BAB III

TEORI PENUNJANG

III.1 EXPEKTASI

Definisi 3.1.1

Jika X suatu random variabel, maka Expektasi atau disebut juga harga mean didefinisikan dengan :

$$E[X] = \int X \, dF$$

dimana F(x) adalah fungsi distribusi dari X dan integralnya adalah integral Lebesque- Stieltjes, atau jika dalam bentuk integral Riemann dinyatakan dengan :

$$E[X] = \int x \, f(x) \, dx$$

Jika X random variabel diskrit yang mempunyai fungsi probabilitas p(x) maka :

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} x \, p(x)$$

Jika X random variabel dan g(.) adalah suatu fungsi dengan domain dan ko-domain garis real maka expektasi atau expected value dari fungsi g(.) dari random variabel X dinotasikan dengan $E[g(X)]$ dan didefinisikan sebagai :

$$E[g(X)] = \sum_{x:p(x)>0} g(x) \, p(x)$$

(jika X random variabel diskrit)

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, f(x) \, dx$$

(jika X random variabel kontinu dengan fungsi density probabilitas f(x))

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

III.1.2 ADANYA SUATU EKSPEKTASI

Definisi 3.1.2

Expektasi dari suatu random variabel dikatakan ada bila harga expektasi tsb tunggal, tertentu dan ber hingga.

Contoh 1 :

Suatu distribusi Cauchy dengan fungsi density

$$f_X(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi\beta\left\{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right\}}$$

$\beta > 0$ dan α riil.

mean maupun momennya tidak ada.

Bukti :

(i) $$E[X] = \frac{x\,dx}{\pi\beta\left\{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right\}}$$

substitusi : $m = \frac{x-\alpha}{\beta} \Longrightarrow x = m\beta + \alpha$

$dx = \beta\, dm$

$x = -\infty \quad m = -\infty$

$x = \infty \quad m = \infty$

$$E[X] = \frac{(m\beta + \alpha)\cancel{\beta}\,dm}{\pi\cancel{\beta}(1 + m^2)}$$

$$= \frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m\,dm}{1+m^2} + \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dm}{1+m^2}$$

$$= \frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(1+m^2)}{1+m^2} + \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dm}{1+m^2}$$

$$= \frac{\beta}{2\pi}\ln(1+m^2)\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\alpha}{\pi}\operatorname{arc\,tg} m\Big]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= 0 + \frac{\alpha}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$$

dengan $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\neq$ tunggal

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

(ii) Momennya juga tidak ada

Bukti :

$$m_X(t) = E\left[e^{tx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}\,dx}{\left\{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right\}\pi\beta}$$

substitusi yang sama dengan bukti (i) maka :

$$E\left[e^{tx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t(m\beta+\alpha)}\,\cancel{\beta}\,dm}{\pi\cancel{\beta}(1+m^2)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha}\,e^{t\beta m}}{\pi(1+m^2)}\,dm$$

karena : $e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$

maka :

$$e^{t\beta m} = 1 + t\beta m + \frac{(t\beta m)^2}{2!} + \ldots$$

sehingga,

$$E\left[e^{tx}\right] = \frac{e^{\alpha}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(1 + t\beta m + \frac{(t\beta m)^2}{2!} + \ldots\right) dm}{(1+m^2)}$$

$$= \frac{e^{\alpha}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dm}{1+m^2} + \frac{e^{\alpha}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\beta m\,dm}{1+m^2} + \frac{e^{\alpha}(t\beta)^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m^2 dm}{1+m^2}$$

$$+ \ldots$$

$$= \frac{e^{\alpha}}{\pi}\,\text{arc tg } m\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{e^{\alpha}\beta t}{2\pi}\ln\left|1+m^2\right|\Big]_{-\infty}^{\infty} + \ldots$$

$$= \frac{e^{\alpha}}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) + 0 + 0 \ldots$$

$$+ 0 + \ldots$$

dengan $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\neq$ tunggal

jadi dari (i) dan (ii) mean ataupun momen dari random variabel X dengan distribusi Cauchy tidak ada.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

III.1.3 SIFAT - SIFAT EXPEKTASI

Jika a dan b konstanta sembarang, maka :

