BAB III

KONSEP LANJUTAN

## 3.1. POHON DAN POHON PERENTANG

### 3.1.1. POHON (TREE)

Pohon P didefinisikan sebagai suatu graph yang terhubung dan tidak mempunyai siklus.

Contoh pada gambar 16 adalah merupakan pohon dengan 1, 2, 3,dan 4 titik.

gambar 16

Hutan (Forest) H didefinisikan sebagai suatu graph yang tidak mempunyai siklus.

Contoh pada gambar 16 keseluruhannya adalah merupakan hutan atau gabungan dari pohon dengan 1, 2, 3 dan 4 titik adalah merupakan hutan.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa tiap pohon adalah merupakan hutan tetapi tidak sebaliknya.

Theorema 3.

Dalam pohon P pada setiap pasangan titiknya hanya terdapat satu alur.



Bukti :

Diketahui bahwa pohon P adalah merupakan graph terhubung.

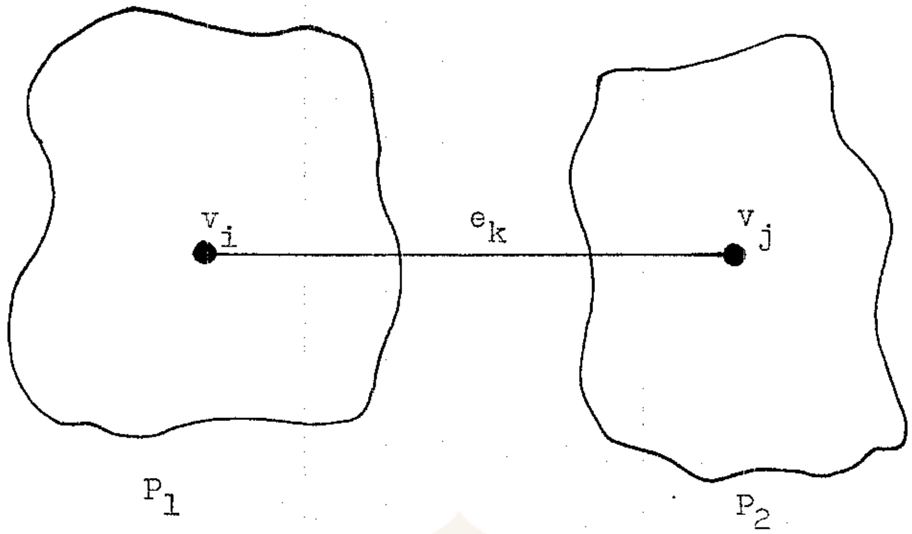
Maka dalam graph terhubung paling sedikit setiap pasangan titiknya dihubungkan oleh satu alur.
Andaikan dalam P terdapat titik a dan titik b yang dihubungkan oleh dua alur, maka dalam P akan terdapat siklus, sebab setiap dua titik yang dihubungkan oleh dua alur akan membentuk siklus.
Sedangkan dalam pohon diketahui tidak boleh terdapat siklus, sehingga pengandaian salah.
Yang benar bahwa didalam pohon P, setiap pasangan titiknya hanya terdapat satu alur saja.
Maka theorema 3, berlaku.

Theorema 4.

Suatu pohon P dengan n titik akan mempunyai n-1 garis

Bukti :

Dari contoh untuk pohon pada gambar 16 telah terbukti bahwa untuk pohon dengan 1, 2, 3 dan 4 titik akan didapat 0, 1, 2 dan 3 garis, dengan demikian theorema berlaku untuk pohon P dengan 1, 2, 3 dan 4 titik.
Selanjutnya akan dibuktikan dengan pohon P yang terdiri atas n titik.
Ambil P dan pisahkan menjadi dua yaitu $P_1$ dengan titik sebanyak $n_1$ dan $P_2$ dengan titik sebanyak $n_2$, sehingga $P_1 \cup P_2 = P$ dan $n_1 + n_2 = n$.
Misalkan dalam P terdapat e garis maka dalam $P_1$ terdapat $e_1$ garis dan dalam $P_2$ terdapat $e_2$ garis dengan $e = e_1 + e_2$.
Pandang gambar 17, dan ambil titik sembarang dalam $P_1$ yaitu $v_i$ dan titik sembarang dalam $P_2$ yaitu $v_j$, dan hubungkan dengan suatu garis yaitu $e_k$.




