B A B II

LOGIKA, ALJABAR BOOLE DAN SISTEM BILANGAN BINER

2.1 LOGIKA RESMI

Logika adalah ilmu yang berkaitan dengan hukum-hukum dan-patokan yang dikenakan pada peragaan dan kesimpulan dengan mene - rapkan asas-asas penalaran. Namun, dari segi perekayasaan logika-memiliki makna sangat sempit.

Catatan pengkajian pertama yang terekam tentang logika resmi telah dibuat oleh Aristoteles. Aristoteles merumuskan konsep - tentang 'logika keterangan' dan teori hal susunpikir. Ia melihat-bahwa kaitan logika dapat dinyatakan sebagai kalimat-kalimat menerangkan. Kalimat menerangkan sederhana hanyalah menyangkal atau - mengukuhkan sesuatu perihal sesuatu lainnya. Contoh :

" kereta hitam " adalah kalimat menerangkan sederhana, begitu pula " kereta tidak hitam "

Kalimat menerangkan campuran dibuat dengan mengkombinasikan kalimat-kalimat menerangkan sederhana. Contoh :

" kereta hitam " , dapat dikombinasikan dengan dua cara dengan " kereta punya lampu " yaitu :

" kereta hitam DAN punya lampu " dan

" kereta hitam ATAU punya lampu "

Kata DAN dan ATAU kita kenal sebagai penghubung dan merupakan dasar pertama dalam sistem logika elektronik.

Susun pikir adalah metode untuk sampai pada kesimpulan logika, bertolak dari dua pangkalpikir, pangkalpikir besar dan pangkalpikir kecil.

Contoh :

" Seluruh penjaga adalah tingginya lebih dari satu setengah meter " adalah pangkalpikir besar.

" Badu adalah penjaga " adalah pangkalpikir kecil, dan -

kesimpulan yang dapat ditarik adalah bahwa " Badu adalah tingginya lebih dari satu setengah meter "

Sebarang pernyataan dapat dikenai salah satu nilai, benar-atau salah. Adalah penting untuk memahami bahwa benar dan salah ini tidak sangkut pautnya sama sekali dengan kebenaran dan kesala - han yang berkaitan dengan duaia nyata, melainkan hanyalah menunjuk kan akan kesahan atau ketaksahan sesuatu pernyataan didalam kerang ka penalaran logika. Sangat mungkin terjadi untuk menggunakan pena laran susunpikir untuk memperoleh kesimpulan "sah" dari pangkalpikir yang sebenarnya tak ada artinya apapun. Contoh :

" Semua awan adalah hijau " adalah pangkalpikir besar.

" Polan adalah awan " adalah pangkalpikir kecil.

Kesimpulan yang dapat ditarik dari pangkalpikir itu adalah, mengikuti logika " Polan adalah hijau ".

2.2 ALJABAR BOOLE

Kemajuan besar dalam ilmu logika telah dibuat oleh ahli matematika inggris George Simon Boole (1815-1864) yang telah menerbitkan risalahnya berjudul " A Mathematical Analysis of Logic " - (Analisa matematika tentang logika). Boole telah mempelajari karya Aristoteles dan menyusun peringkat lambang-lambang matematika - guna menggantikan pernyataan-pernyataan Aristoteles; namun iapun - menemukan bahwa sistem aljabarnya akan dapat dikenakan pada penalaran logika perihal kaitan antara keterangan-keterangan.

2.2.1 DEFINISI DAN TEOREMA

Definisi : Misalkan B merupakan sebuah himpunan dengan 0 dan 1 merupakan anggota tertentunya. Misalkan didefinisikan 2 - operasi biner " + " dan " . " dan satu operasi unery yang dinyatakan dengan " ' ", maka keenam perangkat

(B, +, ., ', 0, 1)

disebut aljabar Boole bila memenuhi aksioma-aksioma untuk setiap elemen a,b,c dalam B sebagai berikut :

B_1 Hukum Komutatip

(a) $a + b = b + a$

(b) $A \cdot b = b \cdot a$

B_2 Hukum Distributip

(a) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

(b) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

B_3 Hukum Identitas

(a) $a + 0 = a$

(b) $a \cdot 1 = a$

B_4 Hukum Komplemen

(a) $a + a' = 1$

(b) $a \cdot a' = 0$

Teorema :

