BAB III

TRANSFORMASI FOURIER DIMENSI DUA

3.1. Definisi :

Transformasi Fourier dari suatu fungsi dua dimensi $f(x,y)$ dinyatakan sebagai :

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i(ux+vy)}\, dx\, dy$$

dimana x dan y adalah dua variabel bebas, sedangkan infers transformasi Fouriernya berbentuk :

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(U,V)\, e^{i(ux+vy)}\, du\, dv$$

3.2. Sifat-sifat transformasi Fourier dimensi dua

Teorema 9 (Sifat similar)

Jika fungsi $f(x,y)$ mempunyai transformasi Fourier $F(u,v)$ maka (ax,by) mempunyai transformasi Fourier yang berbentuk :

$$(ab)^{-1} \quad F\left(\frac{U}{a}, \frac{V}{b}\right)$$

Bukti :

$$F(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i(ux+vy)}\, dx\, dy$$

maka transdormasi Fourier dari fungsi yang berbentuk $f(ax, by)$ adalah :

$$F(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax,by)\, e^{-i(ux + Vy)}\, dx\, dy$$

$$F(U,V) = \frac{1}{ab}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax,by)\, e^{-i\left(\frac{u}{a}\, ax + \frac{V}{b}.\, by\right)}$$

$$.\, d(ax)\, d(by)$$

$$= \frac{1}{ab}\, F\left(\frac{U}{a}, \frac{V}{b}\right) = (ab)^{-1}\, F\left(\frac{U}{a}, \frac{V}{b}\right)$$

Contoh : Diketahui $f(ax,by) = (2x + 3y)$. $a = 2$

$f(2x,3y) = (2x+3y)$ $b = 3$

Apakah sifat similar berlaku ?

Jawab : $F(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (2x+3y)\, e^{-1(ux + uy)}\, dx\, dy$

$$= \frac{1}{(2)\,(3)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (2x + 3y)\, e^{-i\left(\frac{U}{2}.2x + \frac{V}{3}.3y\right)}\, d(2x)\, d(3y)$$

$$= \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (2x + 3y)\, e^{-i\left(\frac{U}{2}.2x + \frac{V}{3}.3y\right)}\, d(2x).d(3y)$$

$$= (6)^{-1}\, F\left(\frac{U}{2}, \frac{V}{3}\right)$$. terbukti similar

Teorema 10 (Sifat pejumlahan)

Jika $F(U,V)$ dan $G(U,V)$ masing-masing adalah transformasi Fourier dari fungsi $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ maka transformasi Fourier dari $f(x,y) + g(x,y)$ adalah $F(U,V) + G(U,V)$

Bukti :

$$F(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i(Ux + Vy)}\, dx\, dy$$

$$G(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, e^{-i(Ux + Vy)}\, dx\, dy$$

misalkan $h(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$

maka transformasi Fourier dari fungsi $h(x,y)$

$$H(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\, e^{-i(Ux + Vy)}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) + g(x,y)\, e^{-i(Ux + Vy)}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i(Ux + Vy)}\, dx\, dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, e^{-i(Ux + Vy)}\, dx\, dy$$

$$= F(U,V) + G(U,V).$$

Contoh : Diketahui: $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = 2x + y \\ g(x,y) = x + 2y \end{array}\right\}$ $h(x,y) = 3x + 3y$

Apakah sifat penjumlahan berlaku ?

Jawab :

$$F(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (2x + y)\, e^{-i(Ux + Vy)}\, dxdy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (2x + y)\, e^{-i\left(\frac{U}{2}.2x + V.y\right)}\, d(2x)\, dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-s}^{s}\int_{-s}^{s} (2x + y)\, e^{-i\left(\frac{U}{2} .2x + V.y\right)}\, d(2x)\, dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\ F\left(\frac{U}{2}, V\right)$$

$$= (2)^{-1}\ F\left(\frac{U}{2}, V\right)$$

$$G(U,V) = \int_{-s}^{s}\int_{-s}^{s} (x + 2y)\, e^{-i(Ux + Vy)}\, dx\, dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-s}^{s}\int_{-s}^{s} (X + 2y)\, e^{-i\left(Ux + \frac{V}{2} .2y\right)}\, dx\, d(2y)$$

