BAB III

KONDUKSI PANAS/KALOR SATU DIMENSI YANG STEDI

3.1. DINDING GEOMETRI SEDERHANA

Konduksi panas/kalor pada sistem satu dimensi merupakan sistim yang sederhana dengan suhu dan aliran panas merupakan fungsi dari satu koordinat saja.

Sebagai contoh pada :

- Dinding datar

  Kasus aliran panas/kalor satu dimensi yang paling sederhana yaitu konduksi panas/kalor melalui dinding datar , yang telah diuraikan pada bab terdahulu didapat bahwa untuk suhu seragam pada permukaan yang panas maupun yang dingin, laju aliran panas/kalor dengan cara konduksi melalui suatu bahan yang homogen diberikan oleh :

$$
\begin{aligned}
q_k &= \frac{A\,k}{L}\,(T_{panas} - T_{dingin}) \\
&= \frac{\Delta T}{R_k} \qquad \text{.... (3-1)} \\
&= K_k \Delta T
\end{aligned}
$$

- Silinder berlubang

  Aliran panas radial dengan cara konduksi melalui silinder berpenampang lingkaran yang berlubang merupakan satu lagi soal konduksi satu dimensi yang besar arti pentingnya dalam praktek.

  Contoh yang khas adalah konduksi melalui pipa dan melalui isolasi pipa.

  Jika silinder itu homogen dan cukup panjang sehingga pengaruh ujung-ujungnya dapat diabaikan dan suhu permukaan dalamnya konstan pada T_i sedangkan suhu luarnya dipertahankan seragam pada T_o maka dari persamaan (2-1), laju konduksi panas/kalornya adalah :

$$q_k = -k\,A\,\frac{dT}{dr} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3\text{-}2)$$

$\frac{dT}{dr}$: gradien suhu dalam arah radial.

Untuk silinder berlubang (gambar 3-1), luasnya merupakan fungsi jari-jari

$$A = 2\,\pi\,r\,L \text{ (persamaan luar)} \ldots\ldots (3\text{-}3)$$

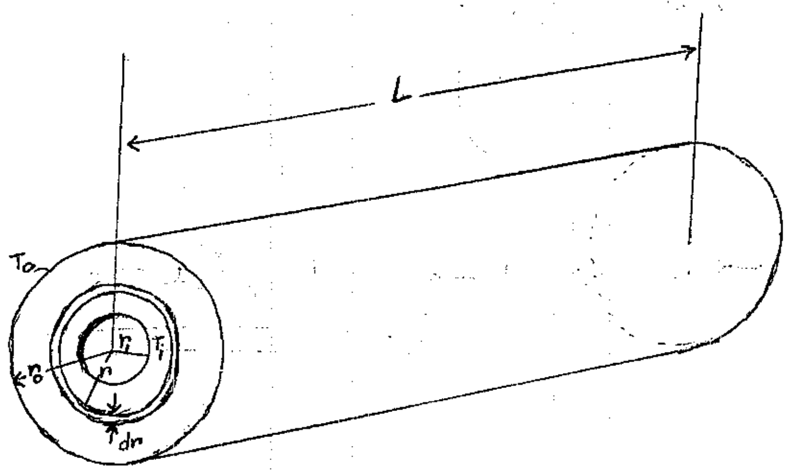
r : jari-jari

L : panjang silinder

Maka laju aliran panas/kalor dengan cara konduksi dapat dinyatakan sebagai :

$$q_k = -k\,A\,\frac{dT}{dr}$$

$$= -k\,2\,\pi\,r\,L\,\frac{dT}{dr} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (3\text{-}4)$$



Gambar (3 - 1)

Pemisahan variabel-variabel dan integrasi antara T_o pada r_o dan T_i pada r_i :

$$q_k = -k\, 2\pi\, r\, L \frac{dT}{dr}$$

$$q_k\, dr = -k\, 2\pi\, r\, L\, dT$$

$$\frac{q_k\, dr}{k\, 2\pi r\, L} = -\, dT$$

$$\frac{q_k}{k\, 2\pi L} \frac{dr}{r} = -\, dT$$

$$\frac{q_k}{k\, 2\pi L} \int_{r_i}^{r_o} \frac{1}{r}\, dr = -\int_{T_i}^{T_o} dT$$

$$\frac{q_k}{k\, 2\pi\, L} \ln r \Big|_{r_i}^{r_o} = -\, T \Big|_{T_i}^{T_o}$$

$$\frac{q_k}{2\pi\, k\, L} \left(\ln r_o - \ln r_i\right) = -\left(T_o - T_i\right)$$

$$\frac{q_k}{2\pi\, k\, L} \ln \frac{r_o}{r_i} = T_i - T_o$$

Sehingga didapat :

$$T_i - T_o = \frac{q_k}{2\pi\, k\, L} \ln \frac{r_o}{r_i} \quad \ldots\ldots \text{(3-5)}$$

Dan untuk laju perpindahan panas konduksi :

$$q_k = \frac{T_i - T_o}{\left(\ln \frac{r_o}{r_i}\right) / 2\pi\, k\, L} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(3-6)}$$

Persamaan untuk menghitung laju konduksi panas melalui silinder berpenampang lingkaran yang berlubang misalnya pipa.

Dari persamaan (3-6) menunjukkan bahwa laju aliran panas/kalor radial berbanding lurusdengan panjang silinder L.

