BAB. II

TRANSFORMASI FOURIER DIMENSI SATU

2.1. Definisi dan theorema

Definisi :

Apabila $f(x)$ adalah suatu fungsi dari x dimana $-\infty < x < \infty$ dan $f(x)$ kontinu atau kontinu bertahap. Maka transformasi Fourier dari $f(x)$ dengan notasi $F(p)$, $-\infty < p < \infty$ didefinisikan sebagai :

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$$

Contoh :

Diketahui $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 0 < x < 1 \\ 0 & \end{cases}$

Ditanyakan transformasi fourier $f(x)$

Jawab :

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$$

$$= \int_{0}^{1} 1 \cdot e^{-ipx}\, dx$$

$$= \frac{1}{ip} \int_{0}^{1} e^{-ipx}\, d(ipx)$$

$$= -\frac{1}{ip}\, e^{-ipx} \Big|_{0}^{1}$$

$$= - \frac{1}{ip} \left(e^{-ip} - e^{0} \right)$$

$$= \frac{i}{p} \left(e^{-ip} - 1 \right)$$

2.2. Kontinuitas tranformasi Fourier.

Perhatikan suatu bentuk integral seperti dibawah ini

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\, dx \text{ .... } (1)$$

Fungsi f(x) dalam persamaan (1) dapat juga berbentuk fungsi komplek seperti $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ dan menurut definisi transformasi Fourier, f(x) suatu fungsi kontinu atau kontinu bertahap.

Menurut suatu theorema dalam integral, yang menyatakan bahwa :

"Jika $\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ konvergen, maka $\int_{a}^{\infty} f(x)$ akan konvergen pula, maka dalam bentuk (1).

Diatas akan konvergen jika :

$$\int_{0}^{\infty} f(x) \quad dx \text{ ada.}$$

Arti dari $|f(x)|$ dalam f(x) berharga komplek adalah :

$$|f(x)| = \left[f_1(x)^2 + f_2(x)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Marilah kita tinjau suatu fungsi $\Psi(p)$ dimana :

$$\Psi(p) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-ipx}\, dx\,, \quad -\infty < p < \infty$$

Fungsi $\Psi(p)$ akan konvergen untuk semua p jika

$\int_0^\infty |f(x)|\, dx$ ada.

$$\text{karena } \left| f(x)\, e^{-ipx} \right| = |f(x)|\,|e^{-ipx}|$$

$$= |f(x)|\,|\cos px - i \sin px|$$

$$= |f(x)|\,(\cos^2 px + \sin^2 px)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |f(x)|$$

$$\text{Jadi } \int_0^\infty |f(x)\, e^{-ipx}|\, dx = \int_0^\infty |f(x)|\, dx$$

Untuk menunjukkan fungsi $\Psi(p)$ kontinu, pertama-tama akan kita ubah dahulu bentuk fungsi $\Psi(p)$ sebagai bentuk deret tak hingga.

$\Psi(p) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-ipx}\, dx$ dapat ditulis dengan

$$\Psi(p) = \sum_{n=1}^{\infty} gn(p)$$

$$gn(p) = \int_{n-1}^{n} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$$

atau $\Psi(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$

karena $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)\, e^{-ipx}\, dx = \int_{0}^{1} f(x)\, c^{-ipx}\, dx +$

$\int_{1}^{2} f(x)\, e^{-ipx}\, dx + \int_{2}^{3} f(x)\, e^{-ipx}\, dx + \ldots\ldots + \int_{n-1}^{n} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$

$= \int_{0}^{n} f(x)\, e^{-ipx}\, dx.$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{n} f(x)\, e^{-ipx} dx = \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx = \Psi(P)$$

Teorema 1 :

Dalam suatu theorema deret tak hingga yang berbunyi : "Jumlah dari deret yang konvergen uniform dari fungsi-fungsi kontinu adalah kontinu" atau dengan perkataan lain, jika setiap fungsi Un (x) kontinu untuk $a \leqslant x \leqslant b$ maka demikian juga halnya dengan $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Un(x)$ dimana $f(x)$ adalah deret yang konvergen uniform untuk $a \leqslant x \leqslant b$.