gambar 17

Misalkan garis $e_k$ dihapus, maka akan terjadi 2 pohon dengan banyaknya titik tetap yaitu $n = n_1 + n_2$, sedangkan banyaknya garis pada P yaitu $e - 1 = e_1 + e_2$ sehingga pada :

$$P_1 : e_1 = n_1 - 1 \quad \ldots\ldots (i)$$

$$P_2 : e_2 = n_2 - 1 \quad \ldots\ldots (ii)$$

dari (i) dan (ii) didapat :

$$e_1 + e_2 = n_1 + n_2 - 2$$

$$e - 1 = n - 2$$

$$\text{maka} \quad e = n - 1 \text{ (terbukti )}$$

Maka terbukti banyaknya garis pada pohon P dengan n titik adalah sebanyak n - 1 garis.

Theorema 5.

Graph G terhubung dengan n titik dan n-1 garis adalah pohon.

Bukti :

Karena G terhubung, maka tinggal membuktikan bahwa G dengan n titik dan n-1 garis tidak mempunyai siklus.

Andaikan G mempunyai satu siklus.

Karena G mempunyai satu siklus, maka terdapat suatu garis misalkan $e_k$, dan jika garis tersebut dihapus maka didapat suatu graph $G-e_k$ aadalah terhubung dan tidak mempunyai siklus, maka merupakan suatu pohon, dengan n titik dan n-2 garis $(n-1-e_k)$.

Kontradiksi sebab diketahui G dengan n titik dan n-1 garis, pengandaian salah.

Yang benar bahwa Graph G tidak mempunyai siklus,maka Graph G terhubung dengan n titik dan n-1 garis adalah Pohon, terbukti.

Theorema 6.

Graph G adalah suatu Pohon <===> G terhubung minimal

Bukti :

Graph G terhubung minimal jika G terhubung dan mempunyai garis minimal.

(===>) Graph G adalah suatu pohon ===> G terhubung minimal.

G adalah pohon maka G terhubung dan mempunyai tidak mempunyai siklus, karena tidak mempunyai siklus maka G adalah terhubung minimal sebab jika dihapus salah satu garis dalam G maka pohon tersebut akan tidak terhubung lagi, dengan demikian sudah tidak merupakan pohon.

Maka terbukti bahwa G terhubung minimal.

(<===) G terhubung minimal ===> graph G adalah Pohon.

G terhubung minimal, maka G harus bebas siklus.

Karena G terhubung dan bebas siklus maka G adalah merupakan pohon. Terbukti.



Dari (===>) dan (<===) maka theorema 6 berlaku.

Theorema 7.

Graph G dengan n titik dan n-1 garis dan tidak mempunyai siklus adalah terhubung.

Bukti :

Andaikan graph G dengan n titik dan n-1 garis serta tidak mempunyai siklus adalah tidak terhubung. Maka G paling sedikit terdapat dua komponen yang setiap komponennya tidak mempunyai siklus.
Ambil G terdiri atas dua komponen yaitu $P_1$ dan $P_2$ , dengan $P_1$ terdiri atas $n_1$ titik dan $e_1$ garis sedangkan $P_2$ terdiri atas $n_2$ titik dan $e_2$ garis (untuk lebih jelasnya lihat gambar 17).
Sekarang ambil titik sembarang $v_i \in P_1$ dan $v_j \in P_2$, jika kedua titik itu dihubungkan oleh suatu garis yaitu $e_k$ maka G + $e_k$ adalah terhubung dan tetap tidak mempunyai siklus atau merupakan pohon dengan n titik dan $e=n-1+e_k=n-1+1=n$ garis.
Kontradiksi, sebab diketahui graph G terdiri atas n titik dan n-1 garis, maka pengandaian salah.
Yang benar adalah terhubung, Terbukti.