Konduktifitas k, beda suhu antara permukaan dalam dan luar $T_i - T_o$, dan berbanding terbalik dengan logaritma alamiah (ln) hasilbagi jari - jari luar terhadap jari - jari dalam (r_o/r_i) atau hasil bagi garis tengah luar terhadap garis tengah dalam (D_o/D_i).

Dengan analogi terhadap kasus dinding datar dan hukum Ohm, tahanan termal silinder berlubang adalah :

$$R_k = \frac{\ln (r_o/r_i)}{2\pi kL} \quad \text{..........} \quad (3 - 7)$$

Distri busi suhu pada dinding yang diperoleh dengan mengintegrasikan persamaan (3-4) dari jari - jari dalam r_i dan suhu T_i yang bersangkutan sampai jari - jari sembarang r dan suhu T yang bersangkutan, yaitu ;

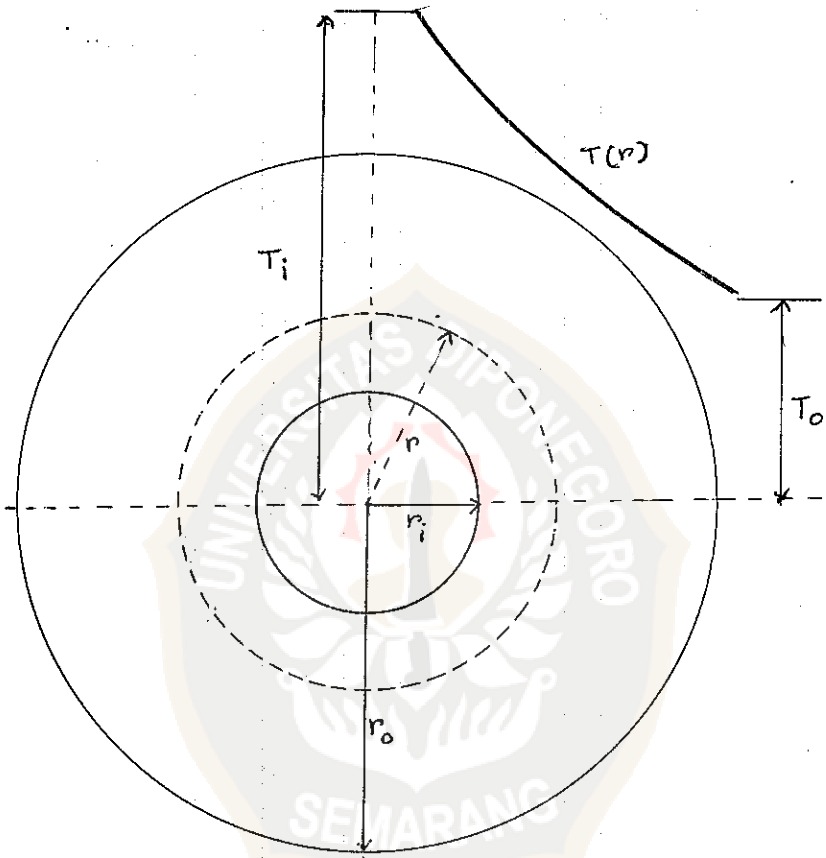
$$\int_{r_i}^{r} \frac{q_k}{k\,(2\pi L)} \frac{dr}{r} = - \int_{T_i}^{T_r} dT$$

$$\frac{q_k}{k(2\pi L)} \ln \frac{r}{r_i} = T_i - T_r$$

$$\frac{\dfrac{T_i - T_o}{\ln (r_o/r_i)/2\pi kL}}{2\pi kL} \ln \frac{r}{r_i} = T_i - T_r$$

$$T_r = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln (r_o/r_i)} \ln \frac{r}{r_i}$$

Jadi suhu dalam silinder berlubang merupakan fungsi logaritmik jari-jari r (gambar 3-2).
Sedangkan untuk dinding datar distribusi suhunya linier.



Gambar (3 - 2).

Untuk penggunaan-penggunaan tertentu akan bermanfaat bila membuat persamaan konduksi melalui dinding lengkung dalam bentuk yang sama seperti persamaan (3-1) untuk dinding datar.
Guna memperoleh bentuk persamaan ini kita mempersamakan ruas-ruas kanan persamaan (3-1) dan persamaan (3-6), tetapi dengan menggunakan $L = (r_o - r_i)$, tebal melalui mana panas/kalor konduksi, dan $A = \bar{A}$ dalam persamaan (3-1).

Hal ini menghasilkan :

$$\frac{k \bar{A} \Delta T}{r_o - T_i} = \frac{2 \pi k L \Delta T}{\ln (r_o / r_i)}$$

dari persamaan ini $\bar{A}$ adalah :

$$\bar{A} = \frac{2\pi(r_o - r_i)}{\ln(r_o/r_i)}$$

$$= \frac{A_o - A_i}{\ln(A_o/A_i)} \quad \ldots\ldots\ldots \ (3\text{-}8)$$

Luas $\bar{A}$ yang didefinisikan oleh persamaan (3-8) disebut luas rata-rata.

Maka laju konduksi panas/kalor melalui silinder berpe - nampang lingkaran yang berlubang dapat dinyatakan sebagai :

$$q_k = \frac{T_i - T_o}{(r_o - r_i)/k\bar{A}} \quad \ldots\ldots \ (3\text{-}9)$$

Untuk harga $A_o/A_i < 2$ (yaitu $r_o < r_i < 2$).

Luas rata - rata ($A_o + A_i$) / 2 terdapat dalam batas-batas 4 % dari luas rata - rata dan boleh dipakai dengan ketelitian yang memuaskan.