(i) $E\left[aX + b\right] = a\,E\left[X\right] + b$

(ii) $E\left[X + Y\right] = E\left[X\right] + E\left[Y\right]$

(iii) Jika X dan Y independent, maka untuk suatu fungsi h dan g :

$$E\left[g(X)h(Y)\right] = E\left[g(X)\right]\,E\left[h(Y)\right]$$

Bukti :

(i) Jika X random variabel diskrit :

$$E\left[aX + b\right] = \sum_{x:p(x)>0} (aX + b)\,p(x)$$

$$= a \sum_{x:p(x)>0} x\,p(x) + b \sum_{x:p(x)>0} p(x)$$

$$= a\,E\left[X\right] + b$$

Jika X random variabel kontinu

$$E\left[aX + b\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)\,f(x)\,dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= a\,E\left[X\right] + b$$

(ii) $E\left[g(X,Y)\right] = \sum_{y}\sum_{x} g(xy)\,p(xy)$; untuk X dan Y diskrit

$$E\left[g(X,Y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(xy)\,f(xy)\,dx\,dy$$

(untuk X dan Y kontimu)

Untuk X dan Y kontinu (bukti analog untuk X dan Y diskrit)

bila $g(X,Y) = X + Y$ maka :

$$E\left[X + Y\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x + y)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int^{\infty} x\,f_X(x)\,dx + \int y\,f_Y(y)\,dy$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

$$= E[X] + E[Y]$$

akibat dari sifat (i) dan (ii) maka :

$$E[a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n] = a_1E[X_1] + a_2E[X_2] + \ldots + a_nE[X_n]$$

(iii) Jika X dan Y independent maka untuk suatu fungsi h dan g, pandang X dan Y random variabel kontinu dengan fungsi density gabungan f(x,y) (bukti analog untuk X dan Y diskrit)

$$E[g(X)h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)\, f_X(x)f_Y(y)\, dx\, dy$$

(sebab independent)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\, dx$$

$$= E[h(Y)]\; E[g(X)]$$

III.2 MEAN , VARIAN DAN KOVARIAN

$E[X]$ disebut juga MEAN atau MOMEN PERTAMA dari X

Besaran $E[X^n]$,$n \geq 1$ disebut momen ke n dari X

Besaran lain yang penting adalah Varian X yang didefinisikan sebagai :

$$VAR[X] = E[(X - E[X])^2]$$

Sedangkan Kovarian dari dua random variabel X dan Y dinyatakan dengan $COV[X,Y]$ didefinisikan dengan :

$$COV[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$$= E[XY] - E[X]\, E[Y]$$

III.3 EXPEKTASI BERSYARAT

Jika X dan Y adalah random variabel diskrit, maka fungsi probabilitas bersyarat X, jika diketahui Y = y didefinisikan untuk semua Y sedemikian sehingga

$P\{Y = y\} > 0$, dengan :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$P_{X|Y}(x|y) = P\{X = x \mid Y = y\} = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

Sehingga didapat :

definisi 3.3.1 :

Expektasi bersyarat dari X jika diberikan Y = y untuk semua nilai y sedemikian hingga $p_Y(y) > 0$ didefinisikan dengan :

$$E[X|Y = y] = \sum_x x\, P\{X = x \mid Y = y\}$$

$$= \sum_x x\, p_{X|Y}(x|y)$$

secara sama jika X dan Y random variabel kontinu dengan fungsi density gabungan f(x,y) , density probabilitas bersyarat dari X, jika diberikan Y = y yang didefinisikan untuk semua y sedemikian hingga $f_Y(y) > 0$ adalah :

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

maka expektasi X jika diberikan Y = y didefinisikan dengan :

$$E[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

akibatnya :

(i) $E[g(X) \mid Y = y] = \sum_x g(x)\, p_{X|Y}(x|y)$

(untuk random variabel diskrit)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_{X|Y}(x|y)\, dx\, dy$$

(untuk random variabel kontinu)

(ii) $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \mid Y = y\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid Y = y]$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Suatu sifat penting dari expektasi bersyarat di mana berlaku untuk semua X dan Y (random variabel) adalah :

$$E[X] = E[E[X \mid Y]]$$

Jika Y random variabel diskrit maka

$$E[X] = \sum_y E[X \mid Y = y] \; P\{Y = y\}$$

Jika Y random variabel kontinu maka

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y = y] \; f_Y(y) \; dy$$

Bukti :