Bukti :

ambil $\varepsilon > 0$ dan titik x_o, dalam interval (a,b).

akan dibuktikan ada δ sedemikian hingga

$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$ dimana $|x - x_o| < \delta$

Pilih suatu bilangan bulat positif N sedemikian hingga

$|f_n(x) - f(x)| < 1/3$, $a \leq x \leq b$, $n \geq N$ .... (2)

dimana $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots\ldots + U_n(x)$

hal ini mungkin terjadi karena $S_n(x)$ konvergen uniform. $S_n(x)$ adalah jumlahan hingga dari fungsi-fungsi kontinu, maka fungsi $S_n(x)$ juga kontinu karena itu dapat dipilih $\delta \ni$

$|S_n(x) - S_n(x_o)| < 1/3$ untuk $|x - x_o| < \varepsilon$ .....(3)

dari persamaan (2) dapat ditulis :

$|S_N(x) - S_N(x)| < 1/3\ \varepsilon$ dan

$|S_N(x_o) - f(x_o)| < 1/3\ \varepsilon$ maka :

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_o)| &= |f(x) - S_N(x) + S_N(x) - S_N(x_o) \\
&\quad + S_N(x_o) - f(x_o)| \\
&\leq |f(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - \\
&\quad S_N(x_o)| + |S_N(x_o) - f(x_o)| \\
&\quad 1/3 + 1/3 + 1/3 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

maka $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$

untuk $|x - x_o| < \delta$

terbukti .

Berdasarkan theorema tersebut, akan ditunjukkan fungsi :

$$\Psi(P) = \int_0^\infty f(x) \; e^{-ipx} \, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x) \; e^{-ipx} \, dx \text{ kontinu}$$

a. Fungsi $g_n(P) = \int_{n-1}^{n} f(x) \; e^{-ipx} \, dx$ kontinu dapal p untuk semua P, karena f(x) kontinu dan integral dari fungsi yang kontinu adalah kontinu.

Jika f(x) kontinu sebagian, g_n (P) kontinu juga karena merupakan jumlah dari integral-integral fungsi kontinu.

b. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(P)$ adalah suatu deret yang konvergen uniform untuk semua p. Hal ini dapat ditunjukkan dengan "Weirstass M test ".

Weirstass M test untuk deret konvergen uniform menyatakan : $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ adalah deret dari semua fungsi-fungsi yang terdefinisikan untuk suatu himpunan E dari harga - harga X. Jika ada deret dari konstanta-konstanta yang konvergen yaitu $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ sedemikian hingga $|U_n(x)| \leq M_n$.

untuk semua x dalam himpunan, maka $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ konvergen - absolut untuk setiap x dalam himpunan E dan konvergen uniform dalam E.

Contoh untuk Weirstrast - M test

. Tunjukkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergen uniform pada interval $-1 \leq x \leq 1$

Jawab :

$$U_n = \frac{x^n}{n^2} \quad , \quad U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} |x| \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x|$$, deret akan konvergen

untuk $|x| < 1$ dan divergen untuk $|x| > 1$ untuk $x = \pm 1$ deret konvergen karena $\left| \frac{(\pm 1)^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

sedang $1/n^2$ konvergen maka

deret konvergen untuk $-1 \leq x \leq 1$ dan konvergen uniform karena $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq M_n = \frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{konvergen}$$

Dari weirstras - M test diatas maka :

$$\left| g_n(P) \right| \leq \int_{n-1}^{n} \left| f(x)\, e^{-ipx} \right| dx$$

$$= \int_{n-1}^{n} \left| f(x) \right| dx = Mn$$

$\sum_{n=1}^{\infty}$ Mn konvergen, karena $\sum_{n=1}^{\infty} Mn = \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx$

Berarti dari ⓐ dan ⓑ fungsi Ψ (P) adalah suatu deret yang konvergen uniform dari suatu fungsi yang kontinu, Menurut - theorema yang baru lalu, Ψ (P) kontinu untuk semua P .

