BAB I
PENDAHULUAN

Tujuan hasil study pustaka yang berjudul ruang topologi pergandaan ini adalah untuk memperkenalkan ruang topologi pergandaan. Pokok bahasan tentang ruang topologi pergandaan terdapat pada bab IV yang meliputi topologi pergandaan, ruang topologi pergandaan terpisah, ruang topologi pergandaan regular, fungsi kontinu dan fungsi homeomorphism pada ruang topologi pergandaan. Sedangkan pada bab I, II dan III merupakan penunjang.
Tulisan ini diakhiri dengan kesimpulan pada bab V.

Pada bab II dibahas tentang ruang topologi yang meliputi konsep tentang topologi, basis dan subbasis, himpunan tertutup, persekitaran, sistem fundamental pada ruang topologi, penutup,interior, titik limit, exterior dan boundary suatu himpunan serta dibahas tentang ruang topologi terpisah, ruang topologi regular dan ruang bagian.

Pada bab III dibahas tentang pemetaan pada ruang topologi yang meliputi fungsi kontinu, homeomorphism dan initial topologi.

Sedangkan pada bab I dibahas tentang konsep pergandaan kartesius, pengertian dan macam fungsi, rumus-rumus yang berlaku dalam fungsi, proyeksi.

1.1 PERGANDAAN KARTESIUS.

Definisi 1.1.1.

Pergandaan Kartesius dari dua himpunan H dan K yang ditulis $H \times K$ adalah himpunan semua pasangan berurutan (h,k) dengan $h \in H$ dan $k \in K$.

$H \times K = \{ (h,k) \mid h \in H \ \& \ k \in K \}$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 1.1.2.

Dua pasangan berurutan (h_1,k_1) dan (h_2,k_2) dikatakan sama bhb $h_1=h_2$ dan $k_1=k_2$.

Catatan 1.1.1.

Pergandaan kartesius tidak hanya pada dua himpunan saja.

Pergandaan kartesius dari himpunan-himpunan $H_1,H_2,\dots\dots,H_n$ adalah himpunan semua n tupel $(h_1,h_2,\dots\dots,h_n)$ dengan $h_i \in H_i$, $i = 1,\dots,n$ dan urutan diperhatikan.

Rumus - rumus.

Diberikan H , K , M suatu himpunan.

1. $(H \cup K) \times M = (H \times M) \cup (K \times M)$.

   Bukti:

   $$\begin{aligned}(H \cup K) \times M &= \{(a,b) \mid a \in H \cup K \;\&\; b \in M\}.\\ &= \{(a,b) \mid a \in H \vee a \in K \;\&\; b \in M\}.\\ &= \{(a,b) \mid (a \in H \;\&\; b \in M) \vee (a \in K \;\&\; b \in M)\}.\\ &= \{(a,b) \mid a \in H \;\&\; b \in M\} \cup \{(a,b) \mid a \in K \;\&\; b \in M\}.\\ &= (H \times M) \cup (K \times M)\end{aligned}$$

2. $(H \times K) \cup M \neq (H \cup M) \times (K \cup M)$.

   Ini dapat dilihat pada contoh ini.

   Ambil $H = \{h\}$, $K = \{k\}$, $M = \{m\}$.

   Maka $H \times K = \{(h,k)\}$.

   $(H \times K) \cup M = \{(h,k),m\}$.

   $H \cup M = \{h,m\}$.

   $K \cup M = \{k,m\}$.

   $(H \cup M) \times (K \cup M) = \{(h,m) , (m,m) , (h,k)\}$.

   Jadi $(H \times K) \cup M \neq (H \cup M) \times (K \cup M)$.

3. $H \times (K \cup M) = (H \times K) \cup (H \times M)$.