Jika X dan Y dis krit :

$$\sum_y E[X \mid Y = y] \; P\{Y = y\} = \sum_y \sum_x x \; P\{X=x \mid Y=y\} \; P\{Y=y\}$$

$$= \sum_y \sum_x x \; \frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}} \; P\{Y=y\}$$

$$= \sum_y \sum_x x \; P\{X=x, Y=y\}$$

$$= \sum_x x \; P\{X=x\}$$

$$= E[X] \quad \text{(terbukti)}$$

III.4 FUNGSI MOMENT GENERATOR

Definisi 3.4.1 :

Fungsi moment generator $\emptyset(t)$ dari random variabel X didefinisikan untuk semua t berharga real sebagai :

$$\emptyset(t) = E[e^{tX}]$$

$$= \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \; f(x) \; dx \end{cases}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$\emptyset(t)$ disebut sebagai fungsi moment generator karena semua moment - moment dari X bisa didapat dengan mendeferensialkan $\emptyset(t)$ terhadap t selanjutnya diambil untuk $t = 0$

Contoh . .

$$\emptyset(t) = E\left[e^{tX}\right]$$

$$\emptyset'(t) = \frac{d}{dt} E\left[e^{tX}\right] = E\left[\frac{d}{dt} e^{tX}\right] = E\left[X\, e^{tX}\right].$$

untuk ini diasumsikan :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_x e^{tx}\ p(x)\right] = \sum_x \frac{d}{dt}\left[e^{tx}\ p(x)\right].$$

atau :

$$\frac{d}{dt}\left[\int e^{tx}\ f(x)\ dx\right] = \int \frac{d}{dt}\left[e^{tx} f(x)\right]\ dx$$

jadi dengan menga mbil $t = 0$ didapat :

$$\emptyset'(0) = E\left[X\, e^{0X}\right] = E\left[X\right]$$

$$\emptyset''(0) = E\left[X^2\, e^{0X}\right] = E\left[X^2\right].$$

Pada umumnya derivatif ke n dari $\emptyset(t)$,diberikan dengan.

$$\emptyset^n(t) = E\left[X^n\, e^{tX}\right] \qquad n \geqslant 1$$

dan $$\emptyset^n(0) = E\left[X^n\right].$$

II.5 PERTIDAKSAMAAN MARKOV

Jika X adalah random variabel yang hanya diambil untuk harga - harga yang non negatif, maka untuk semba - rang harga $a > 0$

$$P\left\{X \geqslant a\right\} \leqslant \frac{E[X]}{a}$$

Bukti :

Ambil X kontinu (bukti untuk X diskrit analog)

maka : $$E[X] = \int_0^\infty x\ f(x)\ dx$$

$$= \int_0^a x\ f(x)\ dx + \int_a^\infty x\ f(x)\ dx$$

$$\geqslant \int_a^\infty x\ f(x)\ dx$$

$$\geqslant \int_a^\infty a\ f(x)\ dx$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

$$\geqslant a \int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

$$\geqslant a \quad P\{X \geqslant a\}$$

sehingga : $$P\{X \geqslant a\} \leqslant \frac{E[X]}{a}$$

II.6 MOMEN SAMPEL

Jika X_1, X_2, . . .independen dan berdistribusi sama , dengan fungsi distribusi F, maka untuk suatu integer k, momen ke k dari F didefinisikan sebagai :

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x) = E\left[X_i^k\right]$$

momen pertama α_1 disebut juga mean dan dinotasikan dengan μ . Disamping itu momen pusat ke k dari F didefinisikan sebagai :

$$\mu_k = (x - \mu)^k \, dF(x)$$

$$= E\left[(X_i - \mu)^k\right]$$

II.7 PERTIDAKSAMAAN CHEBYSHEV

Jika X random variabel dengan mean μ yang berhingga dan varian σ^2 yang berhingga pula. Maka untuk sembarang nilai $k > 0$

$$P\{|X - \mu| \geqslant k\} \leqslant \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Bukti :

Karena $(X - \mu)^2$ adalah random variabel yang non negatip dengan menggunakan pertidaksamaan Markov, dengan $a = k^2$ didapat :

$$P\{(X - \mu)^2 \geqslant k^2\} \leqslant \frac{E[(X - \mu)^2]}{k^2}$$

karena $(X - \mu)^2 \geqslant k^2 \iff |X - \mu| \geqslant k$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

maka pers (3.7.2) menjadi :

$$P\{|X-\mu| \geqslant k\} \leqslant \frac{E[(X-\mu)^2]}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}$$

akibatnya, jika Var(X) = 0 maka $P\{X = E[X]\} = 1$

Bukti :

