BAB. II

MATERI YANG MENDUKUNG

Dalam pembahasan ini sengaja tidak dibicarakan secara panjang dan mendalam,namun hanya mengambil sebagian saja yang berkaitan dengan materi yang akan dibahas pada Bab berikutnya.

2.1 Limit dari Fungsi

Misalkan f(x) suatu fungsi dari x dan bila a adalah - suatu titik yang tetap dari suatu selang atau berimpit dengan ujung-ujung selang itu,sedang selang itu merupakan daerah deffinisi fungsi f(x).Dan bila x adalah suatu titik yang variabel dari daerah deffinisi,maka terdapatlah barisan barisan dari daerah itu $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$ yang tak terhingga banyaknya dengan sifat $x_n \to a$ dan harga fungsi $f(x_n)$ juga merupakan suatu barisan.

Deffinisi :

Bila pada tiap-tiap barisan x_n dengan sifat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?

limit dari fungsi f(x) untuk $x \to a$ (atau untuk x = a)

atau ditulis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Deffinisi dapat dikatakan sebagai berikut,akan tetapi ter - lebih akan diberikan deffinisi-deffinisi tentang limit kanan dan limit kiri.

I.Fungsi f(x) mempunyai titik x = a suatu limit kanan L' bila untuk tiap-tiap barisan x_n dengan $x_n > a$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L'$$

$$\lim_{n\to a+0} f(x) = L'$$

II Fungsi $f(x)$ mempunyai pada titik $x = a$,suatu lim-mit kiri L'' bila untuk tiap-tiap barisan $x_n < a$ dan $\lim_{n \to \infty} X_n = a$

telah dipenuhi : $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L''$ atau

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = L''$$

Bila $f(x)$ mempunyai suatu lilmit L pada titik $x = a$, maka berarti bahwa untuk $x = a$, limit kiri dan limit kanan ada dan - sama besarnya , jadi :

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Karena tiap-tiap barisan x_n dengan $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ dapat dijadikan

barisan barisan bagian x_n' dan x_n'' dengan $x_n' < a$, $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

dan $x_n'' > a$, $\lim_{n \to \infty} x_n'' = a$ sedangkan tiap-tiap x_n terdapat dalam-selang x_n' dan x_n''.

Dari pengertian diatas kita ambil ketentuan :

Fungsi $f(x)$ mempunyai titik $x = \infty$,untuk suatu limit L.

Bila untuk barisan x_n dengan $x_n \to \infty$ bila $n \to \infty$ dipenuhi $\lim f(x_n) =$ L atau $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ dan berlaku pula untuk $x \to \infty$

2.2 Differensial Partial

Fungsi $z = f(x,y)$ dideffinisikan dalam domaian D pada - bidang x,y dan sebagai misal titik (x_0,y_0) sebuah titik dari D. Fungsi (x,y) tergantung pada xsaja dan dideffinisikan dalam - interval sekitar titik x_0.Maka turunannya terhadap x di titik- $x = x_0$ disebut turunan parsiil dari f(x,y) terhadap x di(x_0,y_0) yang dapat dinyatakan $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ atau :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x_0}$$

demikian pula untuk :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y_0 \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

contoh :

$$z = 3x^2 y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{3(x_0 + x_0)^2 y_0 - 3x_0 y_0}{x_0}$$

$$= \lim_{\Delta x_0 - 0} \frac{3(x_0^2 + 2x_0 x_0 + x_0^2) - 3x_0 y_0}{x_0}$$

$$= 6x_0^2 y_0 \quad \text{untuk } x=x_0\text{, maka}$$

$$= 6xy$$

Deffinisi deffinisi diatas dapat diperlukan untuk fungsi fungsi dari 3 variabel atau lebih.

Bila $V = f(x,y,z,t)$, maka :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x,y,z,t + \Delta t) - f(x,y,z,t)}{\Delta t}$$

variabel x,y,z dianggap konstan.

2.3 Differensial Total

Dalam pembentukan turunan partial ,perubahan Δx dan Δy ditinjau sendiri sendiri. Sekarang diperhatikan pengaruh perubahan Δx dan Δy bersama sama.

Sebagai misal (x,y) titik tertentu dari domain D dan $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ merupakan titik kedua dari D.

Maka fungsi $z = f(x,y)$ berubah sebesar Δz berasal dari (x,y) sampai $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ atau :

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Pernyataan ini menentukan fungsi dari Δx dan Δy dianggap konstan.

