BAB II

KONSEP DASAR

2.1. PENGERTIAN GRAPH

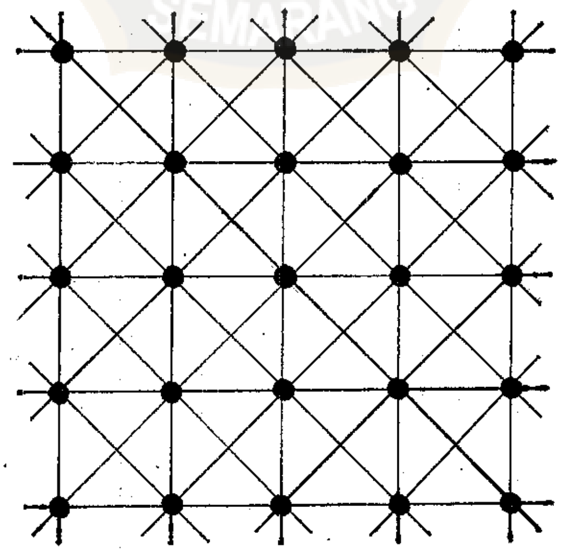
Graph G didefinisikan sebagai pasangan (V(G),E(G)), dimana V(G) $\neq \emptyset$ dan merupakan himpunan dari elemen-elemen titik-titik(vertices) yang selanjutnya kita sebut saja sebagai titik, sedangkan E(G) merupakan himpunan pasangan berurut elemen-elemen dari V(G) yang kita sebut sebagai garis-garis(edges) yang selanjutnya disebut sebagai garis saja.

Graph G adalah tidak berhingga (Infinite graph) jika memenuhi :

a. V(G) tidak berhingga dan tidak kosong

b. E(G) boleh berhingga

Contohnya pada gambar 2 adalah merupakan graph tidak berhingga.



gambar 2

Graph G adalah graph berhingga (finite grapah) jika memenuhi :

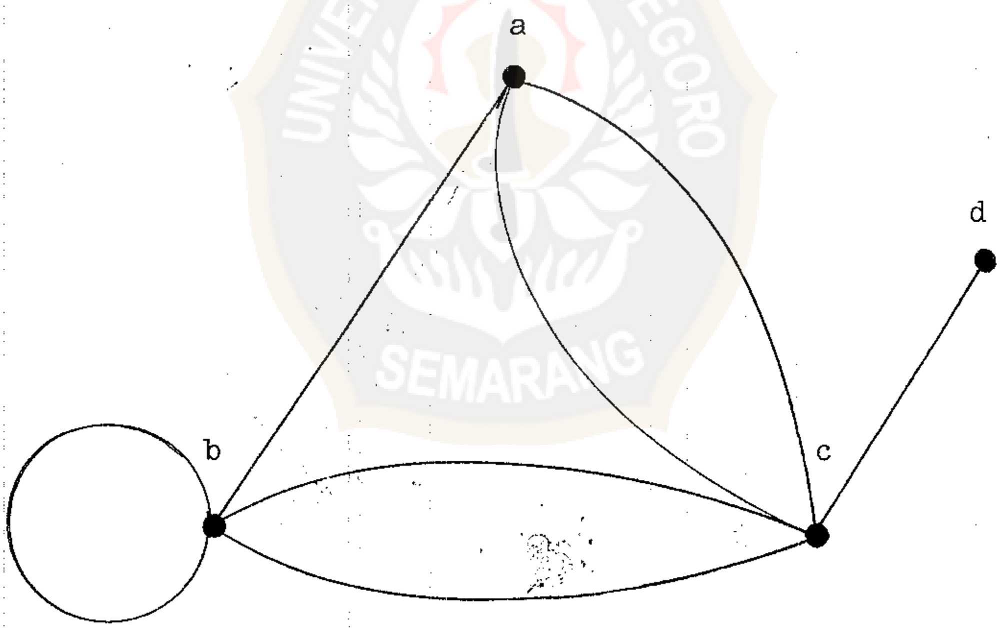
a. V(G) berhingga dan tidak kosong

b. E(G) berhingga

Contohnya pada gambar 3 adalah merupakan graph berhingga, dimana : $V(G) = \{a,b,c,d\}$ dan