T 2.1 : Untuk setiap a elemen dalam aljabar Boole B berlaku

Hukum Idempoten

(a) $a + a = a$

(b) $a \cdot a = a$

T 2.2 : Untuk setiap a elemen dalam aljabar Boole B berlaku

Hukum Keterikatan

(a) $a + 1 = 1$

(b) $a \cdot 0 = 0$

T 2.3 : Untuk setiap a,b elemen dalam aljabar Boole B berlaku

Hukum Absorpsi

(a) $a + (a \cdot b) = a$

(b) $a \cdot (a + b) = a$

T 2.4 : Untuk setiap a,b,c elemen dalam aljabar Boole B ber - laku

Hukum Assosiatip

(a) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(b) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

T 2.5 : Untuk setiap a elemen dalam aljabar Boole B maka a' - adalah tunggal yaitu

jika $a + x = 1$ dan $a.x = 0$ maka $x = a'$

T 2.6 : Untuk setiap a elemen dalam aljabar Boole B berlaku

Hukum Dobel Komplemen

$(a')' = a$

T 2.7 : Untuk setiap a,b elemen dalam aljabar Boole B berlaku

Hukum De Morgan's

(a) $(a + b)' = a' \cdot b'$

(b) $(a \cdot b)' = a' + b'$

T 2.8 : Untuk setiap a,b elemen dalam aljabar Boole B berlaku

$(a + a' \cdot b) = a + b$

2.2.2 KONSTANTA DAN VARIABEL BOOLE

Perbedaan utama antara aljabar Boole dan aljabar biasa adalah dalam aljabar Boole konstanta dan variabelnya hanya dimungkinkan mempunyai dua harga, 0 datau 1. Variabel Boole merupakan suatu kuantitas yang pada saat berbeda hanya dapat bernilai salah satu, 0 atau 1. Variabel Boole sering digunakan untuk menyatakan tingkat tegangan pada suatu kawat atau pada terminal masukan/keluaran suatu rangkaian. Misalnya, dalam suatu sistim digital tertentu harga-Boole 0 dapat diperuntukkan bagi setiap tegangan dalam rentang dari 0 sampai 2V sedangkan harga variabel 1 dapat diperuntukkan bagi setiap tegangan dalam rentang 2.5 - 5V.

Jadi, Boole 0 dan 1 tidak menyatakan bilangan sebenarnya - tetapi menyatakan keadaan suatu variabel tegangan. Keadaan variabel tegangan ini disebut tingkat logika (logic level). Suatu tegangan dalam suatu rangkaian digital dikatakan sedang pada tingkat-logika 0 atau logika 1, bergantung kepada nilai bilangan yang sebenarnya. Dalam bidang logika digital sejumlah istilah lain juga-digunakan sebagai sinonimnya logika 0 dan 1. Beberapa diantaranya yang banyak dipakai ditunjukkan pada Tabel 2.1

Tabel 2.1

Logika 0	Logika 1
Salah	Benar
Mati	Hidup
Rendah	Tinggi
Tidak	Ya
Terbuka	Tertutup

Dalam sistim digital aljabar Boole digunakan untuk menyata kan pengaruh berbagai macam rangkaian digital pada masukan-masu - kan logika dan digunakan juga untuk memanipulasi variabel-variabel logika dengan maksud untuk menentukan metode terbaik dalam menyusun rangkaian dengan fungsi tertentu. Dalam semua uraian nanti akan digunakan simbol huruf untuk menyatakan variabel logika. Mi - salnya A dapat menyatakan suatu keluaran rangkaian digital terten tu, dan pada setiap saat variabel ini harus memiliki salah satu - harga A=1; apabila tidak harga yang satu maka yang lain.

Kenyataan bahwa hanya ada dua harga yang mungkin terjadi - dalam aljabar Boole menyebabkan relatif lebih mudah bekerja dengan aljabar Boole dibandingkan dengan aljabar biasa. Dalam aljabar Boo le tidak ada pecahan, desimal, bilangan negatif, akar pangkat dua , logaritma, bilangan imajiner dan sebagainya.