Dengan pertidaksamaan Chebyshev didapat untuk $n \geqslant 1$

$$P\{|X-\mu| > \frac{1}{n}\} = 0 \quad , \text{ sebab Var } (X) = 0$$

Sehingga untuk $n \to \infty$ dan menggunakan sifat kontinuitas probabilitas maka :

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X-\mu| > \frac{1}{n}\} = 0$$

$$P\{\lim_{n\to\infty}\{|X-\mu| > \frac{1}{n}\}\} = 0$$

$$P\{X \neq \mu\} = 0 \quad \text{atau } P\{X = \mu = E[X]\} = 1$$

III.8 BENTUK KONVERGENSI DARI BARISAN RANDOM VARIABEL

III.8.1 KONVERGEN DALAM PROBABILITAS.

Bila diketahui $X_1, X_2, \ldots$ dan X adalah random variabel-random variabel pada ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P(.))$ maka X_n dikatakan "konvergen dalam probabilitas" ke X

jika : $\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$ untuk setiap $\varepsilon > 0$

atau : $\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\} = 0$ untuk setiap $\varepsilon > 0$

untuk ini dinyatakan dengan $X_n \xrightarrow{p} X$, $n \to \infty$ atau

$$\underset{n\to\infty}{p \lim} X_n = X$$

III.8.2 KONVERGEN DENGAN PROBABILITAS 1

Pandang random variabel $X_1, X_2, \ldots$ dan X pada ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dikatakan bahwa X_n "konvergen dengan probabilitas 1"("dengan kuat"/"hampir pasti") ke X

jika : $P\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

atau : $\lim_{n \to \infty} P \{ | X_m - X | < \varepsilon , \forall m \geq n \} = 1 , \forall \varepsilon > 0$

untuk hal ini dinyatakan dengan :

$X_n \xrightarrow{wp.1} X , n \to \infty$ atau $pl\text{-}\lim_{n \to \infty} X_n = X$

III.8.3 KONVERGEN DALAM MEAN KE r

Pandang random variabel $X_1, X_2, \ldots$ dan X pada $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ untuk $r > 0$, dikatakan bahwa X_n " kon - vergen dalam mean ke r " ke X jika :

$$\lim_{n \to \infty} E | X_n - X |^r = 0$$

untuk ini ditulis $X_n \xrightarrow{r\ th} X$ atau $L_r \lim_{n \to \infty} X_n = X$

III.8.4 KONVERGEN DALAM DISTRIBUSI

Pandang fungsi dis tribusi - fungsi distribusi $F_1(.)$, $F_2(.)$, $F_3(.)$, . . . dan F(.). Bila diketahui X_1, X_2, X_3, . . . dan X adalah random variabel - random variabel (tidak perlu pada ruang probabilitas gabungan) yang masing - masing punya dis tribusi- distribusi ini, dikatakan bahwa X_n "konvergen dalam distribusi" ke X jika :

$$\lim_{n \to \infty} F_n(t) = F(t)$$ untuk setiap titik kontinu t dari F

untuk ini ditulis :

$$X_n \xrightarrow{d} X \text{ atau } d\text{-}\lim_{n \to \infty} X_n = X$$

III.9 HUBUNGAN DIANTARA BENTUK BENTUK KONVERGENSI BARISAN RANDOM VARIABEL

3.9.1 Jika $X_n \xrightarrow{wp.1} X \implies X_n \xrightarrow{p} X$

Bukti :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jika $X_n \xrightarrow{wp.1} X$ maka : $\lim_{n \to \infty} P\{|X_m - X| < \varepsilon, \ \forall m \geq n\} = 1$

padahal untuk barisan yang monoton naik dengan n=0,1,...