- Cangkang berbentuk bola .

Diantara semua bentuk geometri, bola mempunyai volume luasan permukaan luar yang terbesar.
Oleh karena itu bentuk bola berongga sering digunakan dalam industri kimia untuk pekerjaan suhu rendah, bila kerugian panas harus diusahakan sekecil - kecilnya. Konduksi melalui cangkang berbentuk bola merupakan sistem satu demensi yang ajeg jika suhu permukaan dalam dan luarnya seragam dan konstan, gambar (3 - 3).
Jika bahannya homogen maka laju aliran panas konduksi pada sistem tersebut adalah :

$$q_k = \frac{k\ A}{L}\ (T_i - T_o)$$

Karena luas dari cangkang berbentuk bola adalah ;

$$A = 4\pi r_o\ r_i \qquad \text{dan} \qquad L = r_o - r_i$$

maka ;

$$q_k = \frac{4\pi r_i\ r_o\ k}{r_o - r_i}\ (T_i - T_o)$$

dan karena luas bola dengan jari - jari r_o adalah ;

$$A_o = 4\pi r_o^2$$

serta luas bola dengan jari - jari r_i adalah ;

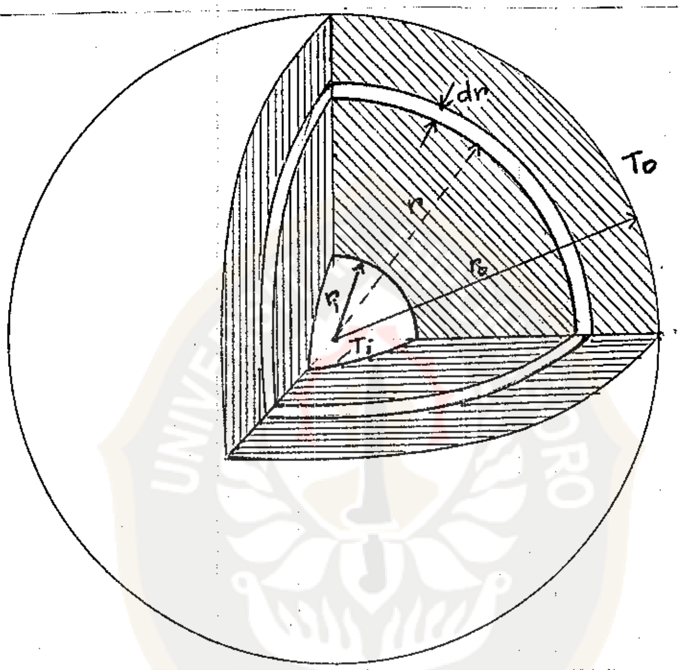
$$A_i = 4\pi r_i^2$$

sehingga; $\quad A_o \cdot A_i = 16\pi^2 r_i^2\ r_o^2$

dan

Maka laju aliran panas konduksi keadaan ajeg melalui cangkang bola adalah :

$$q_k = k \sqrt{A_o . A_i} \; \frac{(T_i - T_o)}{(r_o - r_i)} \quad \text{.........} \quad (3 - 10)$$



Gambar (3 - 3)

Persamaan (3 - 10) tersebut juga berlaku untuk cangkang berbentuk paralelepida yang mempunyai rongga dalam kecil dan yang dikelilingi oleh dinding yang tebal.

Contoh sistem demikian adalah tanur kecil yang dikelilingi oleh bahan isolasi tebal. Tetapi ditinjau dari aliran panas/kalornya yang tidak tegak lurus terhadap permukaan - permukaannya yang merupakan batas sistem, maka tidak dapat secara tepat dipandang sebagai sistem satu demensi.

Tetapi bila rongganya berbentuk kubus dan dinding yang mengelilinginya memiliki ketebalan $A_o/A_i > 2$, maka laju aliran panasnya (menurut Schuman) dapat diperkirakan dengan mengalikan luas rata - rata dalam persamaan (3 - 10) dengan faktor koreksi semi empirik 0,725.

3.2. PENGARUH KONDUKTIVITAS THERMAL TIDAK SERAGAM

Telah disebutkan bahwa konduktivitas thermal berubah terhadap suhu. Perubahan konduktivitas thermal terhadap suhu dapat diabaikan bila jangkauan suhu tidak terlalu besar. Sebaliknya, bila beda suhu dalam suatu sistem menyebabkan perubahan konduktivitas thermal yang besar maka ketergantungan terhadap suhu harus diperhitungkan.

Untuk banyak bahan, terutama dalam daerah suhu yang terbatas berubahnya konduktivitas thermal terhadap suhu merupakan fungsi linier, yaitu :

$$k = k(T) = k_o \ (1 + \beta_k \ T) \qquad \text{..........} \qquad (3 - 11)$$

k_o adalah konduktivitas thermal pada $T = 0$ dan β_k konstanta yang dinamakan koefisien suhu kondoktivitas thermal.

Bila perubahan konduktivitas thermal tersedia dalam bentuk kurva yang menunjukkan bagaimana k berubah terhadap T, maka koefisien tersebut dapat diperkirakan dengan menarik garis lurus antara suhu - suhu yang dibahas dan mengukur kemiringannya (slope).

Maka k_o adalah harga hipotesa konduktivitas thermal yang sama dengan tinggi ordinat pada suhu nol. Harga tersebut ditentukan secara grafik dengan meneruskan garis lurus yang menunjukkan konduktivitas thermal sebenarnya, sepanjang daerah suhu yang terbatas melintasi sumbu konduktivitas pada suhu nol.

