BAB II

KONSEP DASAR

2.1 PARAMETER

Definisi 2.1 :

Setiap sifat numerik suatu distribusi populasi dinamakan parameter.

Contoh : mean dan varian distribusi populasi.

2.2 KELUARGA PARAMETRIK DAN NON PARAMETRIK

Definisi 2.2 :

Suatu keluarga fungsi probabilitas dikatakan Parametrik, jika ada sejumlah terhingga harga-harga parameter yang menentukan dengan tunggal suatu anggota keluarga ini. Dengan perkataan lain, bentuk distribusinya diketahui, tetapi harga parameter-parameternya tidak diketahui.

Suatu keluarga fungsi probabilitas dikatakan non parametrik jika beberapa banyakpun harga-harga parameternya ditentukan, tidak menentukan dengan tunggal suatu anggota keluarga itu

2.3 RUANG SAMPEL DAN EVENT

Ruang sampel dilambangkan dengan Ω didefinisikan sebagai koleksi atau totalitas dari semua hasil yang mungkin dari suatu eksperimen.

Contoh 2 :

Pandang experimen pelemparan sebuah dadu homogen dan berbentuk kubus. Jika w menyatakan muka dadu yang muncul, dimana masing-masing diberi nomor : 1,2,...,6 maka

$$\Omega = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}\}$$

EVENT adalah himpunan bagian dari ruang sampel . Event yang terdiri dari satu anggota disebut EVENT ELEMENTER. Sedangkan himpunan dari semua event-event yang berkaitan dengan experimen didefinisikan sebagai RUANG EVENT dinotasikan dengan $\mathcal{A}$

Contoh 3 :

Pada experimen yang sama pada contoh :

Jika A adalah himpunan muka dadu dengan angka genap

maka $A = \{ \boxed{2}, \boxed{4}, \boxed{6} \}$

maka $A \subset \Omega$ sehingga A merupakan event.

Jika A_i himpunan muka dadu dengan nomor i dengan

$i = 1,2,3,\ldots,6$

maka A_i adalah event elementer.

Ruang event dari percobaan ini adalah himpunan dari semua himpunan bagian dari Ω

Suatu koleksi event event B yang memenuhi sifat -sifat dibawah ini :

Sifat 2.3.1 :

(i) $\Omega \in B$

(ii) Jika $A \in B$ maka $\bar{A} \in B$

(iii) Jika A_1 dan $A_2 \in B$ maka $(A_1 \cup A_2) \in B$

disebut ALJABAR BOOLE atau ALJABAR EVENT.

Ternyata $\mathcal{A}$ merupakan Aljabar event.

Bukti 1 :

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$ jelas, sebab $\Omega \subseteq \Omega$ sehingga Ω event.

(ii) Jika $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

sebab jika $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \subseteq \Omega$

sebab $A \cup \bar{A} = \Omega \Longrightarrow \bar{A} \subseteq \Omega \Longrightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

(iii) Jika A_1 & $A_2 \in \mathcal{A}$ maka $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

sebab jika $A_1 \in \mathcal{A}$ ... $\subseteq \Omega$

$A_2 \in \mathcal{A} \implies A_2 \subseteq \Omega$

mengingat definisi Ω maka jelas :

$(A_1 \cup A_2) \subseteq \Omega$ dan mengingat syarat keanggotaan $\mathcal{A}$ maka $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

karena memenuhi (i),(ii) dan(iii) maka :

$\therefore \mathcal{A}$ aljabar event.

II.4 FUNGSI PROBABILITAS

Suatu fungsi probabilitas P(.) adalah fungsi himpunan dengan domain $\mathcal{A}$ (suatu aljabar event) dan daerah kawan (counterdomain) interval $[0,1]$ yangmana memenuhi axioma 2.4.1 :

(i) $P(A) \geq 0$ untuk setiap A

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) Jika $A_1, A_2, A_3, \ldots$ adalah barisan event - event yang saling asing dimana $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$; $i,j = 1,2,3,\ldots$

dan jika $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

maka : $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

II.5 RUANG PROBABILITAS

Suatu ruang probabilitas adalah triple $(\Omega, \mathcal{A}, P(.))$ dimana Ω adalah ruang sampel, $\mathcal{A}$ aljabar event dan P(.) fungsi probabilitas dengan domain $\mathcal{A}$. Artinya bila diberikan suatu experimen tertentu maka terdapatlah suatu ruang sampel, ruang event dan fungsi probabilitas tertentu yang terkait dalam experimen tersebut.