2.3 DARI LOGIKA KE RANGKAIAN LOGIKA

Sampai disini pembaca mungkin berpendapat bahwa semua pembicaraan tentang logika, aljabar Boole adalah sangat menarik, namun bagaimanakah kaitannya dengan rangkaian logika ? Memang telah memakan waktu lama untuk mengkaitkan teori logika dengan rangkaian logika. Karya Boole terbengkelai selama seabad, sampai Claude-B. Shanon menjelaskan dalam artikelnya " A Symbolic Analysis of - Relay and Switching Circuit " (1938) bagaimanakah aljabar Boole - dapat dipakai untuk menjelaskan cara kerja kelengkapan sambungan-telepon.

2.3.1 FUNGSI AND

Contoh sederhana dapat dikemukakan untuk menggambarkan bagaimanakah mungkin kaitan logika kebahasaan berkembang menjadi rangkaian logika. Misalkanlah bahwa dipersyaratkan agar lampu kendaraan harus menyala kalau sakelar lampu sedang tertutup dan pengapian sedang menyala. Pernyataan " masukan " dan pernyataan " keluaran " yang menjelaskan sistim ini adalah

Sakelar lampu menutup = A

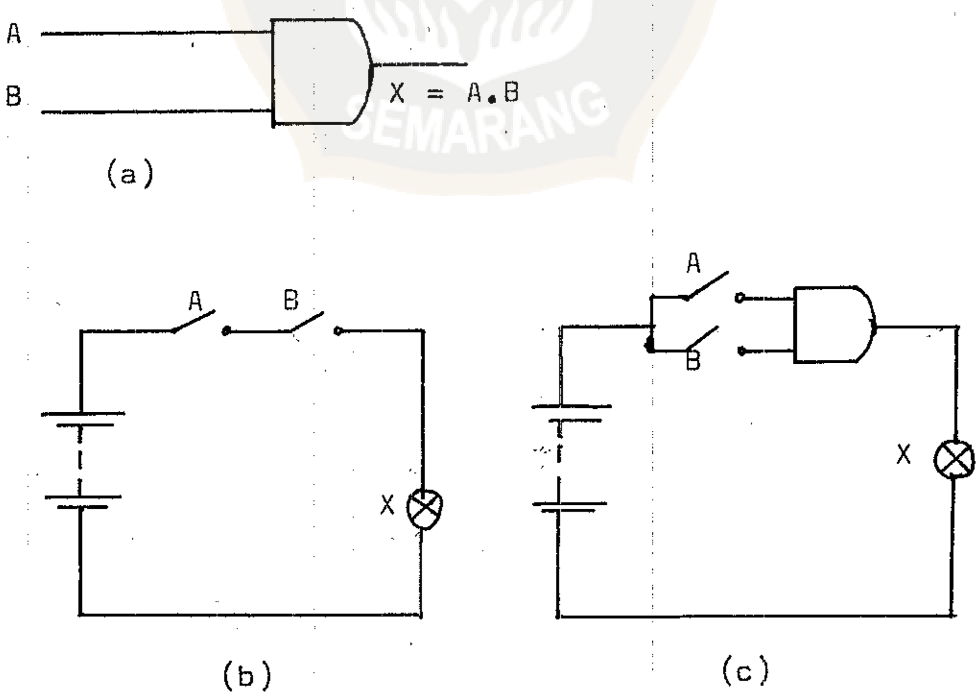
Sakelar pengapian menutup = B

Lampu menyala = X

Masing-masing ketiga pernyataan ini dapat memiliki " harga " benar atau salah, yaitu mereka masing-masing dapatlah dikatakan pada tingkat logika 1 atau logika 0. Kalau kita menyusun - daftar yang memuat semua kombinasi kemungkinan yang benar dan - yang salah pada pernyataan itu maka kitapun memperoleh apa yang - dosebut " tabel kebenaran ". Tabel kebenaran bagi sistim yang diuraikan diatas adalah sebagai berikut :

A	B	X= A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Persyaratan aslinya adalah bahwa X akan benar hanyalah bila A dan B kedua-duanya benar, yaitu lampu hanyalah akan menyala - bila sakelar lampu DAN sakelar pengapian kedua-duanya tertutup. - Kaitam ini diandaikan dalam persamaan Boole X = A DAN B; dalam - rangkaian logka digambar dengan lambang " pintu AND " seperti pada Gambar 2.3.1a



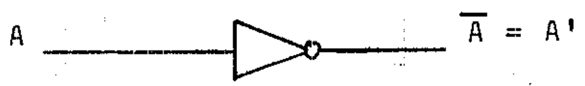
Gambar 2.3.1

Rangkaian prakteknya dikemukakan dalam Gambar 2.3.1b. Rangkaian penggantinya dengan menggunakan pintu AND dikemukakan di - Gambar 2.3.1c. Dalam kedua gambar, lampu akan menyala hanya kalau kedua sakelar tertutup.