   Bukti :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$H \times (K \cup M) = \{(a,b) \mid a \in H \;\&\; b \in K \vee b \in M\}.$

$= \{(a,b) \mid (a \in H \;\&\; b \in K) \vee (a \in H \;\&\; b \in M)\}.$

$= \{(a,b) \mid a \in H \;\&\; b \in K\} \cup \{(a,b) \mid a \in H \;\&\; b \in M\}.$

$= (H \times K) \cup (H \times M).$

4. $H \times (K \cap M) = (H \times K) \cap (H \times M).$

Bukti :

$H \times (K \cap M) = \{(a,b) \mid a \in H \;\& \in b \in K \cap M\}.$

$= \{(a,b) \mid a \in H \;\&\; b \in K \;\&\; b \in M\}.$

$= \{(a,b) \mid (a \in H \;\&\; b \in K) \;\&\; (a \in H \;\&\; b \in M)\}.$

$= \{(a,b) \mid a \in H \;\&\; b \in K\} \cap \{(a,b) \mid a \in H \;\&\; b \in M\}.$

$= (H \times K) \cap (H \times M).$

5. $(K \cap M) \times H = (K \times H) \cap (M \times H).$

Bukti :

$(K \cap M) \times H = \{(a,b) \mid a \in K \cap M \;\&\; b \in H\}.$

$= \{(a,b) \mid a \in K \;\&\; a \in M \;\&\; b \in M\}.$

$= \{(a,b) \mid (a \in K \;\&\; b \in H) \;\&\; (a \in M \;\&\; b \in H)\}.$

$= \{(a,b) \mid a \in K \;\&\; b \in H\} \cap \{(a,b) \mid a \in M \;\&\; b \in H\}.$

$= (K \times H) \cap (M \times H).$

6. $(H \times K) \cap M \neq (H \cap M) \times (K \cap M).$

Ini dapat dilihat pada contoh :

Ambil $H = \{1, 2\}.$

$M = \{2, 3\}.$

$K = \{3, 4\}.$

Maka : $(H \times K) \cap M = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} \cap \{2,3\}.$

$= \emptyset$

$H \cap M = \{2\}$, $K \cap M = \{3\}$

$(H \cap M) \times (K \cap M) = \{(2, 3)\}$

7. $(H_1 \cap H_2) \times (K_1 \cap K_2) = (H_1 \times K_1) \cap (H_2 \times K_2)$

Bukti :

$(H_1 \cap H_2) \times (K_1 \cap K_2) = \{(a,b) \mid a \in H_1 \cap H_2 \;\&\; b \in K_1 \cap K_2\}.$

$= \{(a,b) \mid a \in H_1 \;\&\; a \in H_2 \;\&\; b \in K_1 \;\&\; b \in K_2\}.$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

$(H_1 \cap H_2) \times (K_1 \cap K_2) = \{(a,b) \mid a \in H_1 \ \& \ b \in K_1 \ \& \ a \in H_2 \ \& \ b \in K_2\}$.

$= \{(a,b) \mid a \in H_1 \ \& \ b \in K_1\} \cap \{(a,b) \mid a \in H_2 \ \& \ b \in K_2\}$.

$= (H_1 \times K_1) \cap (H_2 \times K_2)$

8. $(H_1 \cup H_2) \times (K_1 \cup K_2) = (H_1 \times K_1) \cup (H_1 \times K_2) \cup (H_2 \times K_1) \cup (H_2 \times K_2)$

Bukti :

$(H_1 \cup H_2) \times (K_1 \cup K_2) = \{(a,b) \mid a \in H_1 \cup H_2 \ \& \ b \in K_1 \cup K_2\}$.

$= \{(a,b) \mid (a \in H_1 \ V \ a \in H_2) \ \& \ (b \in K_1 \ V \ b \in K_2)\}$.

$= \{(a,b) \mid (a \in H_1 \ \& \ b \in K_1) \ V \ (a \in H_1 \ \& \ b \in K_2) \ V \ (a \in H_2 \ \& \ b \in K_1) \ V \ (a \in H_2 \ \& \ b \in K_2)\}$.

$= \{(a,b) \mid a \in H_1 \ \& \ b \in K_1\} \cup \{(a,b) \mid a \in H_1 \ \& \ b \in K_2\} \cup \{(a,b) \mid a \in H_2 \ \& \ b \in K_1\} \cup \{(a,b) \mid a \in H_2 \ \& \ b \in K_2\}$

$= (H_1 \times K_1) \cup (H_1 \times K_2) \cup (H_2 \times K_1) \cup (H_2 \times K_2)$.