$$E(G) = \{(a,b),(b,b),(b,c),(b,c),(a,c),(a,c),(c,d)\}$$

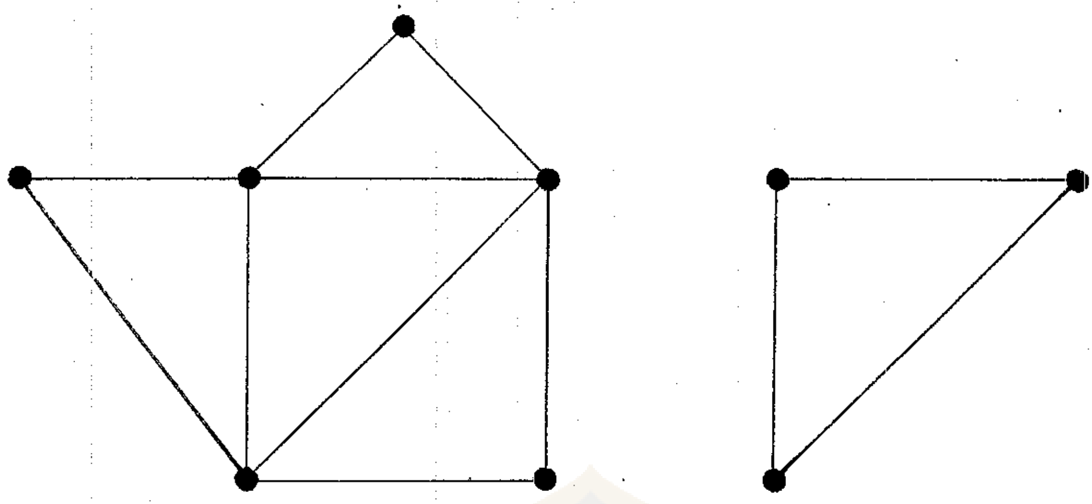
Karena dalam pembahasan suatu jaringan dimana merupakan model penyelesaian masalah yang datanya berhingga maka untuk selanjutnya hanya akan dibahas atau yang digunakan graph berhingga saja.



gambar 3

Suatu graph disebut Sub graph dari graph G jika semua titik-titik dan semua garis-garisnya berada didalam graph G, dan dalam sub graph susunan titik-titik dan garis garis dari graph semula tidak boleh dipindah atau ditukar letaknya, juga tidak boleh menambah titik atau garis yang baru.

Contohnya pada gambar 4 adalah merupakan graph dan sub graphnya.



gambar 4

Keterangan :

a. Setiap ujung-ujung garis pasti terdapat titik, tetapi adanya titik belum tentu adanya garis.

b. Setiap graph adalah merupakan juga sub graph dari dirinya sendiri.

2.1.1. BEBERAPA ISTILAH DALAM GRAPH

2.1.1.1. Jalan (Walk)

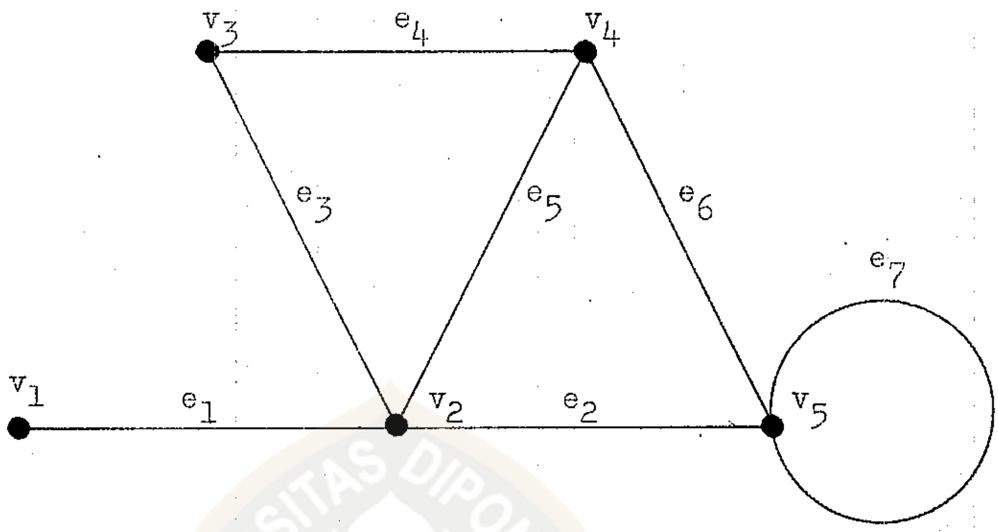
Adalah deretan bergantian dari titik dan garis diawali dan diakhiri oleh titik dimana setiap garis insiden dengan titik pada ujung-ujungnya.

Pada gambar 5 yang dimaksud dengan jalan dari v_1 ke v_3 adalah sebagai berikut :

$v_1, e_1, v_2, e_2, v_5, e_7, v_5, e_6, v_4, e_4, v_3$. atau

$v_1, e_1, v_2, e_5, v_4, e_6, v_5, e_2, v_2, e_3, v_3$. dan lainnya.