Hal yang sama berlaku juga untuk $\int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$

$$F(P) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{-ipx}\, dx + \int_{0}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

Kesimpulan : Suatu transformasi Fourier dari fungsi f(x) - akan kontinu untuk semua p jika f(x) kontinu-bertahap dan f(x) integral absolut dari $-\infty$ sampai ∞ .

2.3. Macam-macam Transformasi Fourier.

2.3.1. Transformasi Forier Cosinus.

Jika suatu fungsi f(x) didefinisikan dalam interval

$0 \leq x \leq \infty$ dan jika $\int_0^\infty |f(x)|\, dx < \infty$ maka

transformasi Fourier cosinus $F_c\ (P)$ dan dinyatakan dengan

$$F_c\ (P) = \int_0^\infty \cos px\ f(x)\, dx$$

2.3.2. Transformasi Fourier Sinus.

Jika suatu fungsi f(x) didefinisikan dalam interval

$0 \leq x \leq \infty$ dan jika $\int_0^\infty |f(x)|\, dx < \infty$ maka ada

transformasi Fourier sinus $F_s\ (P)$ dan dinyatakan-dalam

$$F_s\ (P) = \int_0^\infty \sin\ px\ f(x)\, dx$$

2.4. Hubungan fungsi genap dan fungsi ganjil dengan transformasi fourier.

Definisi :

a). Suatu fungsi $E(x)$ dikatakan fungsi genap jika berlaku $E(-x) = E(x)$ untuk setiap x

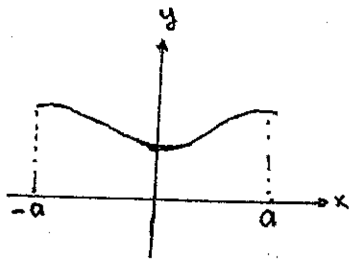
b). Suatu fungsi $G(x)$ dikatakan fungsi ganjil bila berlaku $G(-x) = -G(x)$ untuk setiap x.

Contoh fungsi genap :

a). Buktikan bahwa jika f(x) adalah suatu fungsi genap

maka : $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)\, dx$

Bukti : $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$



$= - \int_{0}^{-a} f(x) dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$

Jika x diganti dengan - x maka :

$\int_{0}^{-a} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(-x)\, d(-x)$

$= - \int_{0}^{a} f(-x)\, dx = - \int_{0}^{a} f(x)\, dx$

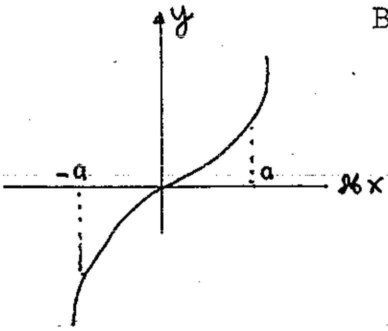
karena f(x) genap.

$$\text{Jadi} \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

Contoh fungsi ganjil :

b). Buktikan jika f(x) ganjil, maka $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$



$$\text{Bukti :} \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

$$= - \int_{0}^{-a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

Jika x diganti dengan - x maka :

$$\int_{0}^{-a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(-x)\ d\ (-x) = - \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

Hal ini dapat terjadi karena f(x) ganjil

$$\text{Jadi} \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = - \int_{0}^{a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

Theorema 2:

Jika suatu fungsi f(x) dapat dinyatakan sebagai fungsi $f(x) = E(x) + G(x)$, maka transformasi fourier dari f(x) adalah :

$$F(p) = 2\int_0^\infty E(x)\cos px\,dx - 2i\int_0^\infty G(x)\sin px\,dx$$

Bukti : $f(x) = E(x) + G(x)$

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E(x) + G(x) \right\} e^{-ipx}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{E(x)+G(x)\}\{\cos px - i\sin px\}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{E(x)\cos px\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} E(x)\sin px\,dx +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\cos px\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\sin px\,dx$$