$\{|X_n - X| < \varepsilon\} \supseteq \{|X_m - X| < \varepsilon\}$,m $\geq$ n

$$P\{|X_n - X| < \varepsilon\} \geq P\{|X_m - X| < \varepsilon\} \ m \geq n \ , \ \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n \to \infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} \geq \lim_{m \to \infty} P\{|X_m - X| < \varepsilon, \forall m \geq n\}, \ \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n \to \infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$$

$$X_n \xrightarrow{p} X \quad \text{(terbukti)}$$

Theorema 3.9.2 :

Jika $X_n \xrightarrow{rth} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{p} X$

Bukti :

$$E|X_n - X|^r \geq E[|X_n - X|^r I(|X_n - X| > \varepsilon)] \geq \varepsilon^r P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

$$\Longrightarrow P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-r} E|X_n - X|^r \to 0, \ n \to \infty$$

$$\Longrightarrow P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \to 0, \ n \to \infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$$

$$\therefore X_n \xrightarrow{p} X$$

III.10 NORMAL ASYMTOTIS

Satu hal yang paling penting daripada " konvergen dalam distribusi " ialah konvergen ke distribusi normal. Suatu barisan random variabel $\{X_n\}$ konvergen dalam distribusi ke $N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, jika secara equivalen barisan $\{(X_n - \mu)/\sigma\}$ "konvergen dalam distribusi " ke N(0,1) . Pada umumnya barisan random variabel $\{X_n\}$ adalah Normal Asimtotis dengan "mean " μ_n dan "varian " σ_n^2 jika $\sigma_n > 0$ untuk semua n yang cukup besar.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

dan $\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$ ditulis X_n adalah $AN(\mu_n, \sigma_n^2)$

III. 11 HUKUM BILANGAN BESAR YANG LEMAH

Theorema 3.11

Bila $X_1, X_2, X_3, \ldots$ adalah barisan dari random variabel yang independent dan berdistribusi sama, masing masing mempunyai mean yang berhingga $E[X_i] = \mu$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$

$$P\left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right\} \longrightarrow 0 , \; n \to \infty$$

Bukti :

Diasumsikan bahwa random variabel mempunyai varian yang berhingga σ^2 maka :

Karena masing masing random variabel independen maka

$$E \left(\frac{\sum_1^n X_i}{n} \right) = \frac{\sum_1^n E\,X_i}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu .$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\sum_1^n X_i}{n} \right) = E\left(\frac{\sum_1^n X_i}{n} - E\,\frac{\sum_1^n X_i}{n} \right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}\left(\sum_1^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \sum_1^n \mathrm{Var}[X_i] = \frac{\sigma^2}{n}$$

(karena X_i independent)

Menurut pertidaksamaan Chebyshev maka :

$$P\left\{ \left| \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ \left| \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$$

$$P\left\{ \left| \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right\} \longrightarrow 0 , \; n \to \infty$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

III.12 HUKUM BILANGAN BESAR YANG KUAT

Theorema 3.12 :

Bila X_i adalah barisan random variabel yang independen dan berdistribusi sama, yang masing masing mempunyai mean yang berhingga yaitu $\mu = E[X_1]$, maka dengan probabilitas 1 :

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow \mu \;, \; n \longrightarrow \infty \;, \text{ wp } 1$$

Bukti :

Akibat langsung dari theorema III.11, karena telah diketahui berprobabilitas 1 maka konvergensinya akan dengan pro -babilitas 1 ,jadi konvergen kuat.

III.13 THEOREMA LIMIT PUSAT

Theorema 3.13 :

Jika $X_1, X_2, \ldots$ adalah random variabel yang independen dan berdistribusi sama, yamg masing masing mempunyai mean μ dan varian σ^2 maka distribusi dari :

$\dfrac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ mendekati normal baku untuk $n \to \infty$

dimana :

$$P\left\{\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx, \; n \to \infty$$

Bukti :

Menggunakan lemma :

Bila $Z_1, Z_2, \ldots$ barisan random variabel yang mempunyai fungsi distribusi F_{Z_n} dan fungsi momen generator ϕ_{Z_n} dengan $n \geq 1$ dan ambil Z suatu random variabel yang punya fungsi F_Z dan fungsi momem generator ϕ_Z , Jika $\phi_{Z_n}(t) \longrightarrow \phi_Z(t)$ untuk semua t maka :