---

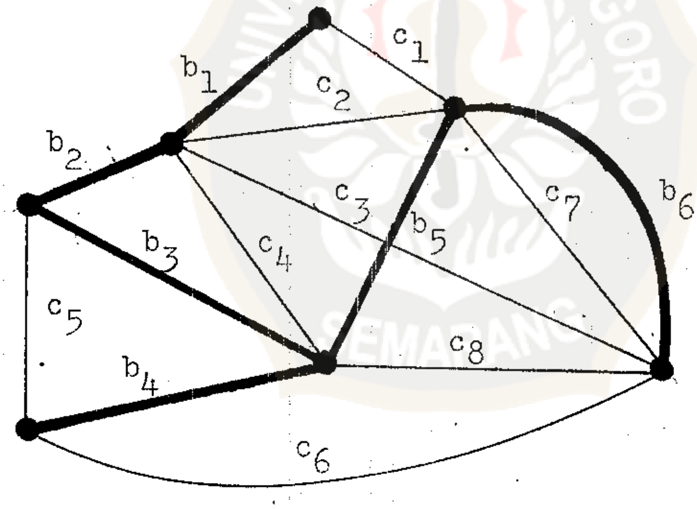
Akibat dari theorema-theorema 3, 4, 5, 6 dan 7 maka dapat disimpulkan bahwa graph G dengan n titik disebut suatu Pohon apabila :

a. G terhubung dan tidak mempunyai siklus
b. G terhubung dan mempunyai n-1 garis
c. G tidak mempunyai siklus dan mempunyai n-1 garis
d. Setiap pasangan titik dalam G, hanya dihubungkan oleh satu alur
e. G adalah graph terhubung minimal

### 3.1.2. POHON PERENTANG (SPANINGS TREE)

Pohon P disebut pohon perentang dari graph terhubung G jika P adalah sub graph dari G dan P memuat semua titik dari graph G.

Contoh pada gambar 18 yang diberi garis tebal adalah merupakan pohon perentang dari graph G.
Dengan demikian maka dapat dikatakan bahwa pohon perentang dari graph G adalah sub graph dari G yang merupakan pohon maksimal atau pohon maksimal dari G.




gambar 18

Pohon perentang dapat pula dibentuk dengan cara menghapus setiap siklus yang terdapat pada graph G, Contohnya misalkan kita mempunyai graph terhubung G, kemudian pilihlah salah satu siklus dan hapuslah salah satu garis dalam siklus itu misalkan $e_1$ maka terbentuk suatu graph $G-e_1$ yang tetap merupakan graph terhubung, selanjutnya teruskan dengan siklus yang lainnya hingga tidak aada lagi siklus dan akan menghasilkan suatu pohon yang maksimal atau pohon perentang, seperti pada gambar 18 dimana garis-garis tipis lah merupakan hasil akhir yang tidak mempunyai siklus dan dinamakan pohon perentang.

Didalam graph tidak terhubung dengan n titik dan e garis serta k komponen, dimana setiap komponennya adalah merupakan graph yang terhubung, kemudian pada tiap komponen kerjakan cara penghapusan siklus diatas sehingga terbentuk pohon perentang-pohon perentang pada setiap komponennya, dan dalam setiap komponen hanya terdapat satu pohon perentang, jadi banyaknya pohon perentang pada graph yang tidak terhubung adalah sama dengan banyaknya komponen yaitu k. Pohon perentang-pohon perentang yang didapat dari graph yang tidak terhubung adalah merupakan hutan yang disebut hutan perentang.

