BAB II

MATERI PENDUKUNG

Sebelum membahas masalah utama , didalam bab ini akan diberikan beberapa materi yang mendukung dan melandasinya , dengan tujuan supaya pembaca akan dapat lebih memahami masalah yang akan dibicarakan . Namun dalam penyampaian materi pendukung ini dianggap pembaca dapat mengerti dan memahami , sehingga ada teorema-teorema yang sengaja tidak dibuktikan .

II.1 RUANG VEKTOR

II.1.1 FIELD :

Pandang K suatu himpunan , didefinisikan 2 operasi yang disebut penjumlahan (+) dan perkalian (.) .

K merupakan field apabila dipenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. Untuk setiap $a,b \in K$, maka $a + b \in K$ dan $a.b \in K$. Dikatakan K tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian .
2. Untuk setiap $a,b,c \in K$, maka :
   $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. Terdapat $0 \in K$, disebut elemen nol , sedemikian sehingga $0 + a = a + 0 = a$, untuk setiap $a \in K$.
4. Untuk masing-masing $a \in K$, terdapatlah :
   $-a \in K$, disebut negatip dari a , sedemikian sehingga $(-a) + a = a + (-a) = 0$
5. Untuk setiap $a,b \in K$, maka $a + b = b + a$
6. Untuk setiap $a,b,c \in K$, maka :
   $(ab)c = a(bc)$

7. Untuk setiap $a,b,c \in K$, maka :

   (i). $a(b + c) = ab + ac$

   (ii). $(b + c)a = ba + ca$

8. Untuk setiap $a,b \in K$, maka : $ab = ba$

9. Terdapat $1 \in K$, disebut elemen satuan dari K , sedemikian sehingga $1a = a1 = a$, untuk setiap $a \in K$.

10. Untuk masing-masing $a \neq 0 \in K$, terdapat a^{-1} , disebut invers (kebalikan) dari a , sedemikian sehingga $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$

Anggota-anggota (elemen-elemen) dari suatu field disebut skalar .

II.1.2 RUANG VEKTOR DIATAS SUATU FIELD :

Pandang suatu himpunan V dan suatu field K .

Didefinisikan operasi penjumlahan terhadap elemen-elemen V dan perkalian elemen-elemen V dengan elemen K (disebut perkalian skalar) . Maka V disebut ruang vektor diatas field K , bila dipenuhi :

1. Untuk setiap $u,v \in V$ dan $a \in K$, maka : $u + v \in V$ dan $au \in V$

2. Untuk setiap $u,v,w \in V$, maka : $(u + v) + w = u + (v + w)$

3. Untuk setiap $u,v \in V$ dan $a \in K$, maka : $a(u + v) = au + av$

4. Terdapat $0 \in V$, disebut vektor nol , sedemikian sehingga untuk setiap $u \in V$, berlaku : $0 + u = u + 0 = u$

5. Untuk masing-masing $u \in V$, terdapatlah $-u \in V$, sedemikian sehingga :

6. Untuk setiap $u, v \in V$, maka :

   $u + v = v + u$

7. Untuk setiap $u \in V$ dan $a, b \in K$, berlaku

   (i). $(a + b)u = au + bu$

   (ii). $(ab)u = a(bu)$

8. Untuk setiap $u \in V$ berlaku $1u = u$, dimana 1 adalah elemen satuan dari K .

Anggota-anggota dari suatu ruang vektor adalah vektor .

II.1.3 RUANG VEKTOR BAGIAN (SUBSPACE) :

Pandang suatu ruang vektor V . W adalah himpunan bagian dari V . Misal dengan sifat khusus W memenuhi semua aksioma ruang vektor , sehingga merupakan ruang vektor tersendiri , maka W disebut ruang vektor bagian (subspace) dari V . Selanjutnya akan menyebut ruang bagian dari V .

Untuk menentukan apakah W merupakan ruang bagian , cukup diperiksa sebagai berikut :

1. $W \neq \emptyset$ (W tidak hampa) , untuk itu kita akan tunjukkan bahwa vektor $0 \in W$.
2. Untuk setiap $m, n \in W$, maka $m + n \in W$.
3. Untuk setiap $m \in W$ dan $a \in K$ (skalar) , maka $am \in W$.

Maka W adalah ruang bagian dari V .