Sebagai catatan bahwa titik maupun garis boleh diulang dan jika jalan tersebut diawali dan diakhiri oleh titik yang sama, maka jalan tersebut dinamakan jalan tertutup, sebagai contoh pada gambar 5 misalnya jalan dari



gambar 5

2.1.1.2. Jalan Tapak (Trail)

Adalah jalan dimana garis-garisnya tidak boleh diulang (berlainan).

Pada gambar 5 yang dimaksud dengan jalan tapak dari titik v_1 ke titik v_5 adalah sebagai berikut :

$v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_2, v_5, e_7, v_5.$

2.1.1.3. Alur (Path)

Adalah jalan dimana titik-titik dan garis-garisnya tidak boleh diulang (berlainan), kecuali titik awal dan titik akhirnya dan jika terjadi yang demikian maka akan membentuk alur yang tertutup.

Pada gambar 5 yang dimaksud dengan alur dari titik v_1 ke titik v_3 adalah sebagai berikut :

$v_1, e_1, v_2, e_2, v_5, e_6, v_4, e_4, v_3.$

2.1.1.4. Siklus (Cycle)

Adalah alur tertutup.

Pada gambar 5 yang dimaksud dengan siklus adalah:

$v_2, e_2, v_5, e_6, v_4, e_4, v_3, e_3, v_2.$

2.1.1.5. Gelung (Loop)

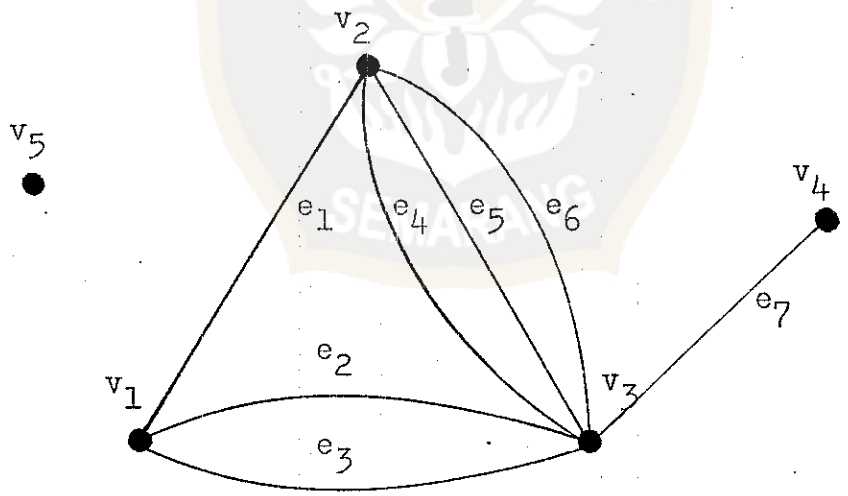
Adalah garis yang kedua ujungnya berawal dan berakhir pada titik yang sama.

Pada gambar 5 yang dimaksud dengan gelung adalah garis e_7.

2.1.1.6. Garis-garis Paralel (Paralel Edges)

Adalah beberapa garis yang secara bersamaan menghubungkan dua titik yang sama.

Pada gambar 6 yang dimaksud dengan garis-garis paralel adalah garis-garis e_2 dan e_3, atau garis-garis e_4, e_5 dan e_6.



gambar 6

2.1.1.7. Derajad (Degree)

Adalah banyaknya garis yang insiden dengan titik tersebut, dan diberi simbol $d(v_i)$ untuk i=1,2,3, ...

Pada gambar 6 maka derajad dari titik-titiknya adalah sebagai berikut :

$d(v_1) = 3$, $d(v_3) = 6$, $d(v_5) = 0$

$d(v_2) = 4$, $d(v_4) = 1$

Keterangan :

Dalam setiap graph berlaku bahwa jumlah derajad pada titik adalah sama dengan dua kali banyaknya garis sebab setiap garis dalam graph akan menyumbang sebanyak dua derajad pada titik-titik yang insiden dengannya.

Pada gambar 6 untuk titik terasing v_5 maka didapat

$d(v_i) = 0$, sebab tidak ada garis yang menghubungkannya, sedangkan untuk graph yang terhubung disebelahnya maka didapat $\sum d(v_i) = (3+4+6+1=14)$ atau sama dengan 2 kali banyaknya garis (terdapat 7 buah garis).

Sehingga dalam tiap graph berlaku :

$$\sum d(v_i) = 2e$$

dimana : $d(v_i)$ adalah derajad pada titik v_i dalam G

e adalah banyaknya garis dalam G.

2.1.1.8. Titik terasing (Isolated vertek)

Adalah titik yang berderajad nol.

Pada gambar 6 yang dimaksud dengan titik terasing adalah titik v_5.

2.1.1.9. Titik akhir (End vertek)

Adalah titik yang berderajad satu.