Selanjutnya garis-garis yang tidak digunakan (yang dihapus) pada pohon perentang dalam graph G disebut TALI (CHORD), contohnya pada gambar 18 yang merupakan tali-tali dari graph G adalah $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ dan $c_8$, sedangkan garis-garis yang terbentuk oleh pohon perentang dari graph G, disebut CABANG(BRANCH), contohnya pada gambar 18 yang merupakan cabang-cabang dari graph G adalah $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ dan $b_6$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa jumlah dari banyaknya tali dan banyaknya cabang dalam graph G adalah banyaknya garis dalam graph G, sehingga banyaknya tali merupakan komplemen dari banyaknya cabang, sedangkan banyaknya tali pada graph G dengan m siklus adalah sebanyak m tali. Dan jika graph G adalah merupakan pohon maka banyaknya tali pada graph tersebut adalah nol, sebab pada pohon tidak terdapat siklus dan setiap pohon perentang adalah merupakan pohon.

Theorema 8.

Dalam pohon perentang dari graph terhubung dengan n titik dan e garis mempunyai n-1 cabang dan e-n+1 tali

Bukti :

Pohon perentang juga merupakan pohon, dengan demikian maka sifat-sifat dari pohon juga berlaku untuk pohon perentang.

Menurut theoreme 7 suatu pohon dengan n titik mempunyai n-1 garis, garis tersebut merupakan cabang atau pohon perentang.

Sekarang akan dicari banyaknya tali.

Dari kesimpulan diatas disebutkan bahwa jumlahan dari banyaknya cabang dan banyaknya tali adalah banyaknya garis dalam graph terhubung, dengan demikian banyaknya tali dalam graph terhubung adalah :

$$e - (n-1) = e-n+1 \quad \text{(terbukti)}$$

Maka terbukti bahwa dalam graph terhubung dengan n titik dan e garis mempunyai n-1 cabang dan e - n+1 tali.

Theorema 9.

Dalam pohon perentang dari graph G yang tidak terhubung dengan n titik dan e garis serta e komponen mempunyai n-k cabang dan e-n+k tali

Bukti :

Dalam graph tidak terhubung dengan k komponen, maka akan terdapat sebanyak k graph yang terhubung.

Dari theorema 8 disebutkan bahwa dalam graph terhubung dengan n titik dan e garis mempunyai n-1 ca-

Karena terdiri dari k komponen maka banyaknya titik dalam graph G adalah :

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Pandang salah satu komponen, misalkan $K_1$ dengan $n_1$ titik dan $e_1$ garis, maka akan didapat sebanyak $n_1-1$ cabang dan $e_1-n_1+1$ tali.

Karena terdapat sebanyak k komponen maka :

banyaknya cabang dalam grap tidak terhubung adalah

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i-1) = (n_1-1) + (n_2-1) + \ldots + (n_k-1)$$

$$= \underbrace{(n_1+n_2+ \ldots +n_k)}_{= n} - \underbrace{(1+1+ \ldots +1)}_{= k}$$

$$= n - k$$

Dengan jalan yang sama maka banyaknya tali adalah:

$$\sum_{i=1}^{k} (e_i-n_i+1) = (e_1-n_1+1)+(e_2-n_2+1)+\ldots+(e_k-n_k+1)$$

$$= (e_1+e_2+ \ldots +e_k) - (n_1+n_2+ \ldots+n_k)$$

$$+ (1+1+ \ldots +1)$$

$$= e - n + k$$

Maka terbukti bahwa graph tidak terhubung dengan n titik dan e garis serta k komponen mempunyai n-1 cabang dan e-n+k tali.

## 3.2. HIMPUNAN PEMOTONG (CUT SET)

Beberapa graph terhubung dapat diubah menjadi graph tidak terhubung dengan jalan menghapus salah satu atau beberapa titik beserta garis-garis yang insiden dengannya atau dapat juga menghapus salah satu atau beberapa garis, sehingga graph tersebut berubah menjadi sub graph-subgraph atau komponen-komponen.