Dengan pengira - iraan linier terhadap berubahnya konduktivitas thermal terhadap suhu, laju aliran panas dengan cara konduksi melalui dinding datar dari persamaan (3 - 1) menjadi :

$$q_k = - k A \frac{dT}{dL} \qquad \text{(persamaan (3 - 1))}$$

$$\frac{q_k}{A} dL = - k \, dT$$

$$\frac{q_k}{A} \int_0^L dL = - \int_{T_{panas}}^{T_{dingin}} k_o (1 + \beta_k T) \, dT$$

Integrasi menghasilka:

$$\frac{q_k}{A} L = - k_o \, T + \tfrac{1}{2} \beta_k T^2 \Big|_{T_{panas}}^{T_{dingin}}$$

$$\frac{q_k}{A} L = - \left\{ k_o \, (T_{dingin} + \tfrac{1}{2} \beta_k T^2_{dingin}) - k_o \, (T_{panas} + \tfrac{1}{2} \beta_k T^2_{panas}) \right\}$$

$$\frac{q_k}{A} L = k_o \, (T_{panas} + \tfrac{1}{2} \beta_k T^2_{panas}) - k_o \, (T_{dingin} + \tfrac{1}{2} \beta_k T^2{}_{dingin})$$

$$q_k = \frac{A \, k_o}{L} \left\{ (T_{panas} - T_{dingin}) + \tfrac{1}{2} \beta_k (T^2_{panas} - T^2_{dingin}) \right\}$$

Untuk mudahnya dapat ditulis sebagai :

$$q_k = \frac{A\ (T_{panas} - T_{dingin})}{L}\ k_o \left\{ 1 + \tfrac{1}{2}\beta_k (T_{panas} + T_{dingin}) \right\}$$

$$q_k = \frac{\Delta T}{L/_{A\ k_m}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3 - 12)$$

$k_m = k_o \left\{ 1 + \tfrac{1}{2}\beta_k\ (T_{panas} + T_{dingin}) \right\}$, menunjukkan harga rata - rata konduktivitas termal.

Oleh karena itu untuk perubahan k terhadap T yang linier harga konduktivitas thermal dalam persamaan (2 - 2) harus ditentukan pada suhu rata - rata, yaitu :

$$\frac{T_{panas} + T_{dingin}}{2}$$

3.3. STRUKTUR KOMPOSIT

Dalam sub bab ini akan dibahas beberapa contoh struktur kompusit dengan aliran - aliran panas satu demensi. Untuk mempermudah penggunaannya dalam masalah yang praktis, yang biasanya suhu - suhu permukaan pada umumnya tidak di ketahui, maka aliran panas melalui tahanan thermal pada batas - batas struktur akan dibahas pula. Kita akan mengang - gap bahwa pada satu sisinya sistem bersinggungan dengan medium bersuhu tinggi (yaitu sumber panas) yang konstan, se - dang pada sisi lainnya sistem bersinggungan dengan medium bersuhu rendah yang konstan pula.

Pada suatu permukaan tertentu, konduktansi permukaan antara medium dan permukaan dianggap konstan.

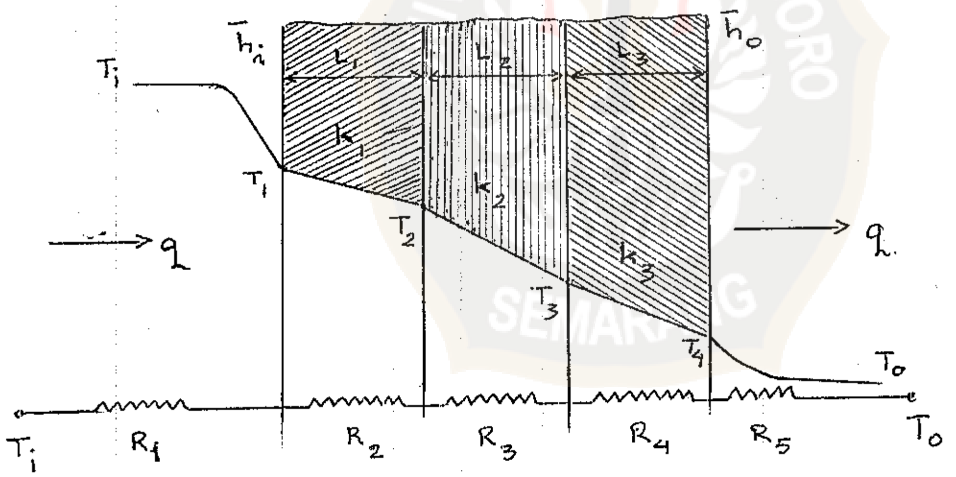
- Dinding komposit

Gambar (3 - 5) menunjukkan dinding komposit dari jenis yang dipergunakan pada tanur berukuran besar.

Lapisan dalamnya bersinggungan dengan gas - gas yang bersuhu tinggi dan terbuat dari bahan bata tahan api. Lapisan antarnya terbuat dari bahan bata isolasi, menyusul lapisan luarnya terbuat dari bahan bata merah biasa.

T_i adalah suhu gas - gas panas dan $\bar{h}_i$ adalah konduktansi permukaan rata - rata di permukaan bagian dalam.

T_o adalah suhu udara di sekitar tanur dan $\bar{h}_o$ adalah konduktansi permukaan rata - rata di permukaan bagian luar.



Gambar (3 - 5).