Pada gambar 6 yang dimaksud dengan titik akhir adalah titik v_4.

2.1.1.10. Adjacent

Adalah dua buah titik yang dihubungkan langsung sedikitnya oleh satu garis.

Pada gambar 5 contohnya adalah :

v_1 adjacent dengan v_2

v_2 adjacent dengan v_1, v_3, v_4, v_5

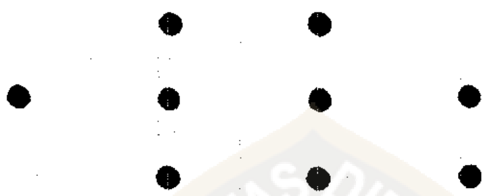
v_1 tidak adjacent dengan v_3, v_4, v_5.

2.1.2. BEBERAPA GRAPH KHUSUS

2.1.2.1. Graph Nol (Null graph)

Graph yang tidak mempunyai garis.

Contohnya pada gambar 7.



gambar 7

2.1.2.2. Graph Sederhana (Simple graph)

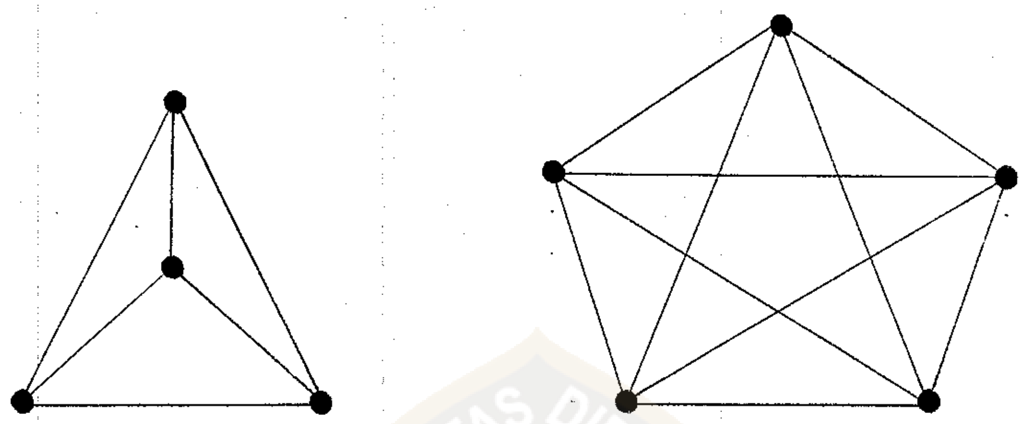
Adalah graph yang tidak mempunyai garis paralel dan tanpa gelung, karena tidak mempunyai garis paralel dan gelung maka setiap pasangan titik (v_i,v_j) dan pasangan titik (v_j,v_i) hanya dihubungkan oleh satu garis saja, dengan demikian jika graph sederhana ini mempunyai n titik maka paling banyak (maksimal) terdapat $n(n-1)/2$ garis.

Contohnya pada gambar 8 juga merupakan suatu graph sederhana.

2.1.2.3. Graph Lengkap (Complete graph)

Adalah graph sederhana yang mempunyai garis yang maksimal. Jadi jika terdapat n titik pada graph lengkap maka akan terdapat sebanyak $n(n-1)/2$ garis.

Contohnya pada gambar 8 adalah merupakan graph lengkap dengan 4 dan 5 buah titik, sehingga didapat sebanyak $4(4-1)/2 = 6$ dan $5(5-1)/2 = 10$ buah garis didalam graph tersebut.

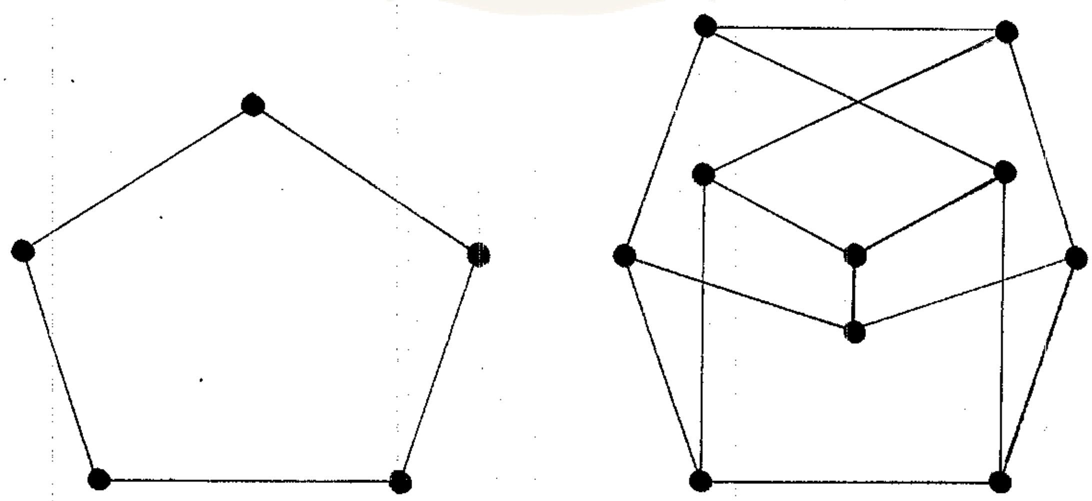


gambar 8

2.1.2.4. Graph Teratur (Regular graph)

Adalah graph sederhana dimana setiap titiknya mempunyai derajad yang sama.