II.6 INDEPENDENSI BEBERAPA EVENT

Untuk suatu ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{A}, P(.))$ yang

diberikan, bila diketahui $A_1, A_2, \ldots A_n$ adalah n buah event.
Event $A_1, \ldots A_n$ didefinisikan independen jika dan hanya jika

(i) $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$

(ii) $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\, P(A_j)\, P(A_k)$

(iii) $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

Bukti :

(i) A_i & A_j independen maka $P(A_i \mid A_j) = \dfrac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_j)} = P(A_i)$

$P(A_i) = \dfrac{P(A_i)P(A_j)}{P(A_j)}$ maka $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$

Bukti yang lain dikerjakan dengan induksi matematika.

II.7 RANDOM VARIABEL

Definisi 2.7.1 :

Untuk suatu $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suatu random variabel X, adalah suatu fungsi dengan domain Ω dan daerah kawan garis bilangan riil. Fungsi X harus sedemikian sehingga himpunan $A_r = \{ w : X(w) \leq r \}$ menjadi anggota $\mathcal{A}$ untuk setiap bilangan riil r.

Contoh 4 :

Pandang experimen pelemparan sebuah mata uang homogen, dengan dua muka H dan T. Jika X menyatakan jumlah muka H maka $\Omega = \{ H, T \}$ dan $X(w) = 1$ jika $w = H$, $X(w) = 0$ jika $w = T$
Sehingga X mengaitkan suatu bilangan riil dengan setiap outcome. Ditunjukkan bahwa X memenuhi definisi random variabel. Demikian :

$\mathcal{A}$ memuat 4 himpunan bagian dari Ω yaitu :
$\emptyset, \{H\}, \{T\}$ dan Ω.

jika $r < 0 \Rightarrow \{w;\ X(w) \leq r\} = \emptyset$

$0 \leq r < 1 \Rightarrow \{w;\ X(w) \leq r\} = \{T\}$

$$r \geq 1 \Longrightarrow \{w; X(w) \leq r\} = \{H, T\} = \Omega$$

jadi setiap r, $\{w : X(w) \leq r\}$ termasuk dalam $\mathcal{A}$ sehingga X adalah random variabel.

II.8 FUNGSI DISTRIBUSI KOMULATIF

Fungsi distribusi komulatif dari suatu random variabel X yaitu $F_X(.)$ didefinisikan sebagai fungsi dengan domain garis bilangan riil dan counterdomain interval $[0,1]$ yang memenuhi $F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{\{w: X(w) \leq x\}\}$ untuk setiap bilangan riil x.

Contoh 5 :

Pandang experimen pelemparan mata uang logam yang homogen pada contoh 4 maka:

untuk ; $x < 0 \Longrightarrow P\{\{w: X(w) < 0\}\} = P\{\emptyset\} = 0$

$0 \leq x < 1 \Longrightarrow P\{\{w: X(w) < 1\}\} = P\{T\} = \frac{1}{2}$

$x \geq 1 \Longrightarrow P\{\{w: X(w) \leq 1\}\} = P\{H, T\} = 1$

atau dengan fungsi indikator :

$$F_X(x) = 1/2 \; I_{[0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x)$$

Sifat-sifat fungsi distribusi komulatif $F_X(x)$ adalah sebagai berikut :

(i) $F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

$F_X(\infty) = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

(ii) $F_X(.)$ adalah fungsi monoton yang tidak turun dimana $F_X(a) \leq F_X(b)$ untuk $a < b$

(iii) $F_X(.)$ kontinu dari kanan dimana

$$\lim_{0 < h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$$

Bukti :

