = x_i\}\{Y = y_j\}) \\ &= \sum_{j=1} P(X = x_i, Y = y_j) \end{aligned}$$

Untuk $P_Y(y_j)$ dihitung secara sama.

Perlu diperhatikan bahwa pada pembicaraan tersebut, yaitu random variabel berdimensi dua (X, Y), yang didefinisikan pada ruang probabilitas yang sama. Jika X_1, X_2,.........., X_k adalah k buah random variabel yang didefinisikan pada ruang probabilitas yang sama, maka $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ disebut random variabel berdimensi k. Random variabel $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ disebut diskret jika nilai-nilai yang mungkin adalah $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ yang banyaknya countabel. Distribusi probabilitas bersama untuk k buah random variabel didefinisikan secara sama, dengan duah buah random variabel.

II.3.2. EKSPEKTASI DAN VARIANSI

DEFINISI II.3.5.

Misalkan X adalah random variabel yang diskrit dengan range $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ dan berdistribusi probabilitas P_X. Ekspektasi atau mean dari X adalah :

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i \, P_X(x_i)$$

Notasi untuk E(X) yang lebih umum adalah μ_X.

Dengan Definisi II.3.5. akan dibuktikan bahwa :

$$E(X^2) = \sum_{x_j \in R_X} x_j^2 \, P_X(x_j)$$

Bukti.

$$E(X^2) = \sum_{\xi_k \in R_{X^2}} \xi_k \, P_{X^2}(\xi_k)$$

$$= \sum_{\xi_k \in R_{X^2}} \xi_k \, P(X^2 = \xi_k)$$

$$= \sum_{\xi_k \in R_{X^2}} \xi_k \, P(X = \sqrt{\xi_k} \text{ atau } X = -\sqrt{\xi_k})$$

$$= \sum_{\xi_k \in R_{X^2}} \xi_k \left[P(X = \sqrt{\xi_k}) + P(X = -\sqrt{\xi_k}) \right]$$

$$= \sum_{\xi_k \in R_{X^2}} \xi_k \, P_X(\sqrt{\xi_k}) + \sum_{\xi_k \in R_{X^2}} \xi_k \, P_X(-\sqrt{\xi_k})$$

Jika $P_X(\sqrt{\xi_k}) \neq 0$, maka $\sqrt{\xi_k} = x_j \in R_X$ sedemikian sehingga $x_j \geqslant 0$ dan $x_j^2 = \xi_k$. Demikian juga jika $P_X(-\sqrt{\xi_k}) \neq 0$, maka $-\sqrt{\xi_k} = x_i \in R_X$ sedemikian sehingga $x_i < 0$ dan $x_i^2 = \xi_k$. Oleh karenanya

$$E(X^2) = \sum_{\substack{x_j \in R_X \\ x_j \geqslant 0}} x_j^2 \, P_X(x_j) + \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i < 0}} x_i^2 \, P_X(x_i)$$

$$= \sum_{x_k \in R_X} x_k^2 \, P_X(x_k). \text{ Terbukti.}$$

DEFINISI II.3.1.

Misalkan X adalah random variabel. Variansi dari X dinyatakan dengan symbol σ^2 adalah $\sigma^2 = V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$ dan akar nonnegatif dari variansi disebut standard deviasi dari X.

TEOREMA II.3.1.

Jika X random variabel, maka $V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - (E(X))^2$.

Bukti.

Dari Definisi II.3.6. didapat :

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

$$= E\left[X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2\right]$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2$$

$$= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2$$

II.3.3. INDEPENDENT RANDOM VARIABEL

Misalkan X dan Y random variabel yang didefinisikan pada ruang sampel Ω dan distribusi probabilitas masing-masing P_X dan P_Y, maka distribusi bersama diberikan dengan $p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j)$.

DEFINISI 2.3.6.

Dua random variabel X dan Y pada Ruang sampel yang sama dikatakan independent jika :

$$p_{ij} = P(X = x_i).\ P(Y = y_j) = P_X(x_i)\ P_Y(y_j)$$

Pengertian saling independent dari tiga atau lebih random variabel adalah sama untuk dua random variabel. Random variabel $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ didefinisikan pada ruang sampel yang sama dikatakan saling independent jika

$$\begin{aligned} p_{j1j2\ldots jn} &= P(X_1 = x_{j1},\ X_2 = x_{j2}, \ldots,\ X_n = x_{jn}) \\ &= P_{X_1}(x_{j1})\ P_{X_2}(x_{j2})\ \ldots P_{X_n}(x_{jn}) \end{aligned}$$

II.4. BEBERAPA TEOREMA DASAR

POSTULAT :

Jika terdapat N cara Untuk membuat pemilihan yang satu dan M cara untuk membuat pilihan yang lain, maka terdapat NM cara untuk membuat pilihan keduaduanya.