$$= \tfrac{1}{2}\ G\left(U, \frac{V}{2}\right)$$

$$H(U,V) = \int_{-s}^{s}\int_{-s}^{s} (3x + 3y)\, e^{-i(Ux + Vy)}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-s}^{s}\int_{-s}^{s} (2x + y) + (X + 2y)\ e^{-i(Ux + Vy)}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-s}^{s}\int_{-s}^{s} (2x + y)\, e^{-i(Ux + Vy)}\, dx\, dy +$$

$$(X + 2y)\, e^{-i(ux + Vy)}\, dx\, dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-s}^{s}\int_{-s}^{s} (2x + y)\, e^{-i\left(\frac{U}{2} .2x + Vy\right)}\, d(2x)\, dy$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int_{-s}^{s}\int_{-s}^{s} (X + 2y)\, e^{-i\left(Ux + \frac{1}{2}.2y\right)}\, dx\, d(2y)$$

$$H(U,V) = \tfrac{1}{2}\ F\left(\frac{U}{2}, V\right) + \tfrac{1}{2}\ G\left(U, \frac{V}{2}\right)$$

Teorema 11 (sifat s itf)

Jika F (U,V) adalah trnasformasi Fourier dari F(x,y) maka transformasi Fourier dari fungsi f (x-a,y-b) adalah :

$$e^{-i\,(au + by)}\ F(U,V)$$

Bukti : $F(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i\,(Ux + Vy)}\, dx\, dy$

transformasi Foutier dari fungsi f (x-a,y-b)

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a,\ y-b)\ e^{-i\,(Ux + Vy)}\ dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a,\ y-b)\ e^{-i\,(U(x-a + a) + V(y-b + b))}\ d(x-a)\,d(y-b)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a,y-b)\ e^{-i\ U(x-a)+V(y-b)}\,.\,e^{-i(au + vy)}\ d(x-a).d(y-b)$$

$$= e^{-i\,(au+bv)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a,y-b)\ e^{-i\ u\,(x-a) + V\,(y-b)}\ d(x-a)a(y-b)$$

$$= e^{-i\,(au + bv)}\ F(U,V)$$

Contoh : Diketahui : $f(X-1,y-1) = x^2-2x+1+y^2-2y+1$

$$= (x-1)^2 + (y-1)^2$$

Apakah sifat sitf berlaku ?

Jawab:

$$F(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x^2-2x+1+y^2-2y+1)\ e^{-i\,(Ux+Vy)}\ dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{(x-1)^2 + (y-1)^2\right\} e^{-i\,(Ux+Vy)}\ dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \{ (x-1)^2 + (y-1)^2 \} \, e^{-i \; 4(x-1+1) \; +V(y-1+1)} \, d(x-1)d(y-1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \{(x-1)^2 + (y-1)^2\} e^{-i(U(x-1) \; + \; V(y-1)} \; e^{-i(U+V)} \, d(x-1)d(y-1)$$

$$= \; e^{-i(U+V)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \{(x-1)^2 + 9y-1)^2\} e^{-i \; U(x-1)+V(y-1)}$$

$$d \; (x-1) \; d \; (y-1)$$

$$= \; e^{-i \; (U + V)} \; F(U, V)$$

Teorema 12 (Sifat Modulasi)

Jika transformasi Fuosiler dari f (x,y) Cos Wx adalah $\frac{1}{2}$ F(U +W, V) + $\frac{1}{2}$ F (U -W, V), F (U,V) adalah trans - formasi Fourier dari fungsi f (x,y)

Bukti :

$$F(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, e^{-i \; (\; Ux + Vy \;)} \, dx \, dy$$

$$\text{Cos } WX = \frac{e^{iwx} + e^{-iwx}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \text{ Cos } wx \; e^{-i \; (Ux + Vy)} \, dx \, dy \; =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, e^{iwx} \; e^{-i \; (\; Ux + V \, y \;)} \, dx \, dy \; +$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, e^{-iwx} \; e^{-i \; (Ux + Vy)} \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ e^{-i[(U-w)x + Vy]}\ ax\ dy\ +$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ e^{-i[(U+W)x + Vy]}\ dx\ dy$$

$$= \frac{1}{2} F(U - W, V) + \frac{1}{2}(U + W, V)$$

Contoh :