Fungsi dapat dinyatakan secara matematis. Sepintas tampak aneh, namun disini perlu digunakan lambang perkalian, jadi : A - DAN B = A X B = A.B. Hal ini dengan mudah dapat dibenarkan dengan menggunakan tabel kebenaran diatas. Hal yang sangat penting untuk dicatat adalah bahwa meskipun pembicaraan diatas terbatas pada - dua variabel masukan, asas AND itu adalah sangat umum dan dapat - diperluas sampai sebarang masukan. Dalam Gambar 2.3.1b sebarang - banyak sakelar akan dapat dihubungkan berderet; lampupun akan me- nyala hanyalah kalau semua sakelar itu tertutup.

2.3.2 PENYANGKALAN/INVERSI

Pernyataan seperti misalnya " sakelar tertutup " dapatlah diberi harga benar 1 atau 0, tergantung pada apakah sakelar sedang menutup atau tidak. Dengan kata lain, pernyataannya akan dapat be- nar ataupun tak benar. Demikian pula pernyataan " sakelar tidak - tertutup " akan dapat juga memiliki harga benar 1 atau 0. Jelas - lah bahwa jika " sakelar tertutup " adalah benar (1) maka per- nyataan " sakelar tidak tertutup " adalah salah (0) dan seba - liknya. Kedua pernyataan itu saling bertimbalan, mereka tidak akan pernah dapat dua-duanya benar atau dua-duanya salah secara simultan tan; masing-masing pernyataan disebut sangkalan satu terhadap yang lain. Kalau " sakelar tertutup " diberi lambang A, maka sangka - lannya (inversinya) dinyatakan dengan garis atas $\overline{A}$ atau tanda " '- " , A'. Pintu logika yang menyangkal masukannya disebut INVERTER; lambang logikanya adalah Gambar 2.3.2



Gambar 2.3.2

Tabel kebenaran Inverter adalah sebagai berikut :

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

2.3.3 FUNGSI OR

Kita kembali kepada pengandaian kita dengan listrik yang ada pada kendaraan; misalkanlah bahwa diminta agar sapu kaca depan harus bekerja kalau sakelar sapu ditutup ATAU kalau sakelar pencuci kaca ditutup.

Agar uraian berikut mudah ditangani, kita dapatlah menentukan :

sakelar sapu tertutup = A

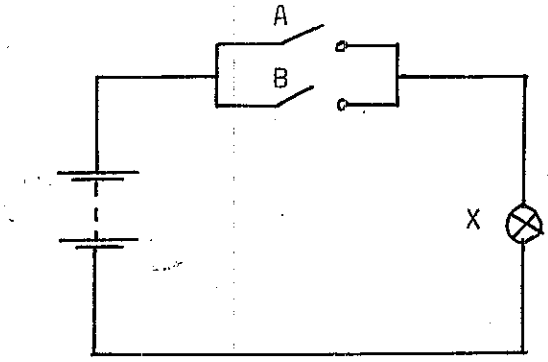
sakelar pencuci tertutup = B

sapu bekerja = X

Jelaslah bahwa X haruslah benar kalau A benar ATAU B benar, yaitu X = A + B. Jelas pula bahwa dalam contoh ini sapu akan bekerja juga kalau kedua-dua sakelar menutup. Hal ini dikenal sebagai fungsi ATAU (inggris; OR), sebab ia mencakup kemungkinan A yang benar ATAU B yang benar ATAU dua-duanya.