Dengan syarat-syarat tersebut akan terjadi aliran panas - secara terus-menerus dari gas-gas panas melalui dinding - kesekitarnya. Karena aliran panas melalui luas A yang ter tentu sama besarnya untuk bagian dinding yang manapun, maka kita peroleh :

$$q = \bar{h}_i A (T_i - T_1)$$

$$q = \frac{k_1 A}{L_1} (T_1 - T_2)$$

$$q = \frac{k_2 A}{L_2} (T_2 - T_3)$$

$$= \frac{k_3 A}{L_3} (T_3 - T_4)$$

$$= \frac{k_4 A}{L_4} (T_4 - T_o)$$

$$= \bar{h}_o A (T_4 - T_o) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}13)$$

Simbul-simbul dalam persamaan (3-13) dapat dikenali dengan menyimak : (gambar 3-5).

Persamaan (3-13) dapat ditulis sebagai fungsi tahanan-tahanan termal dari berbagai bagian dinding, sebagai berikut :

$$q = \frac{T_i - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \frac{T_2 - T_3}{R_3} = \frac{T_3 - T_4}{R_4}$$

$$= \frac{T_4 - T_o}{R_5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}14)$$

Tahanan-tahanan tersebut dapat ditentukan dari persamaan (2-3) dan (3-13) atau dengan membandingkan suhu-suhu yang berpasangan dalam persamaan (3-13) dan (3-14).

Penyelesaian persamaan (3-14) untuk berbagai beda suhunya diperoleh :

$$T_i - T_1 = q\, R_1$$

$$T_1 - T_2 = q\, R_2$$

$$T_2 - T_3 = q\, R_3$$

$$T_3 - T_4 = q\, R_4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}15)$$

$$T_4 - T_o = q\,R_5$$

Penjumlahan ruas kiri dan ruas kanan persamaan-persamaan ini menghasilkan :

$$T_i - T_o = q\,(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \;\ldots\ldots\; (3\text{-}16)$$

atau :

$$q = \frac{T_i - T_o}{\sum_{n=1}^{n=5} R_n} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3\text{-}17)$$

Hasil yang dinyatakan oleh persamaan (3-17), yaitu bahwa aliran panas/kalor melalui kelima bagian tersusun seri tersebut sama dengan potensial suhu keseluruhan dibagi - jumlah tahanan termal pada lintasan aliran panas/kalor, - dapat pula diperoleh dari rangkaian termal yang ditunjukkan dalam (gambar 3-5).

Persamaan (3-17) dapat langsung ditulis dengan menggunakan Analogi aliran panas/kalor dan aliran listrik.

Dalam banyak pentrapannya dalam praktek dijumpai - kombinasi lintasan-lintasan aliran panas yang terhubung - seri dan terhubung paralel.

Contoh dalam hal ini ialah dinding komposit yang ditunjukkan pada (gambar 3-6).

Penyelesaian secara pengira-iraan dapat diperoleh dengan anggapan bahwa aliran panas pada hakekatnya bersifat satu dimensi. Maka dinding komposit itu dapat dibagi dalam tiga bagian. Tahanan termal masing-masing bagian dapat di - tentukan dengan bantuan rangkaian termal yang ditunjukkan dalam (gambar 3-6).

Lapisan antaranya terdiri atas dua lintasan termal para - lel yang terpisah dan konduktansi termalnya sama dengan - jumlah konduktansi masing-masing lintasan. Untuk bagian - dinding yang tingginya $(b_1 + b_2)$.

(gambar 3-6) konduktansinya adalah :

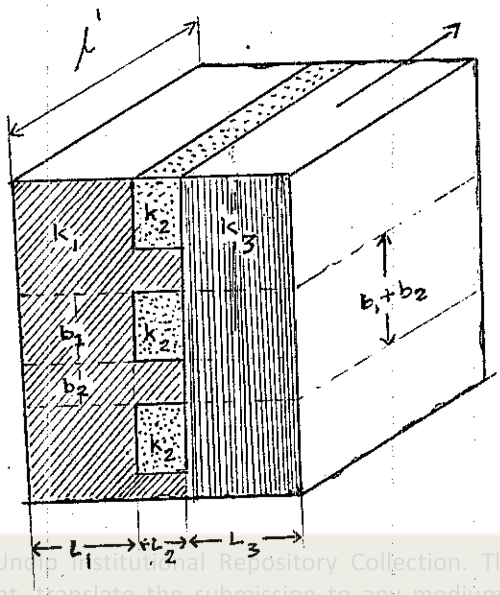
$$K_2 = \frac{k_2\ b_1}{L_2} + \frac{k_1\ b_2}{L_2} = \frac{1}{R_2}$$

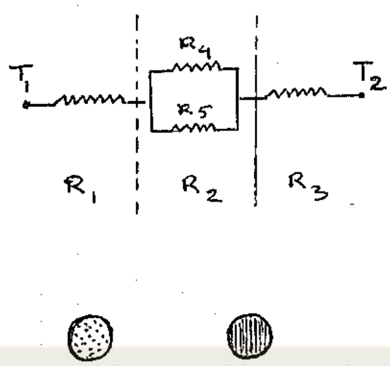
Dengan mempergunakan persamaan (2-24) konduktansi satuan keseluruh μ dari permukaan ke permukaan adalah :

$$\mu = \frac{1}{(b_1 + b_2)\ (R_1 + R_2 + R_3)}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{L_1}{k_1} + \dfrac{b_1 + b_2}{(k_1\ b_2/L_2) + (k_2\ b_1/L_2)} + \dfrac{L_3}{k_3}}$$