Dalam suatu graph terhubung G, jika dihilangkan salah satu titiknya maka akan membentuk sub graph-sub graph atau komponen-komponen yang lebih banyak dari komponen semula. Dan titik yang dihilangkan tersebut dinamakan titik pemisah(separating vertek).

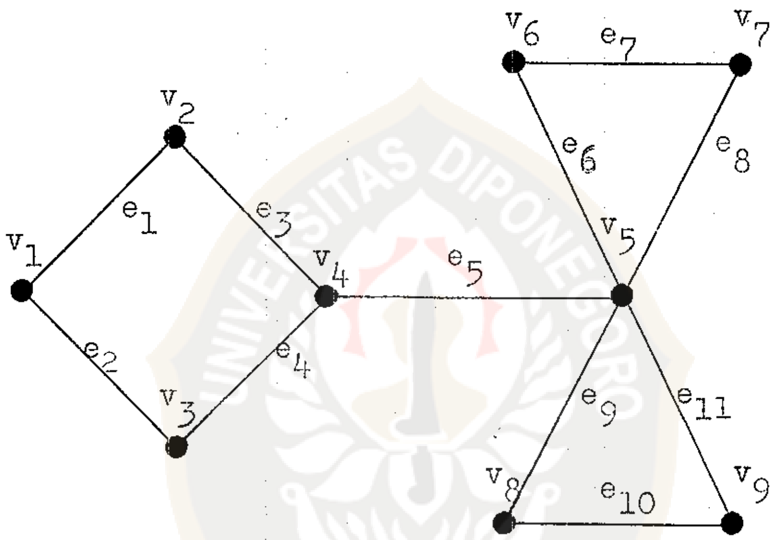
Jika yang dihilangkan adalah garis-garis dalam graph tersebut dan membentuk sub graph-sub graph atau komponen-komponen yang lebih banyak dari komponen semula, maka garis tersebut dinamakan garis pemisah (separating edge).

Sedangkan yang dimaksud dengan Himpunan pemisah (separat - ing set) adalah garis pemisah-garis pemisah yang secara bersama-sama atau sendiri-sendiri membentuk suatu komponen yang lebih banyak dari komponen semula.

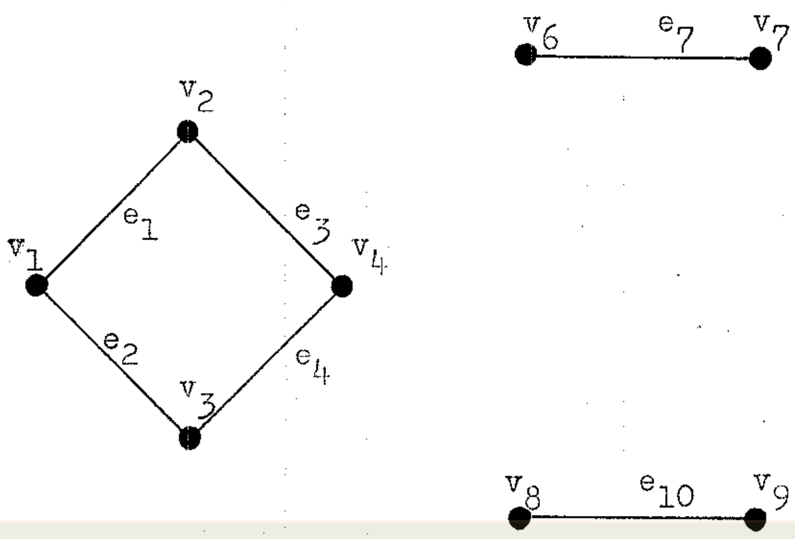
Kemudian yang dimaksud dengan Himpunan pemotong(cut set) adalah himpunan pemisah yang tidak mempunyai himpunan bagian sejati yang juga merupakan himpunan pemisah, maka himpunan pemotong dapat dinyatakan sebagai himpunan minimal dari garis-garis dalam suatu graph terhubung yang penghapusan garisnya mengurangi banyaknya cabang dari graph tersebut. Dengan demikian suatu himpunan pemotong dalam suatu graph terhubung akan menghasilkan suatu graph yang terdiri atas dua komponen.