1. Diketahui :

Fungsi $Z = Xy$

$X = r \cos Q$

$Y = r \sin Q$

Ditanyakan : Apakah sifat modulasi berlaku

Jawab :

$$F(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ e^{-i(Ux + Vy)}\ dx\ dy$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial Q} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial Q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos Q & -r \sin Q \\ \sin Q & r \cos Q \end{vmatrix} = r$$

$$F(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r^2 \sin Q \cos Q\ e^{ir(U\cos Q + V \sin Q)}(r)\,dr\,dQ$$

$$F(U + W, V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r^3 \sin Q \cos Q\ e^{-ir(U \cos Q + W \cos Q + V \sin Q)}\ dr.\ dQ$$

$$f(x,y)\cos wx = xy \cos wx = XY\left(\frac{e^{iwx} + e^{-iwx}}{2}\right)$$

$$= r^2 \sin Q \cos Q\left(\frac{e^{iwx} + e^{-iwx}}{2}\right)$$

transformasi Fourier dari f (x,y) Cos wx adalah

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r^2 \sin Q \cos Q \left(\frac{e^{iwx} + e^{-iwx}}{2}\right) e^{-ir(u \cos Q + V \sin Q)}$$

$$r\, dr\, dQ$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r^3 \sin Q \cos Q \; e^{iwx} \; e^{-ir(U \cos Q + V \sin Q)} dr\, dQ +$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r^3 \sin Q \cos Q \; e^{-iwx} \; e^{-ir(U \cos Q + V \sin Q)} dr\, dQ$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r^3 \sin Q \cos Q \; e^{-ir(U \cos Q - W \cos Q + V \sin Q)} dr\, dQ +$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r^3 \sin Q \cos Q \; e^{-ir(U \cos Q + W \cos Q + V \sin Q)} \; dr\, dQ$$

$$= \frac{1}{2} F(U + W, V) + \frac{1}{2} F(U - W, V)$$

Jadi sifat modulasi berlaku

Definisi 3: Konfulusi dari dua buah fungsi dua dimensi f (x,y) dan g (x,y) didefinisikan f * g =

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\, g(x-x', y-y')\, dx'\, dy'$$

Teorema 13 (Sifat Konfulusi)

Apabila F (U,V) dan G (U,V) masing-masing adalah transformasi Fourier dari fungsi f (x,y) dan g (x,y) maka F (U,V) $\cdot$ G(U,V) adalah transformasi Fourier dari f (x,y) * g (x,y)

Bukti : $F(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i(Ux+Vy)}\, dx\, dy$

$G(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, e^{-i(Ux+Vy)}\, dx\, dy$

maka : $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) * g(x,y)\, e^{-i(Ux+Vy)}\, dx\, dy$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\, g(x-x',y-y')\, dx'\, dy'\, e^{-i(Ux+Vy)}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y') \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x-x',y-y')\, e^{-i(Ux+Vy)}\, dx dy . dx' dy'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y') \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x-x',y-y')\, e^{-i\left[U(x-x'+x') + V(y-y'+y')\right]}\, dx\, dy\, dx'\, dy'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y') \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x-x',y-y')\, e^{-i\left[U(x-x') + V(y-y')\right]}\, e^{-i\left[Ux' + Vy'\right]}\, dx\, dy\, dx'\, dy'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\,(x',y')\; e^{-i\,(Ux' + Vy')} \qquad g\,(x-x',y-y').$$

$$e^{-i \quad U\,(x-x') + V\,(y - y')} \quad dx\,dy \quad dx'\,dy'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\,(X',y') \quad e^{-i\,(Ux' + Vy')} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g\,(\,x - x',\, y - y'\,).$$

$$e^{-i\,\left[\,U\,(x-x') + V\,(y-y')\right]} \quad d\,(x- x')\,d\,(\,y-y'\,)dx'\,dy'$$

$$= F\;(\,U,V\,)\;.\;G\;(\,U,V\,)$$

Maka :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\,(x,y) * g\,(g\,x,y)\; e^{-i\,(Ux + Vy)}\; dx\,dy = F\,(U,V).G\,(U,V)$$

Contoh : Diketahui : $f\,(x,y) = 4\,x + 2\,y$

$g\,(\,x,y\,) = 2x + 3\,y$

Ditanyakan : Apakah sifat Kanfolosi berlaku ?

Jawab :

$$F\,(\,U,V\,) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (4x + 2y)\; e^{-i\,(\,Ux + Vy\,)}\; dx\,dy$$

$$G\,(U,V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (2x + 3y\,)\; e^{-i\,(\,U\,x + Vy\,)}\; d\,x\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (4\,x' + 2y'\,)\,(\,2x + 3y\,)\; dx'\,dy'\; e^{-i\,(Ux + Vy)}\; dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (4\,x' + 2y'\,) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (2\,x + 3\,y\,)$$