$F_{Z_n}(t) \longrightarrow F_Z(t)$ untuk semua t dimana $F_Z(t)$ kontinu.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jika diambil Z adalah unit normal random variabel maka $\emptyset_Z(t) = e^{t^2/2}$, menurut lemma diatas bahwa jika $\emptyset_{Z_n}(t) \to \emptyset_Z(t)$ untuk $n \to \infty$ maka $F_{Z_n}(t) \to \Phi(t)$, $n \to \infty$

pertama diasumsikan : $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$

Fungsi momen generator dari X_i yaitu $\emptyset_X(t)$ ada dan ber - hingga, sedang fungsi momen generator dari $\frac{X_i}{\sqrt{n}}$ diberikan dengan :

$$\emptyset_{\frac{X_i}{\sqrt{n}}}(t) = E\left[\exp\left[\frac{tX_i}{\sqrt{n}}\right]\right] = \emptyset_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

Jadi fungsi moment generator dari $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sqrt{n}}$ diberikan

oleh : $\emptyset_{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sqrt{n}}}(t) = \emptyset_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$

Sekarang dengan expansi deret Taylor dari $\emptyset_X(t)$ didapat:

$$\emptyset_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \emptyset_X(0) + \emptyset_X'(0)t + \emptyset_X''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

dimana fungsi $f(t) = o(t^2)$ jika $\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t^2} = 0$

Jadi : $\emptyset_X(t) = 1 + t\,E[X] + \frac{t^2}{2}E[X^2] + o(t^2)$

$= 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$,karena $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$

Jadi $\emptyset_X\left(\frac{t^2}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$

maka akibatnya :

$$\emptyset_{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sqrt{n}}}(t) = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n$$

Jadi jika dapat ditunjukkan :

$$\left[1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \longrightarrow e^{t^2/2}, \quad n \to \infty$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
http://eprints.undip.ac.id

maka lemma dapat digunakan.

Untuk memperlihatkan hal diatas, pertama ditunjukkan : bahwa $\log(1 + x) = x + o(x)$, karena menurut hukum L'Hospitals :

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\log(1 + x) - x}{x} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\frac{1}{1+x} - 1}{1} \right] = 0$$

Oleh karena itu :

$$\log\left[1 + \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n})\right]^n = n \log\left[1 + \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n})\right]$$

$$= n\left[\frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n}) + o(\frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n})\right]$$

$$= \frac{t^2}{2} + n\, o(\frac{t^2}{n}) + n o(\frac{t^2}{2n})$$

Sekarang untuk setiap t, didapat :

$$n\, o(\frac{t^2}{n}) = t^2 \frac{o(\frac{t^2}{n})}{\frac{t^2}{n}} \longrightarrow 0 \quad , n \to \infty$$

$$n\, o(\frac{t^2}{2n}) = \frac{t^2}{2} \frac{o(\frac{t^2}{2n})}{\frac{t^2}{2n}} \longrightarrow 0 \quad , n \to \infty$$

Jadi : $\log\left[1 + \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n})\right]^n \longrightarrow \frac{t^2}{2} \quad , n \to \infty$

atau : $\left[1 + \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n})\right]^n \longrightarrow e^{t^2/2} \quad , n \to \infty$

Jadi teorema limit pusat terbukti bila $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$ akibatnya untuk hal yang lebih umum, kita pandang random

$X_i^* = \frac{(X_i - \mu)}{\sigma}$ maka akan terbukti bila $E[X_i^*] = 0$

dan $Var[X_i^*] = 1$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

III.14 PERTIDAKSAMAAN JENSEN

Jika $f(X)$ adalah fungsi convek, maka jika expektasi ada dan berhingga : $E\left[f(X)\right] \geqslant f\left[E\left[X\right]\right]$

Bukti :

Expansi $f(x)$ menurut deret Taylor dalam $\mu = E[X]$

didapat :

$$f(x) = f(\mu) + f'(\mu)(x - \mu) + \frac{f''(\xi)(x - \xi)^2}{2}$$

dimana ξ adalah harga antara x dan μ . Karena $f''(\xi) \geqslant 0$

didapat :

$$f(x) \geqslant f(\mu) + f'(\mu)(x - \mu)$$

sehingga :

$$E\left[f(x)\right] \geqslant f(\mu) + f'(\mu)\, E\left[X - \mu\right] \geqslant f(\mu)$$

(sebab $E\left[X - \mu\right] = 0$

sehingga : $E\left[f(x)\right] \geqslant f\left[E\left[X\right]\right]$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)