II.1.4 VEKTOR BEBAS LINIER DAN BERGANTUNG LINIER :

DEFINISI II.1 :

Himpunan m buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m\}$ [illegible] bergantung linier (linearly dependent)

bila terdapat skalar-skalar $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$ yang tidak semua nol , sedemikian sehingga :

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_mu_m = 0$$

(0 adalah vektor nol)

Himpunan $\{ u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, u_m \}$ disebut bebas linier (linearly independent) bila dipenuhi :

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_mu_m = 0$$

hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = a_m = 0$

II.1.5 KOMBINASI LINIER :

DEFINISI II.2 :

Suatu vektor V dikatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor $\{ u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m \}$ bila terdapat skalar-skalar $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ sedemikian sehingga :

$$V = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_nu_n$$

DEFINISI II.3 :

Suatu himpunan vektor-vektor $\{ u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m \}$ disebut suatu sistim pembentuk (generator) dari ruang vektor V , ditulis :

$$V = L \{ u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m \}$$

bila setiap vektor $v \in V$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $\{ u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m \}$.

II.1.6 DIMENSI DAN BASIS :

DEFINISI II.4 :

Suatu ruang vektor V dikatakan berdimensi n bila dapat diketemukan suatu himpunan n vektor vektor $\in$ V yang bebas linier , sedangkan setiap himpunan (n + 1) vektor-vektor $\in$ V selalu bergantung linier , dengan perkataan lain , banyaknya maksimum vektor-vektor $\in$ V yang bebas linier adalah n .

Hubungan antara sistim pembentuk dan dimensi ruang vektor dinyatakan oleh teorema berikut :

TEOREMA II.7 :

Setiap n vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_n\}$ yang bebas linier dari V , ruang vektor dimensi n , pasti merupakan sistim pembentuk dari V .

Catatan :

Suatu sistim pembentuk tidak perlu bebas linier . Mudah diterangkan bahwa bila $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m\}$ merupakan sistim pembentuk yang bergantung linier , sedang maksimum vektor-vektor diantara $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m\}$ yang bebas linier adalah $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_p\}$, maka : $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_p\}$ juga merupakan sistim pembentuk . Jadi dalam hal ini dimensinya adalah p .

DEFINISI II.5 :

Setiap sistim pembentuk yang bebas linier disebut BASIS dari ruang vektor tersebut .

Atau :

Setiap himpunan n vektor-vektor yang bebas linier $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_n\}$ dari ruang vektor berdimensi n , disebut basis dari ruang vektor .

TEOREMA II.8 :

Apabila $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_n\}$ adalah basis dari ruang vektor V berdimensi n , maka setiap $v \in V$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linier dari $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, u_n\}$ misal : $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_nu_n$ dan n-tupel skalar $(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n)$ disebut koordinat v relatif terhadap basis $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_n\}$.

II.2 MATRIKS :

II.2.1 RUANG BARIS DAN RUANG KOLOM DARI SUATU MATRIKS :

Pandang matriks A berukuran $(m \times n)$ dengan elemen-elemennya bilangan riil :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tiap-tiap baris dari A dapat dipandang sebagai sebuah vektor

$$\begin{aligned} B_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots\ldots, a_{1n}) \;, \\ B_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots\ldots\ldots, a_{2n}) \;, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;, \\ B_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots\ldots\ldots, a_{mn}) \end{aligned}$$

dapat disebut sebagai vektor-vektor baris dari A .

DEFINISI II.6 :

Ruang baris dari matriks riil $A(m \times n)$ adalah

tuk oleh vektor-vektor baris dari A , dengan perkataan lain , ruang baris dari A adalah :

$L\{B_1, B_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, B_m\}$.

Analog dengan ruang baris dan vektor baris dari matriks A , adalah ruang kolom dan vektor kolom dari matriks A . Vektor-vektor kolom dari matriks A adalah :

$$A_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots\ldots\ldots, a_{m1}) ,$$
$$A_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots\ldots\ldots, a_{m2}) ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$A_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots\ldots\ldots, a_{mn}) .$$

DEFINISI II.7 :

Ruang kolom dari matriks A adalah ruang vektor bagian dari R^m yang dibentuk oleh vektor vektor kolom dari A , dengan perkataan lain ruang kolom dari matriks A adalah :

$L\{A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n\}$.