Contohnya pada gambar 9 adalah graph teratur yang mempunyai derajad 2 dan berderajad 3.

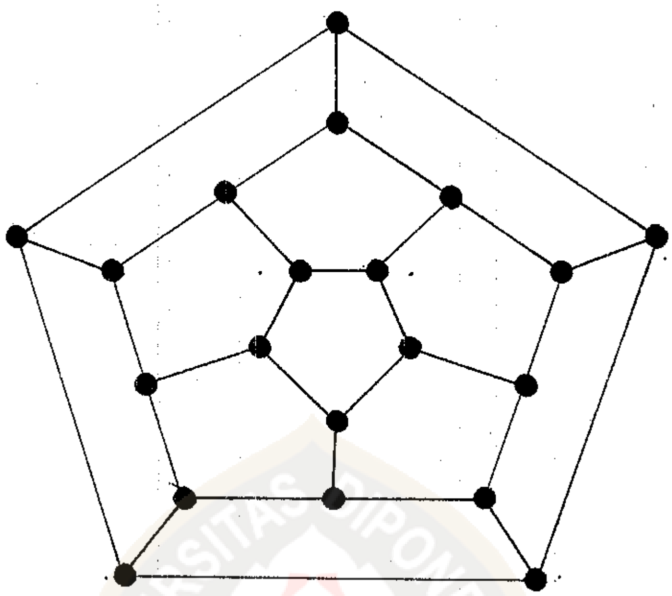


gambar 9

2.1.2.5. Graph Platonik

Adalah graph teratur yang titik-titiknya dan garis-garisnya adalah titik-titik sudut dan garis-garis dari suatu bidang banyak beraturan.

Contohnya pada gambar 10.

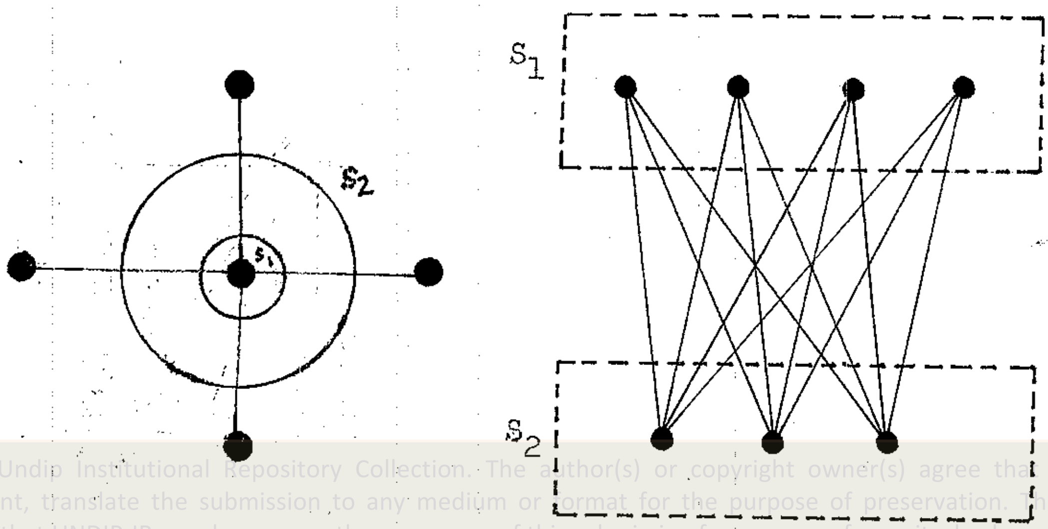


gambar 10

2.1.2.6. Graph Terbagi Dua (Bipartite graph)

Adalah graph yang mempunyai ciri khusus yaitu himpunan titik-titiknya terpisah menjadi dua bagian yang saling asing misalkan S_1 dan S_2, sedemikian sehingga setiap garis-garisnya merupakan penghubung elemen titik-titik di dalam S_1 dan elemen titik-titik dalam S_2.

Contohnya pada gambar 11.