(gambar 3-6)





- Silinder konsentrik

Aliran panas radial melalui silinder-silinder konsentrik yang konduktivitas termalnya berbeda-beda dijumpai pada banyak Instalasi Industri.
Contoh yang khas dari soal demikian adalah pipa yang diisolasi, dengan fluida panas yang mengalir didalamnya, dan yang bersinggungan dengan zat yang lebih dingin di luarnya, (gambar 3-7).
Jika pipa tersebut relatif panjang, maka aliran panas melalui dinding akan terjadi dalam arah radial.
Dalam keadaan ajeg, laju aliran panas melelui tiap bagian sama besarnya dan diberikan oleh :

$$q = 2\pi r_1 L h_i (T_i - T_1)$$

$$= \frac{T_{panas} - T_1}{R_1} \quad ; \text{ untuk permukaan dalam.}$$

dari
pers (3 - 6)

$$q = \frac{2\pi k_1 l}{\ln (r_2/r_1)} (T_1 - T_2)$$

$$= \frac{T_1 - T_2}{R_2} \quad ; \text{ untuk silinder dalam.}$$

dari
pers (3 - 6)

$$q = \frac{2\pi k_2 l}{\ln (r_3/r_2)} (T_2 - T_3)$$

$$= \frac{T_2 - T_3}{R_3} \quad ; \text{ untuk silinder luar.}$$

$$q = 2\pi r_3 l \bar{h}_o (T_3 - T_o)$$

$$= \frac{T_3 - T_{dingin}}{R_4} \quad \text{; (untuk permukaan luar.).}$$

Dalam kebanyakan p enerapan pada praktek suhu fluida di dalam dan suhu zat di sekitar isolasi diketahui atau ditetapkan. Suhu - suhu antara dihilangkan (dieliminasi) dengan penjumlahan suku-suku beda suhu dan tukar-menukar - tempat.

Maka rumus yang dihasilkan untuk laju aliran panas mela - lui dua silinder yang konsentrik menjadi :

$$q = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{2\pi r_1 L \bar{h}_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} + \frac{1}{2\pi r_3 L \bar{h}_o}}$$

$$= \frac{T_{panas} - T_{dingin}}{\sum_{n=1}^{n=4} R_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}18)$$

koefisien perpindahan panas keseluruhan μ untuk sistim - ini dapat didasarkan pada luas yang mana saja, tetapi harga/nilainya akan bergantung pada luas yang dipilih karena di dalam praktek garis tengah luar paling mudah diukur maka biasanya sebagai luas dasar dipilih $A_o = 2\pi r_3 L$ dan laju aliran panas adalah :

$$q = \mu A_o (T_{panas} - T_{dingin})$$

Koefisien perpindahan panas keseluruhan adalah :

$$\mu = \frac{1}{\dfrac{r_3}{r_1 h_1} + \dfrac{r_3 \ln(r_2/r_3)}{k_1} + \dfrac{r_3 \ln(r_3/r_2)}{k_2} + \dfrac{1}{h_o}}$$

.... (3 - 19)

- Tebal kritik isolasi

Pemasangan isolasi di sekeliling pipa atau kawat kecil tidak selalu mengurangi proses perpindahan panas.
Pada pembahasan sebelumnya telah dicatat bahwa laju aliran panas radial melalui silinder berlubang berbanding terbalik dengan logaritma jari - jari luar dan laju pembuangan panas dari permukaan luar berbanding lurus dengan jari - jari dalam, pembesaran jari - jari luar (misalnya dengan adanya tebal isolasi) akan memperbesar tahanan thermal pada permukaan luar secara linier terhadap jari - jari luar tersebut. Karena tahanan thermal sebanding dengan jumlah kedua tahanan ini, maka laju aliran panas dapat bertambah jika isolasi dipasang pada pipa kawat yang telanjang .
Jika tebal isolasi terus dinaikan, maka kerugian panas akan berangsur - angsur berkurang sesuai dengan kenaikan tebal isolasi sampai menjadi lebih kecil dari kerugian panas yang disebabkan oleh kawat telanjang.
Prinsip ini banyak digunakan secala luas dibidang;

- teknik listrik, pada kabel yang mengalirkan arus dibalut dengan maksud tidak untuk mengurangi kerugian panas, tetapi justru untuk menambahnya.

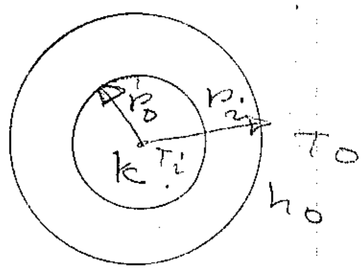
- juga penting di bidang teknik pendinginan tempat aliran panas ke zat pendingin harus diusahakan sekecil - kecilnya.

ris tengah kecil, pengisolasian permukaan luarnya akan meningkatkan laju aliran panas.

Hubungan antara perpindahan panas/kalor dan tebal isolasi dapat dipelajari secara kwantitatif dengan bantuan persamaan (3 - 18). Pada banyak keadaan dijumpai dalam praktek, tahanan termalnya terpusat pada isolasi dan pada permukaan luar. Karena itu persamaan (3 - 18) disederhanakan dengan menganggap T_i adalah suhu pada permukaan dalam isolasi. Syarat batas ini berlaku untuk kawat listrik berisolasi yang suhu permukaan luarnya T_i ditentukan oleh kerapatan arus, ukuran kawat dan bahannya.