Untuk menjelaskan postulat ini, misalkan A dan B suatu himpunan yang masing-masing mempunyai n(A) dan n(B) elemen, maka jumlah elemen dari AXB adalah n(A).n(B), artinya n(AXB) = n(A).n(B).

TEOREMA II.4.1.

Jika $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$, maka banyaknya cara menyekat n elemen yang dapat dibagi menjadi k masing-masing berisi $r_1, r_2, \ldots, r_k$ elemen adalah

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \ldots\ldots\ r_k!}$$

Bagian pertama r_1 elemen dapat dipilih dengan $\binom{n}{r_1}$ cara, yang kedua dipilih dari sisanya dengan $\binom{n-r_1}{r_2}$ cara, ketiga masih terdapat $n-r_1-r_2$ elemen dapat dipilih dengan $\binom{n-r_1-r_2}{r_3}$ cara, dan seterusnya sehingga bagian terakhir dapat dipilih dalam $\binom{n-r_1-r_2-\ldots\ldots-r_{k-1}}{r_k} = \binom{r_k}{r_k}$ cara. Menurut Postulat maka banyak cara menyekat suatu himpunan n elemen adalah :

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\ldots\binom{n-r_1-r_2-\ldots\ldots-r_{k-1}}{r_k} =$$

$$\frac{n!}{r_1!(n-r_1)!}\,\frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!}\ldots\ldots\frac{(n-r_1-r_2-\ldots\ldots-r_{k-1})!}{r_k!(n-r_1-r_2-\ldots\ldots-r_{k-1}-r_k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r_1+1)}{r_1!}\,\frac{(n-r_1)(n-r_1-1)\ldots(n-r_1-r_2+1)}{r_2!}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\frac{r_k(r_k-1)\ldots 2.1.}{r_k!}$$

$$= \frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \ldots\ r_k!}$$

Dimana notasi untuk $\dfrac{n!}{r_1!\ r_2!\ \ldots\ r_k!}$ adalah $\binom{n}{r_1,\ r_2,\ldots,r_k}$

dan $\binom{n}{r_k} = \dfrac{n!}{r_k!(n-r_k)!}$

TEOREMA II.4.3.

Jika n dan j adalah bilangan bulat nonnegatif, maka berlaku : $\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j}$

Bukti.

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} = \frac{n!}{j!(n-j)!} + \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!}$$

$$= \frac{(n-j+1)n!}{j!(n-j+1)!} + \frac{n!\ j}{j!(n-j+1)!}$$

$$= \frac{(n-j+1+j)n!}{j!(n-j+1)!} = \frac{(n+1)n!}{j!(n-j+1)!} = \frac{(n+1)}{j!(n-j+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{j}$$. Terbukti.

TEOREMA II.4.4.

Jika $r_1 + r_2 + \ldots + r_k + j = n$, dengan j bilangan bulat nonnegatif maka berlaku :

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{r_1,\ r_2,\ldots,\ r_k} = \binom{n}{r_1,\ r_2,\ldots,\ r_k,\ j}$$

Bukti.

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\ \frac{(n-j)!}{r_1!\ r_2!\ \ldots\ r_k!}$$

$$= \frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \ldots\ r_k!\ j!}$$

$$= \binom{n}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k,\ j}$$

Terbukti.

TEOREMA II.4.5.

Jika $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$, maka berlaku

$$\binom{n-1}{r_1-1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k} + \binom{n-1}{r_1,\ r_2-1,\ \ldots,\ r_k} + \ldots.$$

$$\ldots. + \binom{n-1}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{k-1}} = \binom{n}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k}$$

Bukti.

Dibuktikan dengan induksi pada n.

Pangkal : Pernyataan benar untuk n = 1, dari pengamatan sebab jika $n = r_1 = 1$, maka $\binom{n-1}{r_1-1} = \binom{n}{r_1} = 1$.