Menurut sifat dari integral tertentu :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^\infty f(x)\,dx \text{ , jika } f(x) \text{ genap}$$

$$= 0 \qquad \text{, jika } f(x) \text{ ganjil}$$

maka :

a). $\int_{-\infty}^{\infty} E(x)\cos px\,dx = 2\int_0^\infty E(x)\cos px\,dx$ karena

$$E(-x)\cos(-x) = E(x)\cos(px)$$

b). misalkan $k(x) = E(x) \sin px$

$$k(-x) = E(x) \sin(-px)$$

$$= -E(x) \sin px$$

$$= -k(x)$$

Jadi $k(x) = E(x) \sin px$ adalah fungsi ganjil

maka :

$$\int_{-s}^{s} E(x) \sin px \, dx = 0$$

c). misal $G(x) \cos px = g(x)$

$$g(-x) = G(-x) \cos(-px) = -G(x) \,.\, \cos px$$

$$= -g(x)$$

Jadi $g(x) = G(x) \cos px$ fungsi ganjil

maka :

$$\int_{-s}^{s} E(x) \cos px \, dx = 0$$

d). $$\int_{-s}^{s} G(x) \sin px \, dx = 2 \int_{0}^{s} G(x) \sin px \, dx$$

$$G(-x) \sin(-px) = -G(x) - \sin px$$

$$= G(x) \sin px$$

dari a, b, c dan d maka :

$$F(p) = 2\int_0^\infty E(x)\cos px\,dx - 2i\int_0^\infty G(x)\sin px\,dx$$

terbukti

Disini terlihat bahwa apabila f(x) suatu fungsi genap, maka transformasi Fourier dari f(x) adalah transformasi Fourier-cosinus, sedangkan apabila f(x) fungsi ganjil maka transformasi Fouriernya adalah transformasi sinus.

2.5. Sifat-sifat transformasi Fourier dimensi satu.

Theorema 3 (Sifat similar)

Jika suatu fungsi f(x) mempunyai transformasi Fourier F(p), maka fungsi f(ax) mempunyai transformasi Fourier dengan bentuk $(a)^{-1}\, F(p/a)$ dan $a > 0$ real.

Bukti :

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$$

maka transformasi Fourier dari f(ax)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\, e^{-ipx}\, dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\, e^{-i\, p/a . ax}\, d(ax)$$

$$= (a)^{-1}\ F(p/a)$$

terbukti

Contoh : Diketahui : $f(x) = x^2$ pada $[-\infty, \infty]$

Tunjukkan bahwa transformasi Fourier dari

$f(3x)$ adalah $\frac{1}{3}\, F(p/3)$

Jawab :

$f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Jadi f(x) adalah fungsi genap.

$$F(p) = 2 \int_0^{\infty} x^2 \cos px \, dx$$

$$\text{misal } px = q \longrightarrow x = \frac{q}{p}$$

$$pdx = dq \longrightarrow dx = \frac{dq}{p}$$

$$F(p) = 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{q}{p} \right)^2 \cos q \frac{dq}{p}$$

$$= \frac{2}{p^3} \int_0^{\infty} q^2 \cos q \, dq$$

$$F(p/3) = \frac{2}{(p/3)^2} \int_0^{\infty} q^2 \cos q \, dq$$

$$= \frac{2 \cdot 27}{p^3} \int_0^{\infty} q^2 \cos q \, dq$$

$$\frac{1}{3} F(p/3) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 27}{p^3} \int_0^{\infty} q^2 \cos q \, dq$$

$$= \frac{2 \cdot 9}{p^3} \int_0^{\infty} q^2 \cos q \, dq$$

$$f(3x) = (3x)^2$$

$$f(-3x) = (-3x)^2 = f(3x)$$

Jadi $f(3x)$ adalah fungsi genap.

$$F(p) = 2\int_0^\infty (3x)^2 \cos px \, dx$$

$$\text{misal } px = q \longrightarrow x = \frac{q}{p}$$

$$p\,dx = dq \longrightarrow dx = \frac{dq}{p}$$

$$F(p) = 2\int_0^\infty \left(\frac{3q}{p}\right)^2 \cos q \cdot \frac{dq}{p}$$

$$= \frac{2 \cdot 9}{p^3} \int_0^\infty q^2 \cos q \, dq$$

$$= \frac{1}{3} \cdot F\left(p/3 \right)$$

Theorema 4 (Sifat penjumlahan)

Jika fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing mempunyai transformasi Fourier $F(p)$ dan $G(p)$ maka transformasi Fourier dari $f(x) + g(x)$ adalah $F(p) + G(p)$.