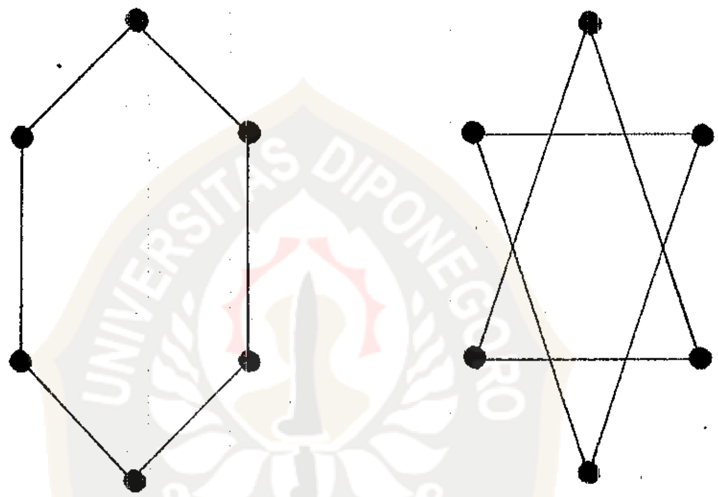


gambar 11

2.1.2.7. Komplemen dari Graph

Adalah graph dimana titik-titiknya merupakan titik-titik dari graph semula, tetapi garis-garis yang menghubungkannya bukan merupakan garis-garis dalam graph semula.

Contohnya pada gambar 12 adalah merupakan graph dan komplemennya yang diberi simbol $\overline{G}$.



gambar 12

Keterangan :

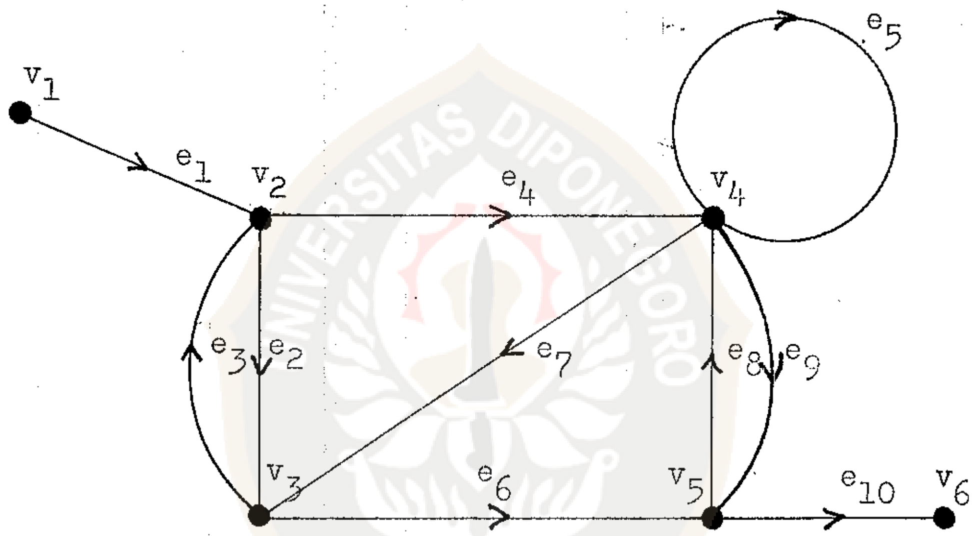
Komplemen dari graph lengkap adalah graph nol demikian pula sebaliknya dan komplemen dari graph teratur adalah merupakan graph teratur juga.

2.2. GRAPH BERARAH (DIRECTED GRAPH/DIGRAPH)

Graph berarah B didefinisikan sebagai pasangan dari (V(B),E(B)), dimana V(B) $\neq$ $\emptyset$ dan merupakan himpunan berhingga dari elemen-elemen titik, sedangkan E(B) adalah himpunan berhingga pasangan berurut dari elemen-elemen V(B) yang merupakan garis-garis yang mana garis-garis tersebut menentukan arah dari titik satu ke titik pasangan lainnya dan setiap garis diberi tanda arah yaitu anak panah hingga dapat ditentukan titik awal(source) dan titik akhir(target atau sink)

Sedangkan jika V(B) atau garis-garisnya tidak menentukan arahnya maka graph tersebut dikatakan graph tidak berarah (Undirected graph).

Contohnya pada gambar 13 adalah merupakan graph berarah, sedangkan untuk graph tidak berarah dapat dilihat pagambar 4.



gambar 13

2.2.1. DERAJAD DAN ALUR

Didalam graph berarah derajad dapat dibagi menjadi dua yaitu :

a. Derajad masuk (Indegree) yaitu banyaknya garis yang masuk/menuju ke titik tersebut.

Diberi simbol $d^-(v_i)$.