Langkah : Andaikan pernyataan benar untuk n = p akan dibuktikan bahwa pernyataan benar untuk n = p + 1

Dari Teorema II.4.5. didapat

$$\binom{p+1}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k\ ,\ 1} = \binom{p+1}{1}\binom{p}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k} =$$

$$\binom{p+1}{1}\left[\binom{p-1}{r_1-1,\ r_2,\ldots,\ r_k} + \binom{p-1}{r_1,\ r_2-1,\ldots,\ r_k} + \ldots.\right.$$

$$\left.\ldots. + \binom{p-1}{r_1,\ r_2,\ \ldots.\ ,\ r_k-1}\right]$$

$$= \left[\binom{p}{1} + \binom{p}{0}\right]\left[\binom{p-1}{r_1-1,\ r_2,\ \ldots\ ,\ r_k} + \binom{p-1}{r_1,\ r_2-1,\ \ldots,\ r_k}\right.$$

$$\left. + \ldots + \binom{p-1}{r_1,\ r_2,\ \ldots\ ,\ r_k-1}\right]$$

$$= \binom{p}{1}\left[\binom{p-1}{r_1-1,\ r_2,\ \ldots\ ,\ r_k} + \binom{p-1}{r_1,\ r_2-1,\ \ldots\ ,\ r_k} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \binom{p-1}{r_1,\ r_2,\ \ldots\ ,\ r_k-1}\right] + \binom{p}{0}\left[\binom{p-1}{r\ -1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k}\right.$$

$$\binom{p-1}{r_1,\ r_2-1,\ \ldots,\ r_k} + \ldots + \binom{p-1}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{k-1}}\Bigg]$$

$$= \binom{p}{r_1-1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k,\ 1} + \binom{p}{r_1,\ r_2-1,\ \ldots,\ r_k,\ 1} + \ldots$$

$$\ldots + \binom{p}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k-1,\ 1} + \binom{p}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k}$$

Terbukti.

TEOREMA II.4.6.

Jika $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$, untuk q tertentu ber - laku :

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_q)^n = \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_q=n} \binom{n}{r_1,\ r_2, \ldots,\ r_q} a_1^{r_1}\, a_2^{r_2} \ldots a_q^{r_q}$$

Bukti.

Dibuktikan dengan induksi pada n.

Pangkal : Pernyataan benar untuk n = 1, dengan pengamatan jika $r_1 = n = 1$, maka $(a_1)^n = \binom{n}{r_1} a_1^{r_1} = a_1^{r_1}$

Langkah : Andaikan pernyataan benar untuk n = k, akan di buktikan pernyataan benar untuk n = k + 1.

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_q)^{k+1} = \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_q=k} \binom{k}{r_1,\ r_2, \ldots,\ r_q} a_1^{r_1+1}\, a_2^{r_2} \ldots a_q^{r_q} + \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_q=k} \binom{k}{r_1,\ r_2, \ldots,\ r_q} a_1^{r_1}\, a_2^{r_2+1} \ldots a_q^{r_q} + \ldots + \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_q=k} \binom{k}{r_1,\ r_2, \ldots,\ r_q} a_1^{r_1}\, a_2^{r_2} \ldots a_q^{r_q+1}$$

Jumlah pangkat pada tiap suku adalah k + 1, dimisalkan $R_1 + R_2 + \ldots + R_q = k + 1$, maka persamaan diatas menjadi

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_q)^{k+1} = \sum_{R_1+R_2+\ldots+R_q=k+1} \binom{k}{R_1-1,\ R_2, \ldots,\ R_q} a_1^{R_1}\, a_2^{R_2} \ldots a_q^{R_q} + \sum_{R_1+R_2+\ldots+R_q=k+1} \binom{k}{R_1,\ R_2-1, \ldots,\ R_q}$$

$$R_1 \quad R_2 \qquad R_q$$

$$\sum_{R_1+R_2+\ldots+R_q=k+1} \binom{k}{R_1,\ R_2,\ldots,\ R_q-1} a_1^{R_1}\ a_2^{R_2} \ldots a_q^{R_q}$$

$$= \sum_{R_1+R_2+\ldots+R_q=k+1} \left[\binom{k}{R_1-1,\ R_2,\ldots,\ R_q} + \binom{k}{R_1,\ R_2-1,\ldots,\ R_q} + \ldots + \binom{k}{R_1,\ R_2,\ldots,R_q-1}\right] a_1^{R_1}\ a_2^{R_2} \ldots a_q^{R_q}$$

$$= \sum_{R_1+R_2+\ldots+R_q=k+1} \binom{k+1}{R_1,\ R_2,\ldots,\ R_q} a_1^{R_1}\ a_2^{R_2} \ldots a_q^{R_q}$$

Terbukti.