II.2.2 RANK MATRIKS :

DEFINISI II.8 :

Rank baris dari matriks A adalah dimensi dari ruang baris matriks A .

Rank kolom dari matriks A adalah dimensi dari ruang kolom matriks A .

Ternyata bahwa rank baris = rank kolom , maka rank matriks A didefinisikan sebagai harga rank baris = rank kolom dari A tersebut .

Ditulis r(A) atau rank(A) .

Rank dari matriks menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier .

II.3 PERSAMAAN-PERSAMAAN LINIER :

DEFINISI II.9 :

Bentuk : $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nx_n = b$ disebut persamaan linier . a_i dan b adalah skalar , dimana a_i disebut koefisien dan b disebut konstanta dari persamaan .

$x_i = x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ disebut "anu" (undeterminants/unknows/variables) .

Sekumpulan harga dari anu , katakanlah $x_1=k_1$, $x_2 = k_2$,....., $x_n=k_n$, disebut jawaban (solusi) dari persamaan , apabila dipenuhi :

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_nk_n = b$$

Jawaban tersebut dapat ditulis dalam notasi vektor : $[\, k_1, k_2, \ldots\ldots\ldots, k_n \,]$ atau $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$

dan disebut jawab vektor dari persamaan .

TEOREMA II.9 :

Suatu susunan persamaan linier akan mempunyai jawab (consistent) apabila rank matriks koefisien = rank matriks lengkap atau bila :

rank(A) = rank(A , B)

Matriks lengkap (A , B) adalah matriks :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

II.3.1 SISTIM PERSAMAAN LINIER HOMOGEN :

Kalau semua konstata $b_i = 0$, persamaan menjadi : $AX = 0$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = 0$$

Atau :

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots\cdots + A_nx_n = 0$$

disebut susunan persamaan linier homogen .

Jelas rank(A) = rank(A , 0) , jadi persamaan linier homogen selalu mempunyai jawab . Harga-harga : $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_n = 0$ jelas selalu memenuhi persamaan diatas . Jadi $[0,0,0,\cdots\cdots,0]$ pasti merupakan jawab dari persamaan linier homogen yang manapun .

Maka suatu persamaan linier homogen selalu mempunyai paling sedikit satu jawab $[0,0,\cdots\cdots,0]$ yang disebut jawab nol atau jawab trivial .

TEOREMA II.10 :

Semua jawab vektor dari persamaan linier homogen membentuk suatu ruang vektor di R^n ,

Dimensi L = (n - r) . Maka n = banyaknya anu dan r = rank matriks koefisien A .

II.3.2 SISTIM PERSAMAAN LINIER NONHOMOGEN :

Pandang persamaan linier AX = B dimana B $\neq$ 0 .

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$

.....

.....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m$

Atau :

$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_nx_n = B$, dimana

$A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_n$ adalah vektor-vektor kolom dari matriks koefisien A .

Persamaan linier diatas disebut nonhomogen .

Persamaan linier nonhomogen akan mempunyai jawab apabila rank(A) = rank(A , B) .

II.4 TRANSFORMASI LINIER :

II.4.1 PENGERTIAN TRANSFORMASI :

Pandang 2 buah himpunan A dan B . Kemudian dengan suatu aturan tertentu f , dan mengkaitkan/mengkawankan setiap x $\in$ A dengan satu dan hanya satu y $\in$ B .

Dikatakan : terdapat suatu fungsi $f : A \longrightarrow B$.

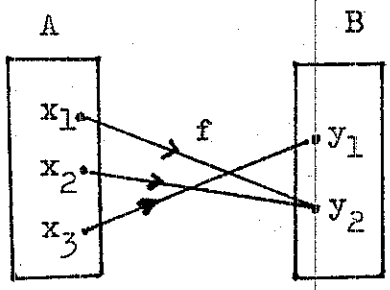
Contoh :

Misalkan : $A = \{ x_1, x_2, x_3 \}$

$B = \{ y_1, y_2 \}$

Maka :

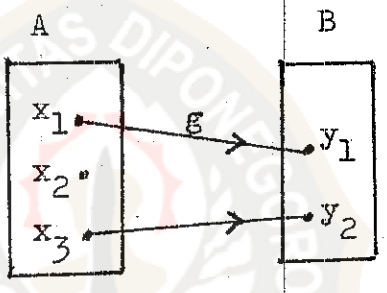
(i).