Maka :

$$q = \frac{2\pi k\,(T_i - T_o)}{\ln(r_o/r_i) + k/h_o r_o} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3 - 20)$$



r_o : Jari - jari luar

r_i : Jari - jari dalam

k : Konduktivitas termal isolasi

h_o : Konduktansi satuan pada permukaan luar

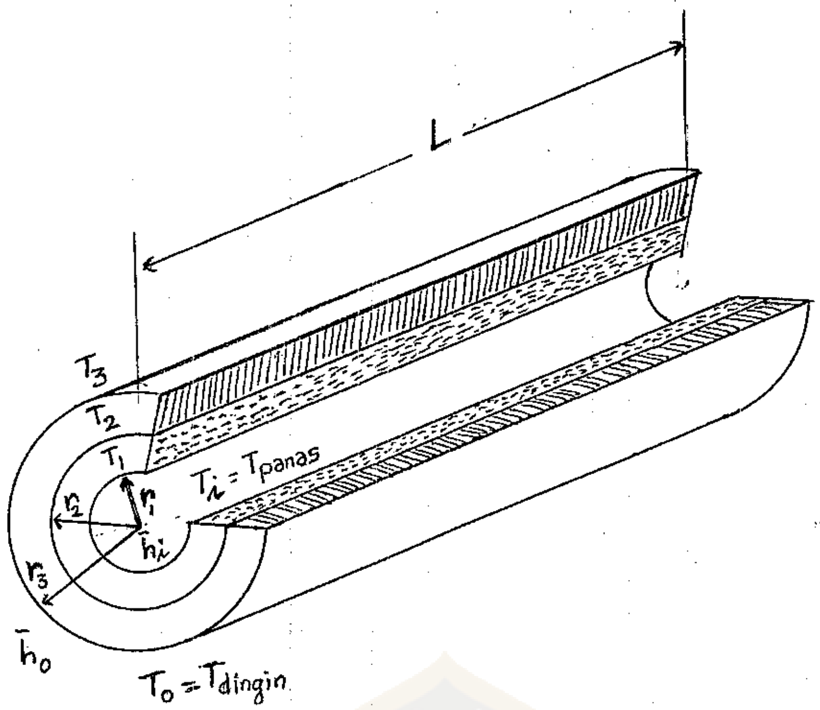
Untuk harga r_i yang tetap, laju aliran panas/kalor adalah fungsi r_o, yaitu ;

$$q = q(r_o)$$

dan akan menjadi maksimum pada harga r_o dengan ;

$$\frac{dq}{dr_o} = \frac{-2\pi k\,(T_i - T_o)\left[(1/r_o) - (k/h_o r_o^2)\right]}{\left[\ln(r_o/r_i) + k/h_o r_o\right]^2} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3 - 21)$$



Gambar (3 - 7).

3.4. SISTEM DENGAN SUMBER PANAS.

Sistem denga sumber panas akan banyak dijumpai diberbagai cabang perekayasaan. Contoh - contoh yang khas antara lain; kumparan listrik, pemanas tahanan, reaktor nuklir dan pembakaran bahan bakar di atas tanur ketel. Pembuangan panas dari sumber sumber panas dalam juga merupakan pertimbangan yang penting dalam menetapkan daya nominal motor listrik, generator dan transformator. Dalam sub bab ini akan dibahas dua kasus yang sederhana, yaitu konduksi panas keadaan ajeg di dalam pelat datar dan pada silinder berpenampang lingkaran dengan pembangkit panas dalam yang seragam.

- Pelat datar dengan sumber panas yang terbagi secara seragam.

Perhatikan sebuah pelat datar yang terdapat pembang kit panas yang seragam. Pelat tersebut dapat berupa elemen pemanas seperti rel (bus bar, juga dikenal dengan palang galang) datar tempat panas dibangkitkan dengan mengalirkan arus listrik melaluinya.

Jika dianggap bahwa terdapat keadaan ajeg, bahannya homogen dan pelat itu cukup besar sehingga pengaruh ujung - ujungnya dapat diabaikan, maka persamaan energi untuk suatu elemen dari pelat tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

" Laju konduksi panas melalui permukaan kiri kedalam elemen di x " + " Laju pembangkit panas di elemen yang tebalnya dx " =

" Laju konduksi panas melalui permukaan kanan keluar rari elemen di x + dx "

Persamaan matematis yang bersangkutan adalah :

$$- k A \frac{dT}{dx}\bigg|_{di\ x} + q A dx = - k A \frac{dT}{dx}\bigg|_{di\ x + dx}$$

....................(3 - 22)

q adalah kekuatan sumber panas persatuan volume dan satuan waktu.

Karena ;

$$- k A \frac{dT}{dx}\bigg|_{x + dx} = - k A \frac{dT}{dx}\bigg|_{x} + \frac{d}{dx}\left(- k A \frac{dT}{dx}\bigg|_{x} \right) dx$$

.... (3 - 23)

maka ;

$$q = - \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) \qquad \text{.....................} \quad (3 - 24)$$

Jika konduktivitas termal konstan dan pembangkit panas seragam maka persamaan (3 - 24) dapat disederhanakan menjadi :

$$q = - k \frac{d^2T}{dx^2} \qquad \text{...................} \quad (3 - 25)$$

Penyelesaian persamaan (3 - 25) diselesaikan dengan mengintegrasikan duakali berturut - turut.