Rangkaian praktek fungsi OR ini adalah Gambar 2.3.3a dan tabel kebenaran untuk fungsi OR adalah seperti berikut :

A	B	X=A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Gambar 2.3.3a

Seperti halnya pada fungsi AND, fungsi OR dapat juga diperluas sampai sebarang banyak jalan masuk. Dalam Gambar 2.3.3a sebarang sakelar dapat disejajarkan dan lampupun akan menyalakalau satu, atau lebih dari antaranya ditutup. Lambang pintu OR adalah seperti pada Gambar 2.3.3b

Gambar 2.3.3b

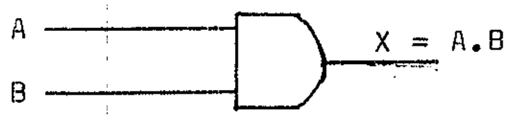
OPERASI LOGIKA BOOLE DAN SIMBOL RANGKAIAN LOGIKANYA

Pembicaraan mengenai fungsi AND, fungsi OR dan Penyangkalan/Inversi yang telah dikemukakan dimuka pada hakekatnya ketiga hal tersebut merupakan tiga operasi dasar dalam aljabar Boole. Untuk lebih memahami ketiga operasi, sekali lagi akan diikhtisarkan sebagai berikut :

1. Perkalian logika yang juga disebut perkalian AND atau operasi AND, operasi logika AND antara dua variabel Boole A dan B ditulis A.B dan didefinisikan oleh Gambar 2.4.1a

A	B	X=A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(a)



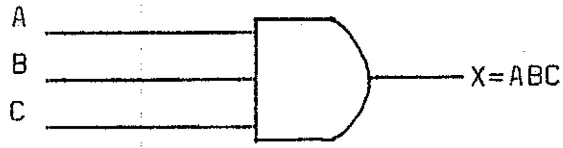
(b)

Gambar 2.4.1

(a) Tabel kebenaran operasi AND

(b) Simbol rangkaian untuk pintu AND 2 masukan

A	B	C	X=ABC
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



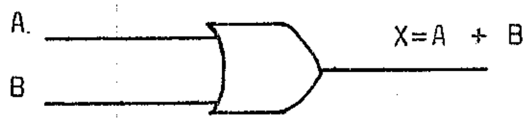
Gambar 2.4.2

Tabel kebenaran dan simbol pintu AND tiga masukan.

2. Penjumlahan logika yang juga disebut penjumlahan OR atau operasi OR, operasi logika OR antara dua variabel Boole A,B ditulis A + B (baca A OR B) dan didefinisikan oleh Gambar 2.4.3a

A	B	X=A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(a)



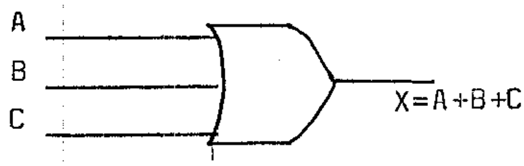
(b)

Gambar 2.4.3

(a) Tabel kebenaran operasi OR

(b) Simbol rangkaian untuk pintu OR 2 masukan

A	B	C	X=A + B + C
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Gambar 2.4.4

Tabel kebenaran dan simbol pintu OR tiga masukan

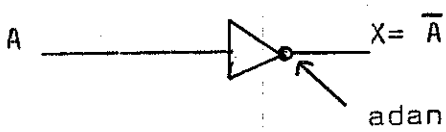
3. Penyangkalan logika yang juga disebut inversi atau operasi NOT. Simbol yang umum untuk operasi ini adalah tanda " ' " atau garis atas ($\overline{}$). Jika sebuah variabel disebut A maka inversi logika tersebut adalah :

$$A' = \overline{A} \quad \text{(baca not A atau inver A)}$$

Kedua simbol tersebut hendaknya dicatat sebagai simbol NOT dan didefinisikan oleh Gambar 2.4.5

A	$X=\overline{A}$
0	1
1	0

(a)



adanya lingkaran kecil selalu menyatakan inversi.

(b)

Gambar 2.4.5

(a) Tabel kebenaran operasi NOT

(b) Simbol rangkaian NOT (inverter)

2.4 SISTEM BILANGAN BINER

Biasanya suatu bilangan desimal menggambarkan suatu polinomial dalam pangkat dari bilangan/angka 10. Sebagai contoh, bilangan 1257 menggambarkan polinomial :

$$1257 = 1X10^3 + 2X10^2 + 5X10^1 + 7X10^0$$

Metode ini menggambarkan bilangan desimal yang kita kenal sebagai Sistem Bilangan Desimal, dan angka 10 ditunjuk sebagai basis (radix) dari sistem tersebut.