Terlihat bahwa setiap $x \in A$ mempunyai satu pasangan $y \in B$.

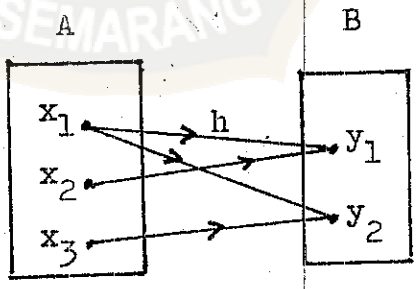
Jadi f adalah fungsi $A \longrightarrow B$.

(ii).



Terlihat bahwa tidak semua $x \in A$ mempunyai pasangan, disini x_2 tidak mempunyai pasangan. Jadi g bukan fungsi.

(iii).



Terlihat bahwa terdapat $x \in A$, disini x_1 mempunyai lebih dari satu pasangan, yaitu y_1 dan $y_2 \in B$. Jadi h bukan fungsi.

Himpunan A diatas disebut Domain dan himpunan B disebut Codomain dari fungsi f tersebut.

Yang menjadi pokok pembicaraan nanti adalah fungsi-fungsi dimana domain dan codomainnya merupakan ruang vektor. Untuk ini akan dipilih menggunakan perkataan "transformasi" sebagai pengganti kata fungsi.

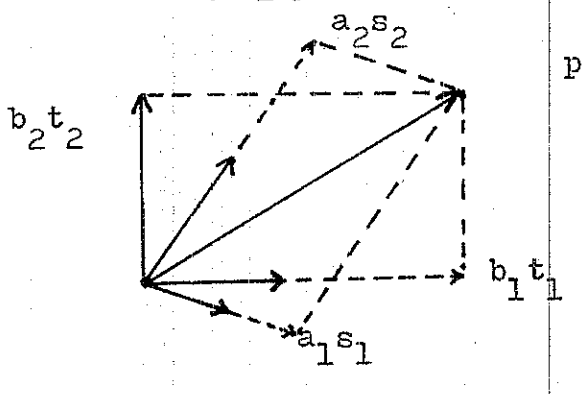
II.4.2 PERGANTIAN BASIS :

Salah satu transformasi vektor yang peting adalah transformasi sebagai akibat pergantian basis dari ruang vektor . Sehingga dalam hal ini sebenarnya vektor adalah tetap hanya cara menyatakannya yang berubah .

Kita pandang misalnya R^2 . Setiap 2 vektor yang bebas linier selalu dapat dijadikan basis . Vektor-vektor yang membentuk suatu basis disebut vektor-vektor basis dari basis tersebut . Setiap vektor $\in R^2$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linier dari - vektor-vektor basis .

Misalkan $p \in R^2$, terhadap basis $\{ s_1, s_2 \}$ adalah $p = a_1 s_1 + a_2 s_2$, sedang terhadap basis lain yaitu $\{ t_1, t_2 \}$ adalah $p = b_1 t_1 + b_2 t_2$.

Dikatakan : Koordinat t adalah $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ relatif terhadap basis $\{ s_1, s_2 \}$ dan $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ relatif terhadap basis $\{ t_1, t_2 \}$



$$p = a_1 s_1 + a_2 s_2$$
$$= b_1 t_1 + b_2 t_2$$

Secara abstrak dapat dirasakan bahwa terdapat suatu transformasi $R^2 \longrightarrow R^2$ sebagai akibat perubahan basis $\{ s_1, s_2 \}$ menjadi $\{ t_1, t_2 \}$, dimana salah satunya adalah $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

Selama ini selalu menggunakan basis da - sar yang disebut basis natural , disingkat $\{ e_i \}$ dengan vektor-vektor basis :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk R^n , basis naturalnya terdiri atas n vektor-vektor

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots , \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Vektor-vektor tersebut saling tegak lurus dan masing-masing panjangnya = 1 satuan , disebut juga basis orthogonal .

Contoh :

Koordinat vektor $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ relatif terhadap basis $\{ e_i \}$. Kalau dilakukan pergantian basis ke basis $\{ f_i \}$: $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

maka berlaku : $4 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}$

diperoleh : $\left.\begin{aligned} 4 &= a \\ 5 &= a + 2b \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$

artinya $\begin{bmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ adalah koordinat vektor v relatif terhadap $\{ f_i \}$.