Contohnya pada gambar 19 adalah suatu graph terhubung dengan 9 titik dan 11 garis yaitu titik-titiknya adalah $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ dan $v_9$ dan garis-garisnya adalah $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}$, dan $e_{11}$. Dan jika dihapus salah satu titiknya, misalkan titik $v_5$ maka graph menjadi G-$v_5$ dan membentuk 3 komponen, seperti pada gambar 20 sehingga titik $v_5$ adalah merupakan titik pemisah , demikian juga jika diambil titik $v_4$ yang dihapus maka graph

Dengan demikian maka $v_4$ adalah merupakan titik pemisah juga sedangkan jika diambil titik $v_3$ yang dihapus, maka graphnya menjadi $G-v_3$ yang hanya terdiri atas satu komponen, dengan demikian maka $v_3$ bukan merupakan titik pemisah, untuk lebih jelas lihat gambar 22.

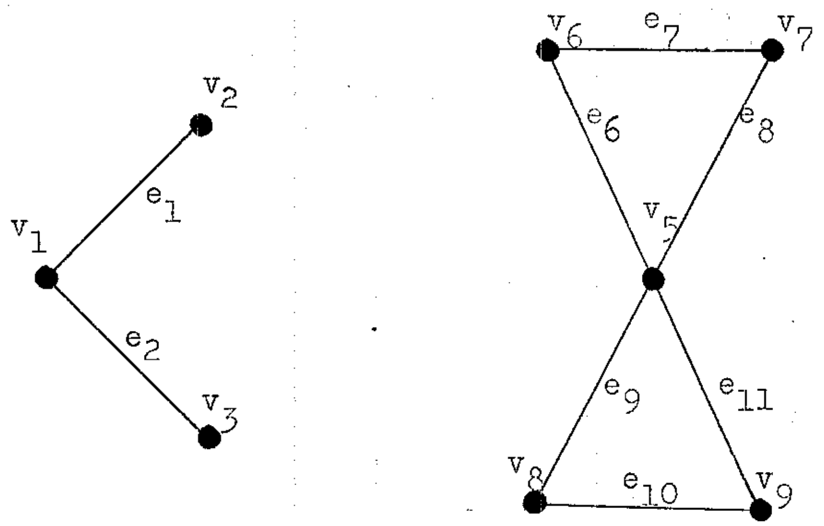