TEOREMA II.4.7.

Pada aljabar elementer, jika $s_1 < s_2$ berlaku

$$\frac{s_2^k - s_1^k}{s_2 - s_1} = s_2^{k-1} + s_2^{k-2}\, s_1 + \ldots + s_1^{k-1}$$

Pernyataan ini dapat dijelaskan sebagai berikut :

Untuk $k = 2$, maka

$$\frac{s_2^2 - s_1^2}{s_2 - s_1} = s_2 + s_1$$

Atau $s_2^2 - s_1^2 = (s_2 - s_1)\ Q(s_2,s_1)$ dengan $Q(s_2,s_1) = s_2 + s_1$, untuk $k = 3$

$$\frac{s_2^3 - s_1^3}{s_2 - s_1} = s_2^2 + s_2\, s_1 + s_1^2$$

Atau $s_2^3 - s_1^3 = (s_2 - s_1)\ Q(s_2,s_1)$ dengan $Q(s_2,s_1) = s_2^2 + s_2\, s_1 + s_2^2$. Hal ini berarti bahwa $s_2^2 - s_1^2$ dan $s_2^3 - s_1^3$ dapat dibagi oleh $s_2 - s_1$.

Deggan induksi hipotesa akan dibuktikan bahwa $s_2^k - s_1^k$ dapat dibagi oleh $s_2 - s_1$, untuk setiap $k \in N$

Bukti.

Pangkal : Pernyataan benar untuk $k = 2$ dan $k = 3$,

Langkah : Andaiakan pernyataan benar untuk $k < n \in N$, akan dibuktikan pernyataan benar untuk $k = n$.

Dari $s_2^n - s_1^n = s_2^n - s_1^n + s_2^{n-1}\, s_1 - s_2\, s_1^{n-1} + s_2^{n-1}\, s_1 +$

$s_2\, s_1^{n-1}$

$= (s_2 + s_1)(s_2^{n-1} - s_1^{n-1}) - s_2\, s_1(s_2^{n-2} - s_1^{n-2})$

Menurut induksi hipotesa $s_2^{n-1} - s_1^{n-1}$ dan $s_2^{n-2} - s_1^{n-2}$ dapat dibagi oleh $s_2 - s_1$. Sehingga ruas kanan dapat dibagi oleh $s_2 - s_1$, oleh karena itu ruas kiri juga dapat dibagi oleh $s_2 - s_1$. Terbukti.

II.5 BARISAN MONOTON

DEFINISI II.5.1.

Barisan adalah fungsi yang domainnya N. Biasanya diberi notasi $\langle s_n \rangle$.

DEFINISI II.5.2.

Suatu barisan $\langle s_n \rangle$ dikatakan mempunyai limit L bila dan hanya bila untuk sebarang bilangan positif kecil ε , selalu dapat ditemukan $M > 0$, sedemikian sehingga untuk $n \geqslant M$ dipenuhi $|s_n - L|$ dan ditulis $\lim_{n \to \infty} s_n = L$.

Bila L ada barisan $\langle s_n \rangle$ disebut konvergenke L dan jika L tidak ada maka barisan $\langle s_n \rangle$ disebut divergen.

TEOREMA II.4.1.

Jika $\langle s_n \rangle$ barisan naik monoton dan terbatas ke atas maka $\langle s_n \rangle$ konvergen, dan jika $\langle s_n \rangle$ barisan turun monoton dan terbatas ke bawah maka $\langle s_n \rangle$ konvergen.

Bukti.

Dibuktikan untuk $\langle s_n \rangle$ barisan naik monoton dan terbatas ke atas. Untuk $\langle s_n \rangle$ barisan turun monoton dan terbatas ke bawah dibuktikan secara sama.

$\langle s_n \rangle$ barisan naik monoton maka $s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant s_{n+1}$, untuk setiap $n \in N$.