DEFINISI II.10 :

Misal $\{ e_i \}$ adalah basis natural dan $\{ f_i \}$ basis yang lain dari R^n , dimana berlaku :

$$f_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}e_n$$
$$f_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}e_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{nn}e_n$$

$$(f_1|f_2|\cdots\cdots|f_n) =$$

$$(e_1|e_2|\cdots\cdots|e_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriks } P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks TRANSISI dari pergantian basis lama $\{e_i\}$ menjadi basis baru $\{f_i\}$.
Ditulis pula $P = P_e^f$

Jelas karena $\{f_i\}$ basis , maka bebas linier sehingga matriks P mempunyai invers , $P^{-1} = Q$ berarti : $(e_1|e_2|\cdots\cdots|e_n) = (f_1|f_2|\cdots|f_n)Q$ sehingga Q merupakan matriks transisi dari pergantian basis lama $\{f_i\}$ menjadi basis baru $\{e_i\}$.

TEOREMA II.11 :

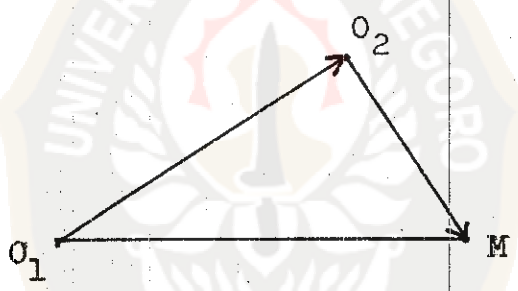
Jika M suatu titik di R^n berkoordinat : $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ relatif terhadap basis lama

$\{ e_i \}$ dan berkoordinat $(y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_n)$ relatif terhadap basis baru $\{ f_i \}$ yang titik awalnya (titik nol) adalah $O_2(c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n)$ maka berlaku :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

P adalah matriks transisi .

BUKTI :



$$\begin{aligned} O_1M &= O_1O_2 + O_2M \\ &= x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_ne_n \\ &= c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots\ldots + c_ne_n + y_1f_1 + y_2f_2 + \ldots\ldots \\ &\quad \ldots\ldots + y_ne_n \end{aligned}$$

Secara matriks :

$$(e_1 | e_2 | \ldots\ldots\ldots\ldots | e_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$(e_1 | e_2 | \ldots\ldots | e_n) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + (f_1 | f_2 | \ldots\ldots | f_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Kalau P matriks transisi , berarti :

Sehingga :

$$(e_1\ e_2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ e_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$(e_1\ e_2\ \ldots\ldots\ e_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} + (e_1\ e_2\ \ldots\ldots\ e_n)\ P\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

Jadi :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} + P\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

<u>TEOREMA II.12 :</u>

Vektor v berkoordinat $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$ relatif terhadap basis $\{e_i\}$, $(y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_n)$ relatif terhadap basis baru $\{f_i\}$, maka berlaku :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

Atau :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

P adalah matriks transisi pergantian basis dari $\{e_i\}$ ke $\{f_i\}$.

II.4.3 TRANSFORMASI VEKTOR LINIER :

DEFINISI II.11 :

Suatu transformasi $T : V \longrightarrow W$ dari ruang vektor V ke ruang vektor W . Transformasi T disebut transformasi vektor linier bila dipenuhi :

(i). Untuk setiap $v_1, v_2 \in V$, maka :

$$T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$$

(ii). Untuk aetiap $v \in V$ dan skalar a berlaku : $a\,T(v) = T(av)$

Pandang $T : R^n \longrightarrow R^m$ suatu transformasi vektor linier .

$\{e_i\}$, $i = 1,2,\ldots\ldots,n$, basis natural dari R^n

$\{f_i\}$, $i = 1,2,\ldots\ldots,m$, basis natural dari R^m

$T(e_1), T(e_2), \ldots\ldots\ldots, T(e_n)$ adalah vektor-vektor linier di R^m , sehingga merupakan kombinasi linier dari $\{f_i\}$.

Misal :

$$T(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m1}f_m$$

$$T(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m2}f_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}f_m$$

DEFINISI II.12 :

Transpose dari matriks koefisien diatas :

$$[T]_e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & & & a \end{bmatrix}$$

disebut matriks REPRESENTASI dari transformasi linier T , singkatnya matriks transformasi dari T , relatif terhadap basis-basis natural $\{e_i\}$ dan $\{f_i\}$.