Bukti :

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, e^{-ipx} \, dx$$

$$G(p) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, e^{-ipx} \, dx$$

maka transformasi Fourier dari $f(x) + g(x)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f(x) + g(x) \right\} e^{-ipx} \, dx.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-ipx}\ dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ e^{-ipx}\ dx$$

$$= F(p) + G(p)$$

Contoh : Diketahui $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x^3$ pada $[-\infty\ ,\infty]$
Tunjukkan bahwa transformasi Fourier dari $k(x) = x^2 + x^3$ adalah jumlahan dari masing-masing transformasinya.

Jawab :

Transformasi Fourier dari f(x)

$$F(p) = 2 \int_{0}^{\infty} x^2 \cos px\ dx\ ,$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^2 \cos q\ \frac{dq}{p}$$

misal $px = q \longrightarrow x = \frac{q}{p}$

$$p\,dx = dq$$

$$dq = \frac{dq}{p}$$

$$F(p) = \frac{2}{p^3} \int_{0}^{\infty} q^2 \cos q\ dq$$

Transformasi fourier dari g(x)

$$G(p) = -2i \int_{0}^{\infty} x^3 \sin px\ dx$$

Karena g(x) ganjil

$$= -2i \int_0^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^3 \sin q \, \frac{dq}{p} \longrightarrow \quad xp = q, \; x = \frac{q}{p}$$

$$dx \; p = dq$$

$$= \frac{-2i}{p^4} \int_0^{\infty} q^3 \sin q \, dq \qquad dx = \frac{dq}{p}$$

Transformasi Fourier dari $k(x) = x^2 + x^3$

$$K(p) = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + x^3)\, e^{-ipx} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, e^{-ipx} \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \, e^{-ipx} \, dx$$

$$= 2 \int_0^{\infty} x^2 \cos px \, dx - 2i \int_0^{\infty} x^3 \sin px \, dx$$

$$= \frac{2}{p^3} \int_0^{\infty} q^2 \cos q \, dq - \frac{2i}{p^4} \int_0^{\infty} q^3 \sin q \, dq$$

$$K(p) = F(p) + G(p)$$

Theorema : 5 (Sifat sift)

Jika F(p) adalah transformasi Fourier dari fungsi f(x) maka transformasi Fourier fungsi f(x - a) adalah : $e^{-ipa} F(p)$

Bukti :

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x - a)\, e^{-ipx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a)\, e^{-ip(x-a+a)}\, d(x-a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a)\, e^{-ip(x-a)}\, e^{-ipa}\, d(x - a)$$

$$= e^{-ipa} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a)\, e^{-ip(x - a)}\, d(x - a)$$

$$= e^{-ipa}\, F(p)$$

Contoh :

$$\text{Diketahui } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & |x| < 1 \longrightarrow -1 < x < 1 \\ 0 & |x| > 1 \longrightarrow \text{lainnya.} \end{cases}$$

Apakah sifat Sitf berlaku ?

Jawab :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot e^{-ipx}\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2.\varepsilon}\, e^{-ipx}\, dx$$

$$+ \int_{1}^{\infty} 0 \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-1}^{1} e^{-ipx}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2\varepsilon ip} \left(e^{-ipx} \Big|_{-1}^{1} \right)$$

$$= -\frac{1}{2\varepsilon ip} \left(e^{-ip} - e^{-ip} \right)$$

$$= \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2i} \cdot \frac{1}{\varepsilon p}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\ p}{\varepsilon p}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & |x| < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \longrightarrow F(x) = \frac{\sin p}{\varepsilon p}$$

$$g(x) \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & |x - a| < 1 \quad , \quad -1 < x - a < 1 \\ 0 & |x - a| > 1 \quad , \quad x - a \text{ lainnya.} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow F\left[g(x)\right] = e^{-ipa}\ \frac{\sin p}{\varepsilon p}$$