$\langle s_n \rangle$ terbatas ke atas maka $\langle s_n \rangle$ mempunyai batas atas terkecil (supremum). Misalkan $A = \sup \{ s_n \}$, $s_n \leqslant A$, untuk setiap $n \in N$. Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $N_1 > 0$

naik monoton maka untuk setiap $n \geqslant N_1$ berlaku $s_n \geqslant s_{N_1}$.
Jadi untuk setiap $n \geqslant N_1$ didapat $A - \varepsilon < s_{N_1} \leqslant s_n < A + \varepsilon$
atau $|s_n - A| < \varepsilon , \forall n \geqslant N_1$.
Sehingga $(\forall \varepsilon > 0)(N_1 \in N)(n \geqslant N_1) \Longrightarrow |s_n - A| < \varepsilon$.
Menurut definisi $\langle s_n \rangle$ konvergen.

II.6. DERET TAK HINGGA

DEFINISI II.6.1.

Jika $\langle a_n \rangle = a_1, a_2, \ldots , a_n, \ldots$ suatu barisan tak hingga, barisan $\langle S_n \rangle$, didefinisikan oleh $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, untuk $n = 1, 2, 3, \ldots.$ disebut deret tak hingga dan dilambangkan sebagai $a_1 + a_2 + \ldots$ $\ldots + a_n + \ldots$ atau $\sum_{i=1} a_i$.

Bilangan $a_1, a_2, \ldots$, disebut suku deret tak hingga dari $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ dan $S_1, S_2, \ldots.$ adalah jumlah-jumlah parsial dari deret tak hingga.

DEFENISI II.6.2.

Andaikan $\sum_{i=1} a_i = a_1 + a_2 + \ldots.$ suatu deret tak hingga dan andaikan $\langle S_n \rangle$ dengan $S_n = a_1 + a_2 + \ldots.$ $\ldots + a_n$, untuk $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ barisan jumlah - jumlah parsial dari deret tak hingga. Jika $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ ada maka deret disebut konvergen dan S disebut jumlah deret tak hingga $\sum_{i=1} a_i$. Jika S tidak ada, deret divergen dan tidak mempunyai jumlah.

Jika deret $\sum_{i=1} a_i$ mempunyai suatu jumlah S ditulis

$\sum_{i=1} a_i = S$ ....(+)

Ini tidak berarti telah menjumlahkan sejumlah tak hingga suku-suku deret tersebut. Persamaan (+) hanya mengatakan bahwa barisan sejumlah parsial dari deret tak hingga $\sum_{i=1} a_i$ konvergen ke limit S.

Contoh :

Perlihatkan bahwa deret tak hingga

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots\ldots$$

konvergen dan tentukan jumlahnya

Jawab.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Karena

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] = 2 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$$

Jadi konvergen dan jumlahnya 2.

DEFINISI II.6.3.

Jika $\langle a_n \rangle$ barisan konstan.

$$\sum_{i=0} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

disebut deret kuasa (deret pangkat) dalam x (de - ngan $x^0 = 1$ untuk semua nilai x, termasuk x = 0).

II.7. TEOREMA FUNGSI KONTINU DAN FUNGSI TERDEFERENSIAL

DEFINISI II.7.1.

Bila c dalam selang terbuka S = (a,b) dan diketahui bahwa fungsi f terdifinisikan dalam S kecuali mung - kin di c, maka L disebut limit f(x) untuk x mendekati c ditulis $\lim_{x \to c} f(x) = L$ bila dan hanya bila untuk sebarang bilangan positif kecil ε , selalu dapat di temukan bilangan $\delta > 0$, sehingga apabila $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Contoh :

Suatu fungsi f didefinisikan sebagai f(x) = 5x - 3. Daerah asal f adalah R (himpunan bilangan real). Buktikan bahwa $\lim_{x \to 4} (5x - 3) = 17$

Penyelesaian.