Catatan :

Kalau matriks tersebut di tulis secara kolom menjadi :

$$\left[T(e_1) | T(e_2) | \ldots\ldots\ldots\ldots | T(e_n) \right] =$$

$$\left[f_1 | f_2 | \ldots\ldots | f_m \right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \left[T \right]_e$$

Jadi kolom-kolom dari matriks transformasi merupakan peta dari vektor-vektor basis . Mencari matriks transformasi tak lain dari pada mencari peta dari vektor basis .

TEOREMA II.13 :

Bila $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}$ vektor $\in R^n$.

Suatu transformasi linier dengan $[T]_e$ matriks transformasi relatif terhadap basis natural , maka berlaku :

$$w = T(v) = T\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [T]_e v$$

BUKTI :

$$T\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots\cdots + T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= v_1\, T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_2\, T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + v_n T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= v_1 T(e_1) + v_2 T(e_2) + \cdots\cdots + v_n T(e_n)$$

$$= \left[T(e_1) \middle| T(e_2) \middle| \cdots\cdots \middle| T(e_n) \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= [T]_e v$$

Contoh :

$T : R^2 \longrightarrow R^2$ dimana diketahui :

$(2 , 1) \xrightarrow{T} (5 , -2)$

$(-1 , 1) \xrightarrow{T} (-1 , 1)$

Maka untuk menentukan transformasi T tersebut akan dicari matriks transformasi , ditulis :

$$\left.\begin{array}{l} T(2 , 1) = (5 , -2) \\ T(-1 , 1) = (-1 , 1) \end{array}\right\}$$

$$2T(1\ ,\ 0) + 1T(0\ ,\ 1) = (5\ ,\ -2)$$
$$-1T(1\ ,\ 0) + 1T(0\ ,\ 1) = (-1\ ,\ 1)\ -$$

$$3T(1\ ,\ 0) = (6\ ,\ -3)$$

Jadi $T(1\ ,\ 0) = \frac{1}{3}(6\ ,\ -3)$

$$= (2\ ,\ -1)$$

Maka : $2T(1\ ,\ 0) + T(0\ ,\ 1) = (5\ ,\ -2)$

$$2(2\ ,\ -1) + T(0\ ,\ 1) = (5\ ,\ -2)$$

$$T(0\ ,\ 1) = (5\ ,\ -2) - (4\ ,\ -2)$$
$$= (1\ ,\ 0)$$

Jadi matriks $[T]^e_e = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

dan rumus transformasinya :

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [T]^e_e \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

atau : $T(x_1\ ,\ x_2) = (2x_1 + x_2\ ,\ -x_1)$

DEFINISI II.13 :

Suatu transformasi $f : A \longrightarrow B$ disebut satu-satu atau injektif jika setiap elemen yang berbeda dari A mempunyai kawan yang - berbeda , yaitu jika $a \neq a'$ maka $f(a) \neq f(a')$ atau jika $f(a) \neq f(a')$ maka $a \neq a'$

DEFINISI II.14 :

Suatu transformasi $f : A \longrightarrow B$ disebut onto atau surjektif , jika setiap $b \in B$ adalah kawan dari $a \in A$.

Suatu transformasi dimana memenuhi satu-satu dan onto atau injektif dan surjektif disebut bijektif .

DEFINISI II.15 :

Suatu transformasi linier $f : V \longrightarrow U$ disebut suatu isomorphisma jika transformasinya satu-satu .

Ruang vektor V dan U disebut isomorphik jika isomorphisma dari V ke U .

TEOREMA II.14 :

Misal V dan U adalah ruang vektor-ruang vektor diatas suatu field K . Misalnya $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ basis dari V dan misal $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ adalah vektor-vektor dalam U . Maka ada transformasi linier tunggal $F : V \longrightarrow U$ sedemikian sehingga $F(v_1) = u_1$, $F(v_2) = u_2$, ... , $F(v_n) = u_n$

BUKTI :

Ada 3 langkah untuk membuktikannya :

(i). Didefinisikan suatu transformasi :

$F : V \longrightarrow U$ sedemikian sehingga :

$F(v_i) = u_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$.