gambar 19

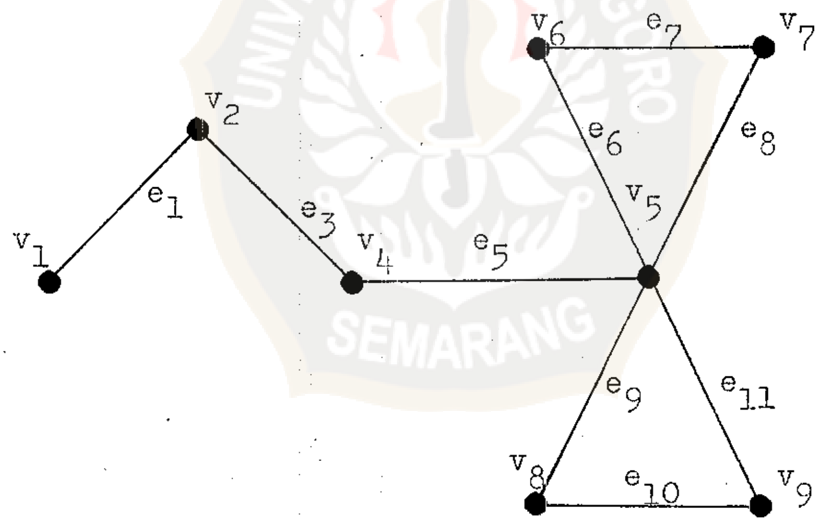





gambar 20




gambar 21




gambar 22

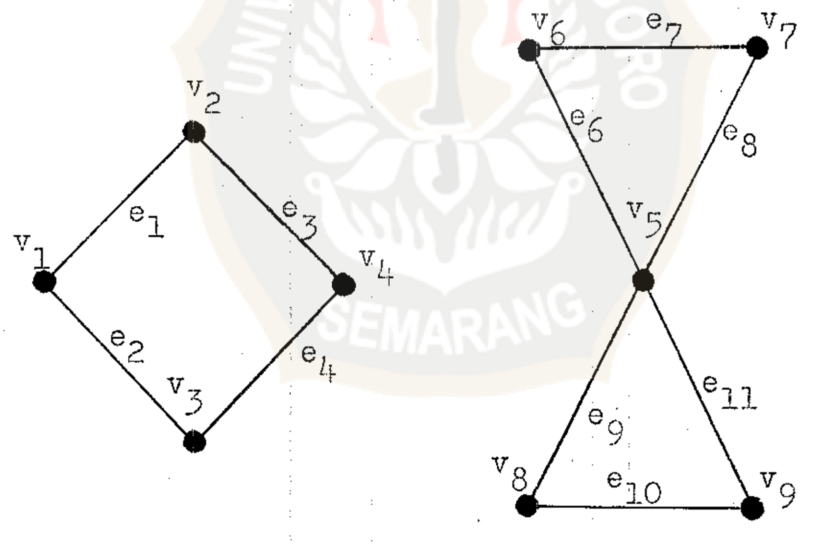
Demikian juga jika salah satu garis dihapus, misalkan garis $e_5$, maka graphnya menjadi G-$\{e_5\}$ yang terdiri atas dua komponen seperti pada gambar 23 karenanya maka $e_5$ adalah garis pemisah serta himpunan pemisah sekaligus merupakan himpunan pemotong, sebab membagi graph yang terhubung menjadi dua komponen.



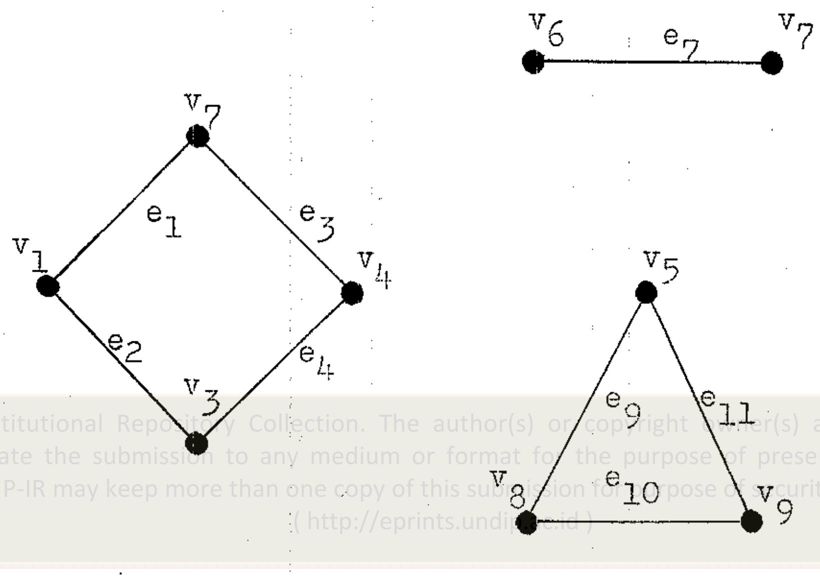
Kemudian jika garis-garis $\{e_5, e_6, e_8\}$ dihapus maka graphnya menjadi G-$\{e_5, e_6, e_8\}$ menjadi tiga komponen seperti pada gambar 24 karenanya maka $\{e_5, e_6, e_8\}$ adalah himpunan pemisah, tetapi bukan merupakan himpunan pemotong, sebab ada himpunan bagian lainnya yaitu $\{e_5\}$ yang juga merupakan himpunan pemisah.