9. Jika $M \subset H$ dan $N \subset K$ maka $(M \times K) \cap (H \times N) = M \times N$.

Bukti :

Berdasarkan rumus 1.4.1.8, maka

$(M \times K) \cap (H \times N) = (M \cap H) \times (K \cap N)$.

Karena $M \subset H$ maka $M \cap H = M$

Karena $N \subset K$ maka $K \cap N = N$

Sehingga $(M \cap H) \times (K \cap N) = M \times N$.

10. $(H - K) \times M = (H \times M) - (K \times M)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

$(H - K) \times M = \{(a,b) \mid a \in H \ \& \ a \notin K \ \& \ b \in M\}$.

Sedangkan

$(H \times M) - (K \times M) = \{(a,b) \mid (a,b) \in H \times M \ \& \ (a,b) \notin K \times M\}$.

Perhatikan bahwa $(a,b) \notin K \times M$ berarti :

$a \notin K \ \& \ b \notin M$ atau $a \in K \ \& \ b \notin M$ atau $a \notin K \ \& \ b \in M$.

Sehingga:

$$(H \times M) - (K \times M) = \{(a,b) \mid a \in H \ \& \ b \in M \ \& \ a \notin K \ \& \ b \in M\}.$$
$$= \{(a,b) \mid a \in H \ \& \ b \in M \ \& \ a \notin K\}.$$

Jadi syarat keanggotaannya sama.

11. $(H_1 \times H_2) \cap (K_1 \times K_2) = (H_1 \cap K_1) \times (H_2 \cap K_2)$

Bukti :

$$(H_1 \times H_2) \cap (K_1 \times K_2) = \{(a,b) \mid (a,b) \in H_1 \times H_2 \ \& \ (a,b) \in K_1 \times K_2\}.$$
$$= \{(a,b) \mid a \in H_1 \ \& \ b \in H_2 \ \& \ a \in K_1 \ \& \ b \in K_2\}.$$
$$= \{(a,b) \mid a \in H_1 \cap K_1 \ \& \ b \in H_2 \cap K_2\}.$$
$$= (H_1 \cap K_1) \times (H_2 \cap K_2)$$

1.2 HIMPUNAN KUASA DAN KELUARGA HIMPUNAN - HIMPUNAN.

Definisi 1.2.1

Yang dimaksud himpunan kuasa dari himpunan X adalah himpunan semua himpunan - himpunan bagian dari X. Diberi notasi $\mathcal{P}(X)$.

Catatan 1.2.1.

Himpunan kuasa dari X juga disajikan dengan 2^X.

Definisi 1.2.2.

Keluarga himpunan-himpunan atau koleksi himpunan-himpunan adalah suatu himpunan dengan anggota- anggotanya juga himpunan-himpunan.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Demikianlah umpama $\mathcal{P}(X)$ adalah suatu keluarga himpun-himpunan.

Selanjutnya setiap himpunan bagian dari $\mathcal{P}(X)$ merupakan suatu keluarga.

Untuk membedakan para anggota dari suatu keluarga maka sering digunakan himpunan indeks I. Umpamanya $I = \{1,2,3\}$ maka dengan $\{X_i\}_{i \in I}$ dimaksud keluarga $\{X_1, X_2, X_3\}$ dimana X_i adalah himpunan.

Definisi 1.3.3.

Himpunan jumlah D(X), dari suatu keluarga $\{X_i\}_{i \in I}$ dengan $I = \{1,2,3,\ldots\}$ adalah gabungan dari semua anggota-anggotanya.

Jadi $D(X) = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots$

Himpunan D(X) juga ditulis $\bigcup_i X_i$.

Para himpunan X tidak perlu saling asing. Apabila saling asing, maka himpunan jumlah J(X) ditulis sebagai :

$J(X) = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots$

Catatan 1.2.2.