Theorema 6. (Sifat Modulasi)

Jika F(p) adalah transformasi Fourier dari fungsi f(x) maka transformasi Fourier dari fungsi f (x) - cos x adalah $\frac{1}{2}$ F (p - w) + $\frac{1}{2}$ F (p + w)

Bukti :

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx} \cdot dx$$

perhatikan bahwa $\cos wx = \dfrac{e^{iwx} + e^{-iwx}}{2}$

maka $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx \; e^{-ip\,x}\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iwx}\, e^{-ip\,x}\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-iwx}\, e^{-ipx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i(p-w)x}\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i(p+w)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} F(p - w) + \frac{1}{2} F(p + w)$$

Contoh : Diketahui $f(x) = x^2$ pada $[-\infty, \infty]$

Perlihatkan bahwa theorema modulasi berlaku.

Jawab :

$$F(p) = \frac{2}{p^3} \int_{0}^{\infty} q^2 \cos q \, dq$$

$$F\ (p\text{-}w) = \frac{2}{(p-w)^3} \int_0^{\infty} q^2 \cos q \; dq$$

$$F\ (p+w) = \frac{2}{(p+w)^2} \int_0^{\infty} q^2 \cos q \; dq$$

$$\tfrac{1}{2}\ F(p\text{-}w) + \tfrac{1}{2}\ (p+w) = \frac{1}{(p\text{-}w)^3} \int_0^{\infty} q^2 \cos q \; dq \ +$$

$$\frac{1}{(P+w)^3} \int_0^{\infty} q^2 \cos \; dq$$

transformasi Fourier dari fungsi $f(x) = x^2 \cos wx$

$$F\ (p) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cos wx \; e^{-ipx} \; dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \; \frac{(e^{iwx} + e^{-iwx})}{2} \; e^{-ipx} \; dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2\, e^{iwx}\, e^{-ipx} \; dx) + \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-iwx}\, e^{-ipx} \; dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-i(p-w)x} \; dx + \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-i(p+w)x} \; dx$$

$$= \tfrac{1}{2}.2 \int_0^{\infty} x^2 \cos(p-w)\ x \; dx + \tfrac{1}{2}.\ 2 \int_0^{\infty} x^2 \cos(p+w)\ x \; dx$$

$$= \int_0^\infty x^2 \cos(p-w)\ x\ dx + \int_0^\infty x^2 \cos\ (p+w)\ x\ dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{q}{(p-w)}\right)^2 \cos\ q\ \frac{dq}{(p-w)} + \int_0^\infty \left(\frac{q}{(p+w)}\right)^2 \cos\ q\ \frac{dq}{(p+w)}$$

$$= \frac{1}{(p-w)^3} \int_0^\infty q^2 \cos\ q\ dq + \frac{1}{(p+w)^3} \int_0^\infty q^2 \cos\ q\ dq$$

$$= \tfrac{1}{2}\ F\ (p-w) + \tfrac{1}{2}\ F\ (p+w)$$

Definisi 2: konfolusi dari dua buah fungsi f(x) dan g(x) didefinisikan sebagai :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\ g(x-u)\ du$$

atau biasa ditulis :

$$h(x) = f(x) * g(x)$$

Theorema : 7 (sifat Konfolusi)

Jika fungsi f(x) dan g(x) masing-masing mempunyai transformasi Fourier F(p) dan G(p) maka bentuk - transformasi Fourier dari :

f(x) * g(x) adalah F(p) . G(p)

atau :

Dengan kata lain konfolusi dari dua buah fungsi a dalah perkalian dari masing-masing transformasinya.