Contohnya pada gambar 13 maka :

$d^-(v_1) = 0$

$d^-(v_2) = d^-(v_3) = d^-(v_5) = 2$

$d^-(v_4) = 3$

$d^-(v_6) = 1.$

b. Derajad keluar (Out degree) yaitu banyaknya garis yang keluar/meninggalkan titik tersebut.

Diberi simbol $d^{+}(v_i)$.

Contohnya pada gambar 13 maka :

$d^{+}(v_1) = 1$

$d^{+}(v_2) = d^{+}(v_3) = d^{+}(v_5) = 2$

$d^{+}(v_4) = 3$

$d^{+}(v_6) = 0$

Sedangkan untuk alur dapat dibedakan menjadi dua juga yaitu :

a. Alur searah (Directed path) yaitu suatu alur yang ditunjukkan sesuai dengan arah dari garis-garis - nya.

Contohnya pada gambar 13 yang merupakan alur searah dari titik v_1 ke titik v_6 adalah :

$v_1, e_1, v_4, e_9, v_5, e_{10}, v_6$. atau

$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_6, v_5, e_{10}, v_6$.

b. Semi alur (Semi path) yaitu suatu alur yang bukan merupakan alur searah.

Contohnya pada gambar 13 yang merupakan suatu semi alur dari titik v_1 ke titik v_6 adalah :

$v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_8, v_5, e_{10}, v_6$. atau

$v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_6, v_5, e_{10}, v_6$.

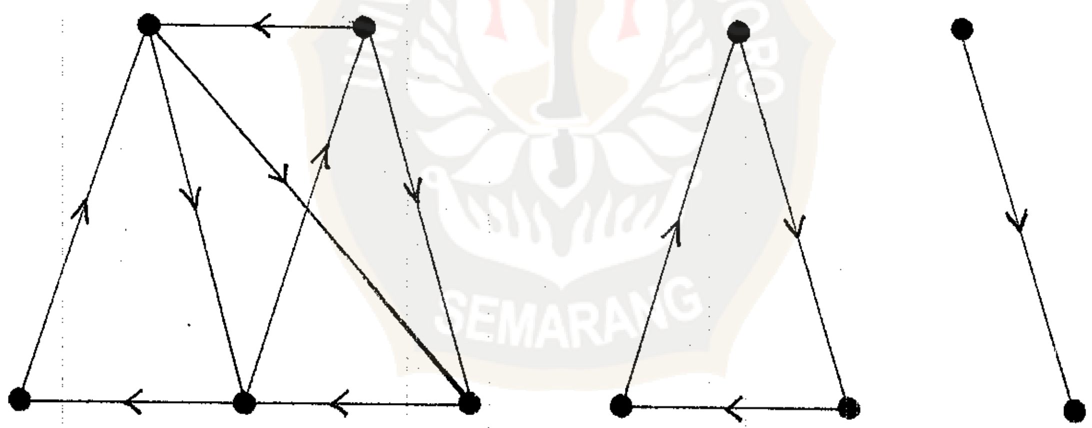
Keterangan :

Suatu alur searah yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama dinamakan siklus searah (Directed cycle).

2.2.2. KETERHUBUNGAN DAN KOMPONEN

Graph G disebut graph terhubung (connected graph), jika setiap pasangan titiknya terdapat paling sedikit satu alur. Sedangkan Graph G disebut tidak terhubung (Disconnected graph) jika terdapat sedikitnya sepasang titik yang tidak dihubungkan oleh suatu alur.

Pada gambar 14 yaitu merupakan graph terhubung (-gambar 14 (a)) dan graph tidak terhubung (gambar 14(b)).



(a) (b)

gambar 14

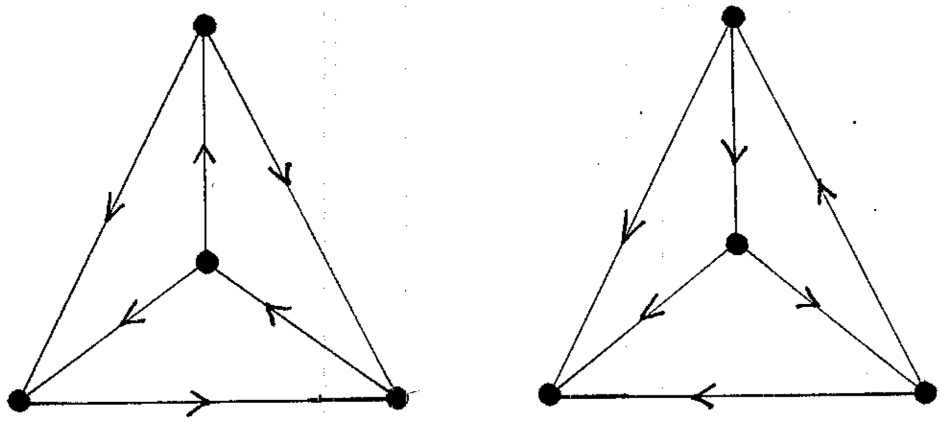
Didalam graph berarah keterhubungan dibagi menjadi dua yaitu :

a. Terhubung kuat (Strongly connected) yaitu jika sedikitnya terdapat satu alur searah dari tiap titik ke setiap titik la innya.