1. Apabila himpunan index I adalah kosong yaitu $I = \emptyset$ maka $\bigcap_i X_i = S$, dimana S = semesta.

   Bukti :

   Diberikan $x \in \bigcap_i X_i$ dengan $i \in I = \{1,2,3,\ldots\}$, yang berarti bahwa $x \in (X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap \ldots)$.

   Selanjutnya : $x \in \bigcap_i X_i$ bhb $(\forall i \in I)$, $x \in X_i$.

   bhb $(\forall i)$. $i \in I \Longrightarrow x \in X_i$

   Ambil x sebarang , i sebarang , $I = \emptyset$.

   $$x \in \bigcap_i X_i \text{ bhb } \underbrace{i \in I = \emptyset \Longrightarrow x \in X_i}_{\text{bernilai benar.}}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

   Pernyataan tersebut bernilai benar untuk setiap x dari semestanya, karena antesedennya adalah salah

($\emptyset$ tidak punya anggota).

Sehingga untuk setiap x berlakulah $x \in \bigcap_i X_i$.

Yaitu $\bigcap_i X_i = S$.

Jadi $\bigcap_i X_i = S$ jika $i \in I = \emptyset$.

2. Demikian juga apabila himpunan index I adalah kosong yaitu $I = \emptyset$ maka $\bigcup_i X_i = \emptyset$.

Bukti :

Diberikan $x \in \bigcup_i X_i$ dengan $i \in I = \{1,2,3,\ldots\}$ yang berarti bahwa $x \in (X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots)$

Selanjutnya $x \in \bigcup_i X_i$ bhb $(\exists i)$ $i \in I$ & $x \in X_i$.

Ambil x sebarang, suatu $i \in I = \emptyset$

$$x \in \bigcup_i X_i \text{ bhb } \underbrace{\text{terdapat } i, \text{ dengan } i \in \emptyset \text{ \& } x \in X_i}_{\text{bernilai salah.}}$$

Pernyataan tersebut bernilai salah karena $\emptyset$ tidak mempunyai anggota.

Sehingga untuk setiap x berlakulah $x \notin \bigcup_i X_i$ yaitu $\bigcup_i X_i = \emptyset$.

Jadi $\bigcup_i X_i = \emptyset$ jika $i \in I = \emptyset$.

1.3 PENGERTIAN FUNGSI.

Definisi 1.3.1.

Suatu fungsi dari X ke Y (atau X sebagai daerah sumber dan Y sebagai daerah kawan) ialah suatu aturan yang setiap anggota dari X menentukan dengan tunggal satu anggota dari Y.

Rumus-rumus.

Definisi 1.3.2.

Dua fungsi f dan g dari X ke Y disebut sama bila dan hanya bila untuk setiap $x \in X$ berlaku $f(x) = g(x)$.

Jadi $f = g$ bhb $(\forall x \in X)$ $f(x) = g(x)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Apabila $A \subset X$ dan $f(A) = \{ f(x) \in Y | x \in A\}$, maka langsung dari definisi ini diturunkan :

Rumus 1.3.1 : $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$.

Sebaliknya jika $M \subset Y$ dan $f^{-1}(M)$ adalah himpunan dari bayangan invers dari anggota M, $f^{-1}(M) = \{x \in X | f(x) \in M\}$, maka langsung dari definisi ini diturunkan :

Rumus 1.3.2 : $M \subset N \Longrightarrow f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$

Sebagai akibat dari definisi tersebut adalah :

Rumus 1.3.3 : $x \in f^{-1}(f(x))$, $f(f^{-1}(y)) = y$

$A \subset f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(M)) = M$

Rumus 1.3.4 : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Bukti :

Karena $A \subset A \cup B$ maka $f(A) \subset f(A \cup B)$.

$B \subset A \cup B$ maka $f(B) \subset f(A \cup B)$.

Sehingga $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ ....(i).

Sekarang misalnya $y \in f(A \cup B)$. Maka ada $x \in A \cup B$ sedemikian sehingga $f(x) = y$.

Karena $x \in A \cup B$ maka $x \in A$ atau $x \in B$.