Misal $v \in V$. $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ basis basis dari V , ada skalar-skalar tunggal $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in K$, untuk mana :

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots\ldots + a_n v_n$

Didefinisikan $F : V \longrightarrow U$ dengan

$F(v) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots\ldots + a_n u_n$

untuk $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$, maka :

$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \ldots\ldots + 1v_i + \ldots + 0v_n$

$F(v_i) = 0u_1 + \ldots\ldots + 1u_i + \ldots\ldots + 0u_n$

$F(v_i) = u_i$

(ii). Anggap $v = a_1v_1+a_2v_2+ \ldots\ldots\ldots + a_nv_n$

$w = b_1v_1+b_2v_2+ \ldots\ldots\ldots + b_nv_n$

maka :

$v + w = (a_1+b_1)v_1 + \ldots\ldots\ldots + (a_n+b_n)v_n$

Untuk setiap $k \in K$,

$kv = ka_1v_1+ka_2v_2+ \ldots\ldots\ldots + ka_nv_n$

Dari definisi transformasi F ,

$F(v) = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nu_n$

$F(w) = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots\ldots\ldots + b_nu_n$

Maka :

$F(v + w) = (a_1+b_1)u_1 + \ldots\ldots + (a_n+b_n)u_n$

$= (a_1u_1+ \ldots\ldots\ldots\ldots + a_nu_n) +$

$(b_1u_1+ \ldots\ldots\ldots\ldots + b_nu_n)$

$F(v + w) = F(v) + F(w)$

$F(kv) = k\ (a_1u_1+a_2u_2+ \ldots\ldots + a_nu_n)$

$= k\ F(v)$

Jadi F linier .

(iii). Misal ada $G : V \longrightarrow U$ yang linier

dan $G(v_i) = u_i$, $i = 1,2,\ldots\ldots,n$.

Jika $v = a_1v_1+a_2v_2+ \ldots\ldots\ldots\ldots + a_nv_n$

maka :

$G(v) = G(a_1v_1+a_2v_2+ \ldots\ldots\ldots\ldots + a_nv_n)$

$= a_1G(v_1)+a_2G(v_2)+ \ldots\ldots + a_nG(v_n)$

$= a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nu_n$

$G(v) = F(v)$

Karena $G(v) = F(v)$ untuk setiap $v \in V$, maka : $G = F$. Jadi F adalah tunggal .

II.4.4 RUANG PETA DAN RUANG NOL :

DEFINISI II.16 :

Misal $F : V \longrightarrow U$ suatu transformasi linier , maka : $Im(F) = \{ u \in U : F(v) = u$, untuk $v \in V \}$, adalah suatu himpunan bagian dari U , disebut RUANG PETA (image) dari transformasi linier F .

Misal $F : V \longrightarrow U$ suatu transformasi linier , maka : $Ker(F) = \{ v \in V : F(v) = 0 \}$, adalah suatu himpunan bagian dari V , disebut RUANG NOL (kernel) dari transformasi linier F .

TEOREMA II.15 :

Misal $F : V \longrightarrow U$ suatu transformasi linier , maka Im (F) adalah ruang bagian dari U dan Ker(F) adalah ruang bagian dari V .

TEOREMA II.16 :

Bila V berdimensi berhingga dan misal :
$F : V \longrightarrow U$ suatu transformasi linier
maka : $\dim V = \dim (Ker(F)) + \dim (Im(F))$.

DEFINISI II. 17 :

Suatu transformasi linier $F : V \longrightarrow U$ disebut singular jika setiap kawan dari vektor yang tidak nol dibawah F adalah nol . Yaitu jika terdapat $v \in V$, $v \neq 0$ dan $F(v) = 0$

Suatu transformasi linier $F : V \longrightarrow U$ disebut nonsingular jika $0 \in V$ ditransformasikan ke $0 \in U$ atau $\text{Ker}(F) = \{0\}$.

TEOREMA II.17 :

Transformasi linier $F : V \longrightarrow U$ adalah homomorphisma jika dan hanya jika F nonsingular.

TEOREMA II.18 :

Misal V dan U ruang vektor diatas field K. Maka koleksi dari semua transformasi linier dari V ke U dengan hukum adisi dan multiplikasi skalar adalah suatu ruang vektor diatas K. Ruang ini dinamakan Hom (V,U). Dalam hal ini V dan U berdimensi berhingga. Misal dim V = m dan dim U = n, maka : dim Hom (V,U) = mn.