Dengan sifat khusus $\Delta z = 0$ bila $\Delta x = 0$ dan $\Delta y = 0$

Contoh :

Bila $z = y^2 + xy$

$$\Delta z = (y + \Delta y)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y^2 + xy)$$

$$= (y^2 + 2y.\ y + \Delta y^2) + (xy + x\Delta y + \Delta xy + \Delta x \Delta y) - (y^2 + xy)$$

$$= \Delta y\,(2y + x) + (y)\Delta x + (\Delta y)^2 + \Delta x \Delta y$$

Disini Δz mempunyai bentuk :

$$\Delta z = a.\Delta y + b\Delta x + c(\Delta y)^2 + d(\Delta x, \Delta y)$$ a, b, c dan d ?

Tampak bahwa Δz fungsi dari Δx dan Δy atau $z = f(x,y)$ mempunyai deffrensial total di (x,y) bila :

$\Delta z = a(\Delta x) + b(\Delta y) + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$ dengan a dan b tak tergantung pada Δx dan Δy sedang ε_1 dan ε_2 adalah - fungsi dari Δx dan Δy sehingga :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_1 = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_2 = 0$$

Persamaan linier dari Δx dan Δy berbentuk :

$a\,\Delta x + b\,\Delta y$ = deffrensial total dari z di (x,y)

atau :

$$\Delta z = a\,\Delta x + b\,\Delta y$$

Bila Δx dan Δy cukup kecil , nilai $\Delta z \longrightarrow dz$

Teorema :

Bila $z = f(x,y)$ mempunyai turunan total di titik (x,y) maka $a = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $b = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ adalah turunan partial di (x,y) dan bernilai sebagai yang diberikan.

Bukti :

Misal y = konstan, maka $\Delta y = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a + \varepsilon_1)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (a + \varepsilon_1) = a$$

x = konstan , maka $\Delta x = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(b + \varepsilon_2)}{\Delta y} = \lim (b + \varepsilon_2) = b.$$

Jadi $a = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $b = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

Lema Dasar

Bila $z = f(x,y)$ mempunyai turunan partial pertama yang kontinue di D, maka z mempunyai turunan, yaitu :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

2.4 Differensial dari Fungsi ke Fungsi

Teorema :

Bila $z = f(x,y)$ dan $x = g(t)$ dan $y = h(t)$ maka :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Bukti ;

$$x = g(t)$$
$$\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t)$$
$$\Delta y = h(t + \Delta t) - h(t), \text{ maka}$$
$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

dari lema dasar diperoleh :

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Bila $\Delta t \to 0$, maka $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ dan $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ mendekati turunan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ sedangkan ε_1 dan ε_2 mendekati nol karena $\Delta x, \Delta y$ mendekati nol maka :

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

maka :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

2.5 Deferensial Partial Vektor

Bila $\vec{A}$ adalah vektor yang bergantung pada lebih dari satu ubahan (variabel) skalar, misal A = A(x,y,z).

Turunan partial vektor A terhadap ubahan x ditentukan :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{A}(x+\Delta x, y, z) - \vec{A}(x,y,z)}{\Delta x}$$

terhadap ubahan y :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{A}(x, y+\Delta y, z) - \vec{A}(x,y,z)}{\Delta y}$$

terhadap ubahan z :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{A}(x, y, z+\Delta z) - \bar{A}(x,y,z)}{\Delta z}$$

Operasi Deferensial Vektor.

Operasi deferensial vektor dinotasikan dengan ∇ dibaca "operasi Del" atau "operasi Nabla" ditentukan dengan :

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Operasi deferensial vektor $\bar{\nabla}$ memiliki sifat-sifat yang sesuai - dengan vektor biasa. Del digunakan untuk mendeferensialkan 3 kuantitas yang berguna dalam pemakaian secara praktis, yaitu gradient , divergent atau curl.

Gradient :

Bila Ø(x,y,z) adalah skalar yang mempunyai turunan pada (x,y,z) maka $\bar{\nabla}Ø$ dibaca " gradient Ø " didefinisikan sebagai :

$$\bar{\nabla}Ø = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) Ø$$

$$= \frac{\partial Ø}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial Ø}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial Ø}{\partial z}\vec{k}$$

Divergent :

Bila $\vec{V}(x,y,z) = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$ adalah vektor yang mempunyai turunan pada setiap titik (x,y,z) pada suatu luasan tertentu pada suatu permukaan,maka $\vec{\nabla}\vec{V}$ dibaca "divergent dari V" dan dideffinisikan :

$$\vec{\nabla}\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

Curl :