Secara umum penulisan dari suatu sistem bilangan adalah :

$$N = d_nR^n + \ldots\ldots + d_3R^3 + d_2R^2 + d_1R^1 + d_0R^0$$

dimana N adalah Bilangan, d_n digit pada posisi itu dan R adalah basis/radix dari sistem tersebut, serta subscript/eksponen menyatakan nilai posisional (bobot).

Jadi contoh diatas yaitu $1257 = 1X10^3 + 2X10^2 + 5X10^1 + 7X10^0$ dapat ditulis

$$N = d_3R^3 + d_2R^2 + d_1R^1 + d_0R^0$$

dimana, $R=10$, $d_3=1$, $d_2= 2$, $d_1= 5$, dan $d_0= 7$

Bila basisnya 2, bilangan yang menggambarkannya menunjukkan sebagai suatu sistem bilangan biner. Jadi dalam sistem bilangan biner hanya ada dua digit (angka) biner, yaitu 0 dan 1.

Sebagai contoh, bilangan biner 1101 menggambarkan polinomial :

$$1101 = 1X2^3 + 1X2^2 + 0X2^1 + 1X2^0$$

Jadi secara umum suatu bilangan biner dapat dituliskan sebagai :

$$N = \ldots\ldots + 8d_3 + 4d_2 + 2d_1 + d_0$$

dimana d_3, d_2, d_1, d_0 adalah salah satu 0 atau 1.

Contoh biner $1101 = 1X2^3 + 1X2^2 + 0X2^1 + 1X2^0$ dapat ditulis

$$N = 8 + 4 + 0 + 1 = 13,$$ dimana 8, 4, 0, 1 dan 13 adalah suku-suku dari keluarga sistem desimal.

2.4.1 KONVERSI BINER KE DESIMAL DAN DESIMAL KE BINER

KONVERSI BINER KE DESIMAL

Contoh konversi biner ke desimal telah kita singgung seperti pada contoh sebelumnya, tetapi ada baiknya kita tambahkan beberapa contoh lagi agar lebih mudah untuk dipahami.

Contoh : Tentukanlah nilai-nilai desimal dari bilangan biner berikut ini

(a) 10110 (b) 110111

Jawab (a) $N = 1X2^4 + 0X2^3 + 1X2^2 + 1X2^1 + 0X2^0$

$= 16 + 0 + 4 + 2 + 0$

$= 22$ (desimal)

(b) $N = 1X2^5 + 1X2^4 + 0X2^3 + 1X2^2 + 1X2^1 + 1X2^0$

$= 32 + 16 + 0 + 4 + 2 + 1$

$= 55$ (desimal)

KONVERSI DESIMAL KE BINER

Mengkonversikan (mengubah) dari bilangan desimal menjadi bilangan biner, cara yang lazim digunakan ialah dengan metode pembagian berurutan.

Contoh : Ubahlah bilangan desimal $(26)_{10}$ ke biner

Jawab :

	Hasil-bagi		Sisa	
$\frac{26}{2}$ =	13	+	0	——— LSD
$\frac{13}{2}$ =	6	+	1	
$\frac{6}{2}$ =	3	+	0	
$\frac{3}{2}$ =	1	+	1	
$\frac{1}{2}$ =	0	+	1	———→ MSD ——→ 11010

Sisa terakhir disebut digit bobot terbesar atau most significant - digit (MSD) dan sisa pertama disebut digit bobot terkecil atau - least significant digit (LSD).

Dan jawab dari contoh tersebut ditulis sebagai $(26)_{10} = (11010)_2$

Untuk mengecek kebenaran hasil tersebut, jawaban kita ubah lagi - ke desimal :

$$
\begin{aligned}
N &= 1X2^4 + 1X2^3 + 0X2^2 + 1X2^1 + 0X2^0 \\
&= 16 + 8 + 0 + 2 + 0 = 26 \\
&= (26)_{10}
\end{aligned}
$$

Contoh lain

Ubahlah bilangan desimal $(35)_{10}$ ke biner

Jawab :