(i) Jika $x_n \to \infty \Longrightarrow$ event $\{X \leq x_n\}$ konvergen ke event $\{X < \infty\}$ (dimana jika $x_n \to \infty$ maka $\lim \{X \leq x_n\} = \{X < \infty\}$

jadi dengan sifat kontinunya probabilitas dapat dilihat bahwa:

$$\lim_{x_n \to \infty} P\{X \leq x_n\} = P(\lim_{x_n \to \infty} \{X \leq x_n\})$$
$$= P(X < \infty)$$
$$= P(\Omega)$$
$$= 1$$

Jika $x_n \to -\infty$ maka event $\{X \leq x_n\}$ konvergen ke event $\{X < -\infty\}$ (dimana jika $x_n \to -\infty$ maka $\lim \{X \leq x_n\} = \{X < -\infty\}$, dengan sifat kontinuitas probabilitas maka :

$$\lim_{x_n \to -\infty} P\{X \leq x_n\} = P\{\lim_{x_n \to -\infty} \{X \leq x_n\}\}$$
$$= P\{X < -\infty\}$$
$$= P\{\emptyset\}$$
$$= 0$$

sehingga (i) terbukti.

(ii) Karena untuk event $a < b$, event $\{X \leq a\}$ termuat dalam event $\{X \leq b\}$ sehingga $P\{X \leq a\} \leq P\{X \leq b\}$

akibatnya : $F_X(a) \leq F_X(b)$

jadi (ii) terbukti.

(iii) Jika $x_n \to x^+$, maka $\{X \leq x_n\} \to \{X \leq x\}$ hal ini karena $X \leq x_n$ untuk suatu bilangan n yang infinite jika dan hanya jika $X \leq x$

II.12 DISTRIBUSI NORMAL

X berdistribusi normal dengan parameter μ dan σ^2 jika density dari X diberikan dengan :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Sifat penting dari distribusi ini ialah :

Jika X berdistribusi normal dengan parameter μ dan σ^2 maka $Z = (X - \mu)/\sigma$ berdistribusi normal dengan parameter 0 dan 1 , Random variabel Z semacam ini disebut standard atau unit dari normal distribusi, dilambangkan dengan $\Phi(x)$ dimana :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} \, dy$$

dengan $y = (X-\mu)/\sigma$

II.13 KRITERIA PENAKSIR YANG"BAIK"

Suatu statistik T yang digunakan dalam penaksiran terhadap titik parameter θ dikatakan merupakan penaksir yang baik bila :

(i) Harga expektasi T sama dengan θ atau $E[T] = \theta$

(ii) Mempunyai Varian minimum dibandingkan dengan Varian penaksir yang tak bias lainnya terhadap θ.

(iii) Bersifat konsisten, artinya semakin besar jumlah sampel maka T konvergen ke θ.

(jadi $\lim_{n \to \infty} \sup \{X \leqslant x_n\} = \{X \leqslant x\}$, secara sama

$X \leqslant x_n$ untuk bilangan berhingga n jika dan

hanya jika $X \leqslant x$ (jadi $\lim \inf \{X \leqslant x_n\}$

$= \{X \leqslant x\}$

jadi $\lim_n \{X \leqslant x_n\} = \{X \leqslant x\}$

dengan sifat kontinuitas probabilitas terbukti

$\lim_n P\{X \leqslant x_n\} = P\{\lim_n \{X \leqslant x_n\}\} = P\{X \leqslant x\}$

atau : $\lim_{x_n \to x^+} F(x_n) = F(x)$

sehingga (iii) terbukti.

II.9 FUNGSI KARAKTERISTIK

Fungsi karakteristik dari k random vektor X didefinisikan dengan :

$$\emptyset_X(t) = E\left[e^{itx'}\right] = \int \dots \int e^{itx'} dF_{X(x)} \quad , t \in R^k$$

II.10 FUNGSI DISTRIBUSI KONTINU ABSOLUT

Suatu fungsi distribusi yang kontinu absolut, F memenuhi sifat :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\, dt$$

dimana F bisa dinyatakan sebagai integral tak terbatas dari derivatifnya.

dalam hal ini suatu fungsi f sedemikian sehingga

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

untuk semua x disebut density dari F

II.11 FUNGSI INDIKATOR

Untuk sembarang himpunan S ,fungsi indikator yang berkaitan dinyatakan dengan :

$I_s(x) = 1 \quad x \in S$