Selanjutnya jika garis $\{e_3, e_4\}$ yang dihapus, maka graphnya menjadi G-$\{e_3, e_4\}$ akan terdiri atas dua komponen seperti pada gambar 25 karenanya maka $\{e_3, e_4\}$ adalah merupakan himpunan pemisah sekaligus himpunan pemotong.

Sedangkan pada gambar 26 adalah jika garis $\{e_5, e_6\}$ yang dihapus maka graphnya menjadi G-$\{e_5, e_6\}$ yang hanya terdiri atas satu komponen saja, dengan demikian maka $\{e_5, e_6\}$ adalah bukan himpunan pemisah.

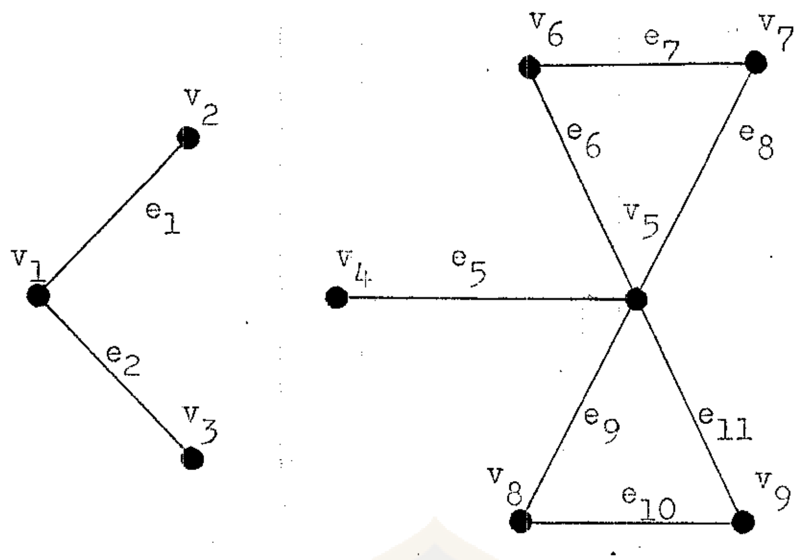



gambar 23

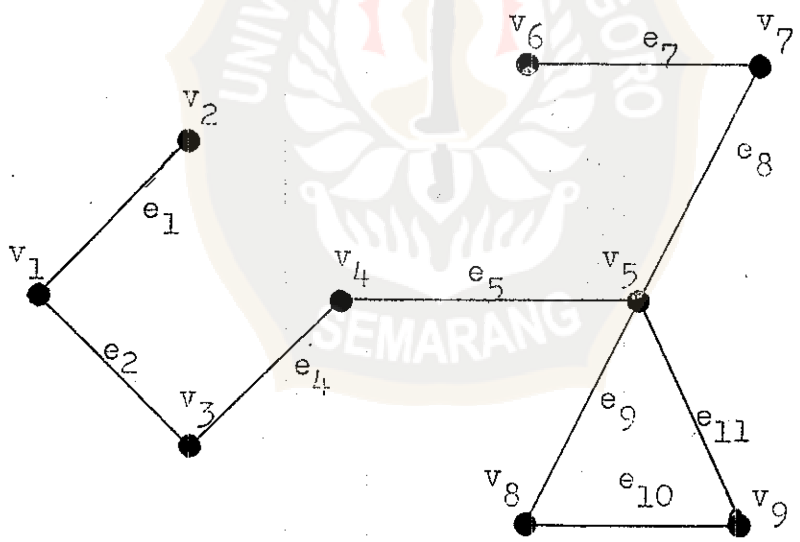





gambar 24




gambar 25




gambar 26