Bila $\vec{V}(x,y,z) = V\vec{i} + V\vec{j} + V\vec{k}$ adalah medan vektor yang mempunyai turunan,maka $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ dibaca "curl dari V" dan dideffinisika sebagai berikut :

$$\nabla \times V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \times \left(V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

2.6 Hukum Dasar Aliran

Perubahan yang terjadi pada peristiwa aliran selalu dibangi oleh berpindahnya satu atau lebih dari besaran Masa, Momentum dan Panas/Energi. Perpindahan ini didasarkan pada Hukum :

- Hukum Kekekalan Masa
- Hukum Kekekalan Momentum
- Hukum Kekekalan Panas/Energi

Hukum Kekekalan Masa berbunyi :

Masa suatu zat tidak dapat musnah akan tetapi hanya berubah bentuk

Hukum Kekekalan Momentum berbunyi :

Momentum suatu zat tidak dapat musnah akan tetapi hanya berubah bentuk

Hukum Kekekalan Panas/Energi

Panas/Energi suatu zat tidak dapat musnah akan tetapi hanya berubah bentuk.

Untuk menerapkan Hukum hukum Kekekalan pada Aliran Fluida dapat dinyatakan sbb : Misal Fluida mengalir pada suatu pipa maka :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\text{Masa fluida yg}\\ \text{masuk ke dlm pi-}\\ \text{pa per satuan -}\\ \text{luas}\end{bmatrix}}_{\text{I}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\text{Masa yg keluar}\\ \text{dari pipa per-}\\ \text{satuan luas}\end{bmatrix}}_{\text{II}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\text{Masa yg ter-}\\ \text{tinggal dlm}\\ \text{pipa per sa-}\\ \text{tuan waktu}\end{bmatrix}}_{\text{III}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\text{timbul-}\\ \text{masa ba-}\\ \text{ru oleh}\\ \text{reaksi}\end{bmatrix}}_{\text{IV}}$$

Pada pembentukan Model ini yang ditinjau masalah masalah tanpa reaksi kimia, jadi suku ke IV pada pernyataan diatas dianggap nol maka :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\text{Masa fluida yg ma-}\\ \text{suk ke pipa per sa-}\\ \text{tuan luas}\end{bmatrix}}_{\text{I}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\text{Masa yg keluar}\\ \text{dari pipa per -}\\ \text{satuan luas}\end{bmatrix}}_{\text{II}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\text{Masa yg terting-}\\ \text{gal dlm pipa per}\\ \text{satuan waktu}\end{bmatrix}}_{\text{III}} + \underbrace{0}_{\text{IV}}$$

$\frac{M}{} = \frac{M}{\pi L} + \frac{M}{T}$ Dimensi atau : III = I - II , maka :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Laju alir Masa} \\ \text{yang tertinggal} \\ \text{persatuan waktu} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{Laju alir Masa} \\ \text{yg masuk ke pi-} \\ \text{pa per satuan} \\ \text{luas} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} \text{Laju alir Masa} \\ \text{yg keluar dari} \\ \text{pipa persatuan} \\ \text{luas} \end{array} \right|$$

.... (1)

Akumulasi:adalah zat-zatyang tertinggal dalam proses perpindahan.

Jadi III dapat dinamakan Akumulasi Laju alir Masa.

Untuk lebih jelasnya diambil contoh sbb :

Fluida dialirkan pada sebuah pipa dengan kecepatan V panjang pipa L sedang luas penampang depan S_1 dan luas penampang belakang S_2,kerapatan fluida = seperti tampak pada gambar :

2 = 20

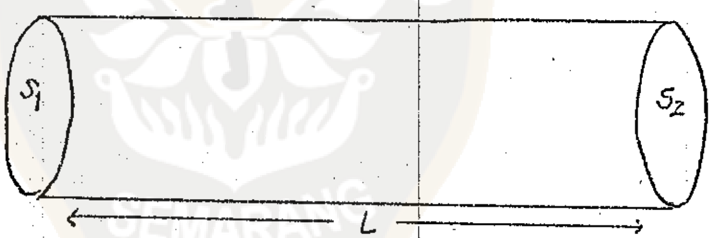
10

40

= 90/120

3

$\frac{2+3}{2} \times 40 = 100.$



$V_1 = 10 \cdot 2 = 20$

$V_2 = 40 \cdot 3 = 120$

$V = 140.$

$V = \frac{2+3}{2} \cdot 50$

$= 125.$

Laju alir = Kerapatan . Kecepatan = ρ.V.