Sehingga $f(x) \in f(A)$ atau $f(x) \in f(B)$

Karena $f(x) = y$ maka $y \in f(A)$ atau $y \in f(B)$, yang berarti $y \in f(A) \cup f(B)$.

Maka terbukti $y \in f(A \cup B) \Longrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$.

Sehingga $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. ....(ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Rumus 1.3.5 : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

Bukti :

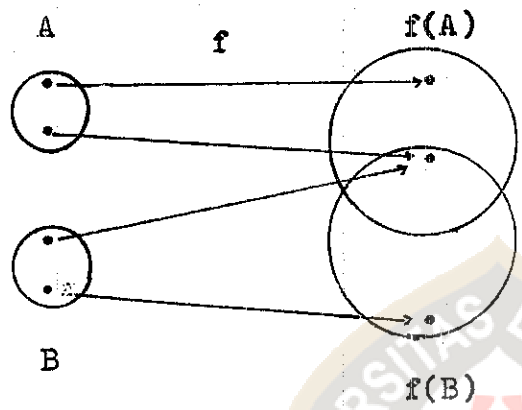
Karena $A \cap B \subset A$ maka $f(A \cap B) \subset f(A)$.

$A \cap B \subset B$ maka $f(A \cap B) \subset f(B)$.

Ada kalanya $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Dapat dilihat diagram dibawah ini, $A \cap B = \emptyset$

sehingga $f(A \cap B) = \emptyset$ sedangkan $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$



Rumus 1.3.6 : $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Bukti:

$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$.

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Sehingga $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in A \vee f(x) \in B\}$.

$= \{x \in X \mid f(x) \in A \cup B\}$.

$= f^{-1}(A \cup B)$

Rumus 1.3.7 : $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Bukti :

$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$.

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Sehingga $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in A \ \& \ f(x) \in B\}$.

$= \{x \in X \mid f(x) \in A \cap B\}$.

$= f^{-1}(A \cap B)$.

Rumus 1.3.8 : $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

Bukti :

$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$.

Sehingga $(f^{-1}(A))^c = \{x \in X \mid \overline{f(x) \in A}\}$.

$= \{x \in X \mid f(x) \notin A\}$.

$= \{x \in X \mid f(x) \in A^c\} = f^{-1}(A^c)$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
http://eprints.undip.ac.id

Rumus 1.3.9 : $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

Bukti :

$$f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A \cap B^c) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B^c)$$
$$= f^{-1}(A) \cap (f^{-1}(B))^c$$
$$= f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$$

MACAM-MACAM FUNGSI

Definisi 1.3.3

1. $f : X \longrightarrow Y$ suryektif bhb $(\forall y \in Y)(\exists x \in X).f(x)=y.$
2. $f : X \longrightarrow Y$ injektif bhb $(\forall x_1, x_2 \in X).f(x_1)=f(x_2)$
$\Longrightarrow x_1 = x_2$
3. Fungsi f yang injektif sekaligus suryektif dinamakan fungsi bijektif.
Jika f bijektif maka $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ disebut fungsi. invers.
4. Bila $f : X \longrightarrow Y.$
$g : Y \longrightarrow Z$
Maka $h : X \longrightarrow Z.$
h adalah komposisi dari f dan g.
$h = g.f$
$= g(f).$
dan $(g.f)^{-1} = f^{-1}.g^{-1}$
5. Diagonal $\triangle \subset X \times X$ adalah fungsi dan dinamakan fungsi identitas pada X .
Dari sini $\triangle(x) = x , \forall x \in X.$

1.4. PROYEKSI.

Untuk setiap $k \in I$ terdapat pr_k yaitu proyeksi ke k dari pergandaan kartesius $\prod_{i \in I} X_i$ into himpunan koordinat X_k ke k yang didefinisikan oleh :

$pr_k \{(x_i \mid i \in I)\} = x_k.$

$pr_k : X_1 \times \ldots \times X_n \longrightarrow X_k$ yang ditentukan oleh :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$z = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Longrightarrow pr_k z = x_k.$$

Catatan 1.4.1.

Proyeksi adalah surjektif tapi tidak bijektif, karena :

$$pr_1 \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\} = \{a,b\} .$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)