Analisa : Pada setiap $\varepsilon > 0$ harus ditemukan $\delta > 0$, sehingga

1. $0 < |x - 4| < \delta \implies |(5x - 3) - 17| < \varepsilon$

Dimulai dengan mencari suatu pertidaksamaan

$$\left|(5x - 3) - 17\right| < \varepsilon \iff 17 - \varepsilon < 5x - 3 < 17 + \varepsilon$$
$$\iff 20 - \varepsilon < 5x < 20 + \varepsilon$$
$$\iff 4 - \frac{\varepsilon}{5} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{5}$$
$$\iff \left| x - 4 \right| < \frac{\varepsilon}{5}$$

2. $\left| x - 4 \right| < \frac{\varepsilon}{5} \iff \left|(5x - 3) - 17\right| < \varepsilon$

Perlu dipahami bahwa pertidaksamaan 2. adalah benar untuk setiap $\varepsilon > 0$, dipilih $\delta = \frac{1}{5}\,\varepsilon$.

Bukti.

Andaikan ε bilangan bulat positif kecil sebarang, oleh karena langkah-langkah dapat didibalik, sehingga

$$0 < \left| x - 4 \right| < \frac{\varepsilon}{5} \implies \left| x - 4 \right| < \frac{\varepsilon}{5}$$
$$\iff 4 - \frac{\varepsilon}{5} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{5}$$
$$\iff 20 - \varepsilon < 5x < 20 + \varepsilon$$
$$\iff 17 - \varepsilon < 5x - 3 < 17 + \varepsilon$$
$$\iff \left|(5x - 3) - 17\right| < \varepsilon$$

Jadi $0 < \left| x - 4 \right| < \frac{\varepsilon}{5} \implies \left|(5x - 3) - 17\right| < \varepsilon$ ......(3)

dengan memilih $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ yang sesuai dengan ε maka(3) menjadi $0 < \left| x - 4 \right| < \delta \implies \left|(5x - 3) - 17\right| < \varepsilon$. Menurut definisi didapat $\lim\limits_{x \to 4} (5x - 3) = 17$.

DEFINISI II.7.2.

Fungsi f dikatakan kontinu di $x = c$ bila dan hanya bila :

1. $f(c)$ terdifinisi
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada dan
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Suatu fungsi dikatakan tidak kontinu (diskontinu) pada suatu bilangan, jika fungsi itu tidak kontinu pada bilangan tersebut. Jika f kontinu di semua titik dalam selang S, maka dikatakan bahwa f kontinu dalam selang S.

Jika f fungsi kontinu dalam domain D_f, $x_0 \in D_f$, ma -

selang terbuka $S = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ sedemikian sehingga $f(x_0) \geqslant f(x)$ untuk semua $x \in (D_f \cap S)$. Jika f fungsi kontinu dalam domain D_f, $x_0 \in D_f$, maka f dikatakan mencapai nilai minimum relatif di x_0, jika terdapat selang terbuka $S = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ sedemikian sehingga $f(x_0) \leqslant f(x)$ untuk semua $x \in (D_f \cap S)$. Nilai minimum dan maksimum disebut nilai ekstrim. Jika x_0 suatu penyebab maksimum dan $f(x_0) \geqslant f(x)$ untuk setiap $x \in D_f$, maka $f(x_0)$ = maksimum mutlak. Demikian juga jika $f(x_0) \leqslant f(x)$ untuk setiap $x \in D_f$ maka $f(x_0)$ = minimum mutlak.

TEOREMA II.7.1.

Jika fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$, maka ada bilangan-bilangan x_1 dan x_2 pada $[a,b]$ sehingga $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ masing-masing adalah nilai maksimum dan nilai minimum mutlak pada $[a,b]$.

Bukti.

Dibuktikan jika f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ maka ada bilangan $x_1 \in [a,b]$ sedemikian sehingga $f(x_1)$ adalah nilai maksimum mutlak. Untuk kejadian minimum mutlak dibuktikan secara sama. Karena f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$, maka himpunan $S = \{ f(x) \mid a \leqslant x \leqslant b \}$ mempunyai batas atas, sehingga mempunyai batas atas terkecil sebut U. Andaikan $f(x) \neq U$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka $f(x) < U$. Untuk setiap $x \in [a,b]$, akan ditunjukkan bahwa ini menuju suatu kontradiksi, sehingga $f(x_1) = U$ untuk suatu bilangan $x_1 \in [a,b]$. Sekarang $f(x) < U$ untuk setiap $x \in [a,b]$ adalah ekivalen dengan $U - f(x) > 0$, $a \leqslant x \leqslant b$ .... (1).