Bukti :

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$$

$$G(p) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-ipx}\, dx$$

maka :

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{-ipx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f(u)\, g(x-u)\, du \right\} e^{-ipx}\, dx\right.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{-ipx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)\, e^{-ipx}\, dx\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)\, e^{-ip(x-u+u)}\, dx\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)\, e^{-ip(x-u)}\, e^{-ipu}\, d(x-u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-ipu} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)\, e^{-ip(x-u)}\, d(x-u)\, du$$

$$= F(p) \cdot G(p)$$

Contoh :

Diketahui : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 0 \text{ lainnya} \end{cases}$

$g(x) = e^{-|x|}$; $e^{-x} > 0$; $e^{x} < 0$

Ditanyakan : hitung konfolusinya.

<u>Jawab</u> :

$$F(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-ip\,x}\, dx + \int_{0}^{\infty} g(x) \cdot e^{-ipx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x} \cdot e^{-ipx}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, e^{-ipx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-ipx)}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+ip)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{1-ip}\, e^{(1-ip)x} \Big|_{x=-\infty}^{0} + \left(- \frac{1}{1+ip}\, e^{-(1+ip)x} \Big|_{x=0}^{\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{1+ip} - 0 - 0 + \frac{1}{1+ip} = \frac{1+ip + 1-ip}{1 - i^2p^2} = \frac{2}{i+p^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\varepsilon} \; e^{-ipx} \; dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} 0 \, . \; e^{-ipx} \; dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2\varepsilon} \; e^{-ipx} \; dx + \int_{1}^{\infty} 0 \; dx$$

$$= - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-1}^{+1} e^{-ipx} \; dx = - \frac{1}{2 \, \varepsilon ip} \left(e^{-ipx} \Big|_{-1}^{1} \right)$$

$$= \frac{1}{2 \; \varepsilon ip} \left(e^{-ip} - e^{ip} \right) = \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2i} \; . \; \frac{1}{\varepsilon p} = \frac{\sin \, p}{\varepsilon \, p}$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) = g(x - u) \; du$$

$$= \int_{u=-\infty}^{-1} 0 . g(x-u)du + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2\varepsilon} \; g(x-u)du + \int_{1}^{\infty} 0 . \; g(x-u)du$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-1}^{1} e^{-|x-u|} \; du$$

$$F \; \left\{ h(x) \right\} = \frac{\sin \; p}{\varepsilon p} \; x \; \frac{2}{1 + p^2}$$

Theorema : 8. (Sifat turunan)

Apabila suatu fungsi f(x) mempunyai transformasi Fourier F(p), maka transformasi Fourier dari turunan fungsi f(x) adalah ip . F(p)

Bukti : $F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-ipx}\, dx = \lim_{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\, e^{-ipx}\, dx$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}\, e^{-ipx}\, dx - \lim_{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\Delta x}\, e^{-ipx}\, dx$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}\, e^{-ipx(x+\Delta x - \Delta x)}\, d(x+\Delta x)$$

$$- \lim_{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\Delta x}\, e^{-ipx}\, dx$$

$$= \lim_{\Delta x \to} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}\, e^{-ip(x+\Delta x)}\, e^{ip\cdot\Delta x}\, d(x+\Delta x)$$

$$- \lim_{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\Delta x}\, e^{-ipx}\, dx$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}\, e^{-ip(x+\Delta x)}\, e^{ip\cdot\Delta x}\, d(x+\Delta x)$$

$$- \lim_{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\Delta x} e^{-ipx} dx$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(p)\ e^{ipx}}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F\ (p)}{\Delta\ x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(p)\ e^{ipx} - F(p)}{\Delta x}$$

Digunakan dalil Hospit ol, maka :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\ (x)\ e^{-ipx}\ dx = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(p)\ .\ ip\ .\ e^{i\quad x}}{1}$$

$$= F\ (p)\ .\ ip\ .\ e$$

$$= ip\ \ F(p)$$

Contoh : $f\ (x) \longrightarrow F\ (p)$

$f'(x) \longrightarrow ip\ F(p)$

$$\frac{1}{a^2 + x^2} \longrightarrow - \frac{\pi}{a}\ e^{a\ |b|}$$

$$\frac{2\ x}{(a^2 + x^2)^2} \longrightarrow \frac{\pi\ ip\ \ e^{a\ |b|}}{a}$$