Jadi, Laju alir Masa yang masuk pipa = $S_1 \cdot \rho V$

Laju alir Masa yang keluar pipa = $S_2 \cdot \rho V$

Laju alir Masa yang tertinggal dalam pipa persatuan waktu

= Laju Akumulasi Masa = volume pipa . perubahan yang tertinggal per st waktu.

$$= \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot L \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho(x,y,z,t+\Delta t) - (x,y,z,t)}{\Delta t}$$

20

$$= S_r \cdot L \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad ;(S_r = \frac{S_1 + S_2}{2})$$

Sesuai dengan persamaan (1) didapat :

$$S_r \cdot L \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = S_1 \cdot \rho V \big|_{masuk} - S_2 \cdot \rho V \cdot \big|_{keluar} \;.... \qquad .... (2)$$

Dalam setiap fluida yang mengalir terdapat dua jenis perpindahan momentum yaitu :

- Perpindahan Momentum Molekuler
- Perpindahan Momentum Konveksi

Perpindahan Momentum Molekuler :

Perpindahan yang disebabkan karena gaya tarik menarik antara molekul² dan arahnya ke seluruh koordinat.

Perpindahan Momentum Konveksi :

Perpindahan yang disebabkan aliran masa,karena semua masa yang bergerak akan membawa perpindahan momentum.

Dengan mengingat Hukum Kekekalan Momentum yang berbunyi : " Momentum suatu zat tidak dapat musnah akan tetapi hanya berubah bentuk " maka untuk menerapkan pada perpindahan momentum dapat dinyatakan sbb :

$$\begin{bmatrix}\text{Laju alir Momentum} \\ \text{yg tertinggal da -} \\ \text{lam volume per sa-} \\ \text{tun waktu}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Laju alir Momen-} \\ \text{tum yg masuk ke} \\ \text{volume per satu-} \\ \text{an luas}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Laju alir Mo-} \\ \text{mentum yg ke-} \\ \text{luar volum} \\ \text{persatuan luas}\end{bmatrix}$$

Momentum = m . V

Laju alir Momentum = Laju alir masa . kecepatan = $\rho V \cdot V$

Laju alir Momentum yg masuk per satuan luas = $\rho V.V \cdot S_1$

" " " yg keluar " " = $\rho V.V \cdot S_2$

$$\text{Laju Akumulasi Momentum} = \rho V.V.S_1\Big|_{masuk} - \rho V.V.S_2\Big|_{keluar} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Persamaan (3) merupakan perpindahan secara Konveksi.

Dan untuk perpindahan secara molekulernya :

Laju alir momentum masuk : $\tau . S_1 |_{masuk}$

Laju alir momentum keluar; $\tau . S_2 |_{keluar}$

$$\text{Laju Akumulasi Momentum} = \tau . S_1 |_{masuk} - \tau . S_2 |_{keluar} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Perpindahan Panas/Energi

Konduksi : peristiwa perpidahan panas dari suhu yang tinggi ke-suhu yang rendah

Dalam perpindahan panas secara konduksi, terjadi perpindahan e - nergi karena hubungan molekul secara langsung tanpa adanya per-pindahan molekul yang cukup besar.

Energi Mekanis = Energi Dalam + Energi Kinetik

Energi Dalam : Energi yang dimiliki oleh suatu molekul zat yang disebabkan kecepatan dan posisi rela - tif molekulnya.

Energi Kinetik :

Energi yang dimiliki oleh suatu molekul - disebabkan masa dan kecepatannya.

Energi Mekanis $= \rho U + \frac{1}{2}\rho V^2$

Energi Dalam $: \rho U$

Energi Kinetik $: \frac{1}{2}\rho V^2$

Sesuai dengan Hukum Kekekalan Energi yang berbunyi ;

Energi/Panas suatu zat tidak dapat musnah akan te-tapi hanya berubah bentuk

maka :

$$\begin{bmatrix}\text{Laju Energi yg}\\ \text{masuk per st -}\\ \text{luas}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Laju Energi yg}\\ \text{keluar per st-}\\ \text{luas}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Laju Energi yg}\\ \text{tertinggal per}\\ \text{st waktu}\end{bmatrix}$$

I II III

atau : III = I - II

III disebut Akumulasi, Jadi

Laju Akumulasi Energi = Laju Energi yg masuk - Laju Energi keluar

$$\text{Laju Akumulasi Energi} = \left[\rho U + \tfrac{1}{2}\rho V^2_{msk} - \rho U + \tfrac{1}{2}\rho V^2_{klr}\right] \cdot S \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Berlaku pula untuk panas (q).

$$\text{Laju Akumulasi Panas} = \left[q_{\,masuk} - q_{\,keluar}\right] \cdot L \qquad \ldots\ldots (6)$$

S = luas