		Hasil-bagi		Sisa	
$\frac{35}{2}$	=	17	+	1	
$\frac{17}{2}$	=	8	+	1	
$\frac{8}{2}$	=	4	+	0	
$\frac{4}{2}$	=	2	+	0	
$\frac{2}{2}$	=	1	+	0	
$\frac{1}{2}$	=	0	+	1	$\longrightarrow$ 100011

$(35)_{10} = (100011)_2$

2.4.2 PENJUMLAHAN BINER

Penjumlahan bilangan biner ditunjukkan pada tabel 2.2. Jelas bahwa penjumlahan itu lebih sederhana daripada penjumlahan bilangan desimal. Pada sistem bilangan biner hanya ada 4 (empat) kombinasi yang harus diingat, sedangkan pada sistem bilangan desimal kita harus mengingat 100 (seratus) kombinasi. Penjumlahan 0 + 0, 1 + 0, 0 + 1 adalah jelas. Penjumlahan 1 + 1, yang kita ketahui 2 pada biner harus ditulis menggunakan 2 (dua) tempat. Jadi 1 + 1 adalah 0 dan sebuah Carry (simpan) dan tentu saja carry ini kemudian dijumlahkan kedalam posisi digit yang lebih tinggi berikutnya

Tabel 2.2

TABEL PENJUMLAHAN BINER

		Yang ditambah	
	+	0	1
Yang me-	0	0	1
nambah.	1	1	0 + c

Contoh : (a)

$$\begin{array}{r} 0\;0\;1\;1\;0\;1 \\ +\;1\;0\;0\;1\;0\;1 \\ \hline 1\;1\;0\;0\;1\;0 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{r} 13 \\ +\;37 \\ \hline 50 \end{array}\right)_{10}$$

(b)

$$\begin{array}{r} 1\;1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1 \\ +\;1\;0\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1 \\ \hline 1\;0\;1\;1\;1\;1\;0\;1\;1\;0 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{r} 443 \\ +\;315 \\ \hline 758 \end{array}\right)_{10}$$

2.4.3 PENGURANGAN BINER

Pengurangan biner pada dasarnya mempunyai operasi yang sama pada pengurangan desimal. Tetapi kita akan dapatkan operasi yang lebih sukar daripada operasi penjumlahan biner. Operasi pengurangan biner tersebut ditunjukkan pada Tabel 2.3

Tabel 2.3

TABEL PENGURANGAN BINER

	-	Yang dikurangi 0	1
Pengurang	0	0	1
	1	1 + b	0

b artinya borrow (pinjaman)

Contoh : (a)

```
  1 0 1 1 0          22
- 0 1 0 1 0        - 10
-----------        ----
  0 1 1 0 0          12  (10)
```

(b)

```
  1 1 0 1 1 0 0 1        217
- 1 0 1 0 1 0 1 1      - 171
-----------------      -----
  0 0 1 0 1 1 1 0         46  (10)
```

2.4.4 PERKALIAN BINER

Perkalian pada sistem bilangan biner lebih mudah dan sederhana dibandingkan perkalian pada bilangan yang lain. Karena yang digunakan hanya digit 0 dan 1, dimana perkalian dengan digit 1 memberikan hasil bilangan semula (tetap) dan perkalian dengan digit 0 akan memberikan hasil 0.

```
Contoh :  (a)        1 1 0 1 0 1   yang dikalikan      ⎛  53 ⎞
                     X     1 1 1   pengali             ⎜ X 7 ⎟
                    ------------                       ⎜-----⎟
                     1 1 0 1 0 1                       ⎝ 371 ⎠10
                   1 1 0 1 0 1
                 1 1 0 1 0 1
               ----------------
               1 0 1 1 1 0 0 1 1


          (b)        1 1 0 1 1 0 1 1 1                 ⎛   439 ⎞
                     X   1 0 1 0 1 1 1                 ⎜  X 87 ⎟
                    -------------------                ⎜-------⎟
                     1 1 0 1 1 0 1 1 1                 ⎝ 38193 ⎠10
                   1 1 0 1 1 0 1 1 1
                 1 1 0 1 1 0 1 1 1
               0 0 0 0 0 0 0 0 0
             1 1 0 1 1 0 1 1 1
           0 0 0 0 0 0 0 0 0
         1 1 0 1 1 0 1 1 1
     ---------------------------------
     1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1
```