   Contohnya pada gambar 15 (a)

b. Terhubung lemah (Weakly connected) yaitu jika terhubung tetapi tidak terhubung kuat.

   Contohnya pada gambar 15 (b)



(a) (b)

gambar 15

Graph K disebut Komponen dari graph G,,jika diambil titik v_i dalam G maka akan terdapat suatu sub graph dalam G yang dibentuk oleh titik v_i dengan titik lainnya beserta dengan garis-garis yang menghubungkannya dan subgraph yang terbentuk itu disebut Komponen. Dengan demikian komponen dari suatu graph terhubung adalah graph itu sendiri atau bisa dikatakan setiap graph yang terhubung adalah merupakan satu komponen, dan pada setiap graph tidak terhubung akan ditemukan paling sedikit dua sub graph yang terhubung dan sub graph-sub graph itu disebut komponen, dengan demikian pada graph yang tidak terhubung paling sedikit terdapat dua komponen.

Sebagai contoh pada gambar 14(a) adalah merupakan graph dengan satu komponen dan pada gambar 14(b) adalah merupakan graph dengan dua komponen.

Didalam graph berarah komponen dapat dibagi menjadi dua yaitu :

a. Komponen kuat (Strongly componen) yaitu subgraph yang terhubung kuat yang maksimal.

b. Komponen lemah (Weakly component) yaitu subgraph yang bukan merupakan komponen kuat.

Theorema 1.

Suatu graph G adalah tidak terhubung -bhb- himpunan titik V dapat dipisahkan menjadi dua himpunan titik yang tidak kosong dan memisah menjadi V_1 dan V_2 sehingga tidak ada garis yang menghubungkan titik-titik dalam V_1 dan titik-titik dalam V_2.

Bukti :

Misalkan diambil titik sembarang dalam V_1 adalah a dan titik sembarang dalam V_2 adalah b, maka theorema diatas dapat disajikan sebagai :

Graph G tidak terhubung $\Longleftrightarrow$ tidak ada garis yang menghubungkan titik a dan titik b.

dimana : $a \in V_1$ dan $b \in V_2$

$$V_1 \cup V_2 = V$$

($\Longrightarrow$) titik a dan titik b tidak dihubungkan oleh garis maka titik a dan titik b tidak mempunyai alur, sebab tidak ada garis yang menghubungkan titik-titik dalam V_1 dan titik-titik dalam V_2.

Dengan demikian maka akan dapat ditemukan sepasang titik yaitu titik a dan titik b yang tidak dihubungkan oleh suatu alur.

Maka terbukti bahwa Graph G tidak terhubung.

($\Longleftarrow$) Tidak ada garis yang menghubungkan titik a dan titik b $\Longrightarrow$ Graph G tidak terhubung.

Andaikan Graph G adalah terhubung

Maka setiap pasangan titik dalam graph G minimal ter

Sedangkan diketahui bahwa terdapat sepasang titik yaitu titik a dan titik b yang tidak dihubungkan oleh suatu alur, dengan demikian maka pengandaian salah, yang benar adalah graph G tidak terhubung.

Dengan demikian dari ($\Longrightarrow$) dan ($\Longleftarrow$) terbukti.

Maka theorema 1 berlaku.

Theorema 2.

Jika dalam graph G terdapat tepat dua titik yang mempunyai derajad ganjil maka terdapat alur.

Bukti :

Akan dibuktikan, untuk graph terhubung dan graph tidak terhubung.

Dalam graph terhubung jelas terdapat alur, sebab setiap pasangan titiknya, pasti akan dihubungkan minimal satu alur.

Sekarang akan dibuktikan untuk graph tidak terhubung.

Misalkan ambil dua buah titik sembarang dalam G, yaitu v_i dan v_j yang mempunyai derajad ganjil.

Didalam graph tidak terhubung minimal terdapat 2 komponen dan dalam setiap komponen mempunyai jumlah derajad genap (lihat keterangan 2.1.1.7 yaitu $\sum d(v_i) = 2\ e$).

Dengan demikian maka titik v_i dan v_j terdapat dalam salah satu komponen atau dalam satu komponen sehingga titik v_i dan v_j mempunyai alur, terbukti

Maka theorema 2 berlaku.

____o____