Karena f kontinu pada selang $[a,b]$, maka $U - f(x)$ juga kontinu pada $[a,b]$, karena $U - f(x) \neq 0$ untuk $a \leqslant x \leqslant b$

$$\frac{1}{U - f(1)} \quad , \text{ untuk } a \leqslant x \leqslant b \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

kontinu pada $[a,b]$. Lebih jauh lagi (1) memberikan

$$\frac{1}{U - f(x)} > 0 \text{ , untuk } a \leqslant x \leqslant b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Maka himpunan $T = \left\{ \frac{1}{U - f(x)} \mid a \leqslant x \leqslant b \right\}$

mempunyai batas bawah 0 dan batas suatu bilangan L. Jadi

$$0 < \frac{1}{U - f(x)} \leqslant L \text{ , untuk } a \leqslant x \leqslant b \ \ldots\ldots (4)$$

yang menghasilkan $U - f(x) \geqslant \frac{1}{L}$, $a \leqslant x \leqslant b$ ....(5)

Atau $U - \frac{1}{L} \geqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ .... (6)

Jadi $U - \frac{1}{L}$ adalah suatu batas untuk S. Karena $L > 0$, dari (4) $\frac{1}{L} > 0$ dan $U - \frac{1}{L} < U$ ....(7) . Tetapi (7) kontradiksi terhadap fakta bahwa U adalah batas atas terkecil himpunan S. Maka pengandaian bahwa $f(x) \neq U$ untuk setiap $x_1 \in [a,b]$ tidak benar, yang benar ada suatu bilangan $x_1 \in [a,b]$ sedemikian sehingga $f(x_1) = U$. Karena U suatu batas atas himpunan S, jadi f memiliki nilai maksimum $f(x_1) = U$, $x_1 \in [a,b]$. Terbukti.

TEOREMA ROLLE

Jika fungsi f kontinu dalam selang $[a,b]$ dan terdeferensial dalam (a,b) sedang $f(a) = f(b) = 0$ maka terdapatlah paling sedikit satu nilai $x = x_0$, $x_0 \in (a,b)$ sehingga $f'(x_0) = 0$.

Bukti.

Dari Teorema II.7.1. terdapat $x = x_0$, $x_0 \in (a,b)$ sehingga $f(x_0) = M$ = nilai maksimum, dan terdapatlah $x = x_1$, $x_1 \in (a,b)$ sehingga $f(x_1) = m$ = nilai minimum.

a. Jika $M = m$, berarti $f(x) = 0$, untuk setiap x dengan akibat $f'(x) = 0$, untuk setiap $x \in (a,b)$.

b. Jika $M \neq m$, maka salah satu diantaranya tidak nol misalkan $f(x_0) = M > 0$, jadi $x_0 \neq a$, $x_0 \neq b$. Maka dapat ditentukan $(x_0 + h) \in (a,b)$ sehingga $f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant 0$, berarti,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \geqslant 0 & , \text{untuk } h < 0 \\ \leqslant 0 & , \text{untuk } h > 0 \end{cases}$$

Karena f fungsi terdeferensial dalam (a,b) maka

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \geqslant 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \leqslant 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Supaya derivatif ada, maka kedua limit (kiri dan kanan) harus ada dan sama, satu-satunya kemungkinan keduanya harus sama dengan nol. Jadi $f'(x_0) = 0$.

Kejadian jika $m \neq 0$ dibuktikan dengan cara yang sama.

Catatan : Turunan (derivatif) fungsi f adalah f' yang nilainya di titik x dalam domain f adalah

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

asal limit tersebut ada. Jika limit ada maka f terdeferensialkan di x.

TEOREMA NILAI TENGAH

Jika f fungsi kontinu dalam $[a,b]$ dan terdeferensial dalam (a,b) maka terdapatlah paling sedikit satu nilai $x = x_0$, $x_0 \in (a,b)$ sehingga

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Bukti.

Misalkan $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Q$

Disusun fungsi F : $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a).Q$, fungsi f ini juga kontinu dalam $[a,b]$ sedang $F(a) = F(b) = 0$. Menurut Teorema Rolle, terdapat paling sedikit satu nilai x_0, $x_0 \in (a,b)$ sehingga $F'(x_0) = 0$. Karena $F'(x) = f'(x) - Q$, jadi $F'(x_0) = 0$. Berarti $f'(x_0) - Q = 0$ atau $f'(x_0) = Q$. Dengan demikian $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, terbukti.