Integrasi yang pertama menghasilkan gradien suhu yaitu:

$$= - \frac{q}{k} x + c_1$$

$$\frac{dT}{dx} = - \frac{q}{k} \cancel{x}x + c_1 \qquad \text{...................} \quad (3 - 26)$$

Integrasi kedua menghasilkan distribusi suhu yaitu :

$$T = - \frac{q}{2k} x^2 + c_1 x + c_2 \qquad \text{................} \quad (3 - 27)$$

c_1 dan c_2 adalah konstanta - konstanta integrasi yang di tentukan oleh syarat - sayarat batas.

Jika ditetapkan bahwa suhu pada kedua permukaan adalah T_o maka syarat - syarat batas tersebut adalah $T = T_o$ pada $x = 0$ dan $T = T_o$ pada $x = 2\ L$

Kemudian syarat batas tersebut dimasukkan dalam persamaan (3 - 27), yaitu sebagai berikut :

Untuk $T = T_o$ dan $x = 0 \Longrightarrow T_o = c_2$

$$x = 2\ L \Longrightarrow T_o = -\frac{q}{2k}\,4L^2 + c_1 2L + T_o$$

$$2\ c_1\ L = \frac{q}{2k}\,4L^2$$

$$c_1 = \frac{q\ L}{k}$$

Sehingga persamaan distribusi suhu dapat diperoleh dengan memasukkan harga - harga c_1 dan c_2 yaitu :

$$T = -\frac{q}{2k}x^2 + \frac{qL}{k}\,x + T_o \qquad \text{..............(3 - 28)}$$

atau;

$$T - T_o = \frac{q\ L^2}{2k}\left[2\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

Jadi distribusi suhu yang melintasi pelat tersebut berupa parabola dengan puncak di bidang tengah $x = L$.

Beda suhu antara bidang tengah dan permukaan pelat adalah:

$$T - T_o = \frac{q\ L^2}{2\ k}\left[2\left(\frac{L}{L}\right) - \left(\frac{L}{L}\right)^2\right] = \frac{q\ L^2}{2\ k}$$

$$\left(T - T_o\right)_{maks} = \frac{q\ L^2}{2\ k} \qquad \text{.............. (3 - 29)}$$

Jika pelat tersebut terendam dalam fluida yang suhunya T_s dan konduktansi permukaan pada kedua permukaannya $\bar{h}_o$, maka dalam keadaan ajeg panas yang dibangkitkan di dalam sete - ngah pelat harus mengalir secara kontinue melalui permuka- an yang membatasinya.

Jika dinyatakan secara aljabar untuk satu satuan luas, ma- ka syarat ini adalah :

$$q\ L = -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{di\ x = 0} = \bar{h}_o (T_o - T_s) \ldots\ldots \quad (3 - 30)$$

Suku pertama persamaan (3 - 30) menyatakan laju pembangkit panas dalam pelat dan suku kedua menyatakan laju konduksi panas ke permukaan, serta suku ketiga menyatakan laju ali- ran panas dengan cara konveksi dam radiasi dari permukaan ke medium sekitarnya.

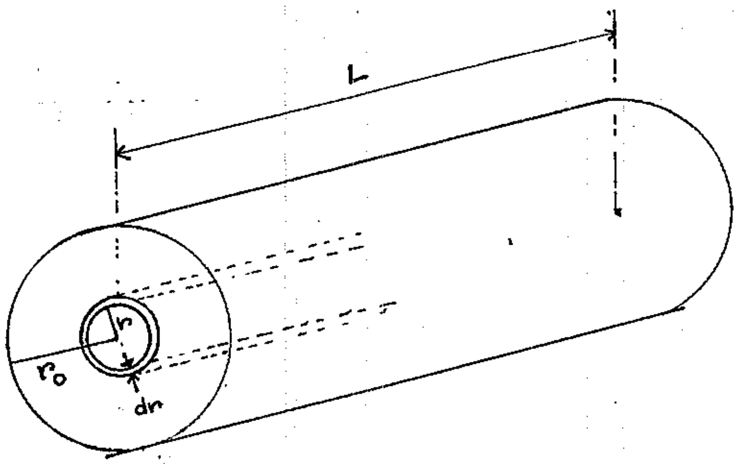
Maka beda suhu ($T_o - T_s$) yang diperlukan untuk perpinda- han panas/kalor dari permukaan tersebut adalah :

$$T_o - T_s = \frac{q\ L}{\bar{h}_o} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3 - 31)$$

- <u>Silinder pejal (solid) yang panjang dengan sumber-sum- ber panas yang terbagi secara seragam</u>.

Persamaan energi untuk elemen berbentuk cincin (gambar. 3-8) yang terbentuk diantara silinder dalam yang berjari - jari r dan silinder luar yang berjari - jari(r + dr) adalah :

$$- k A_r \frac{dT}{dr}\Big| + q\ L\ 2\pi r\ dr = - k A_{r+dr} \frac{dT}{dr}\Big|$$



Gambar (3 - 8).

dengan harga $A_r = 2\pi r\ L$ dan

$$A_{r+dr} = 2\pi(\ r + dr\ )\ L$$

Dan dengan menghubungkan gradien suhu pada r + dr dan gradien suhu pada r diperoleh ;

$$q_r = -\ k\left(\frac{dT}{dr} + r\ \frac{d^2T}{dr^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3 - 33)$$

$$q.r = -k\ (\frac{dT}{dr} + r\ \frac{d^2T}{dr^2}$$

Integrasi persamaan (3 - 33) dapat dilakukan sebaik - baiknya dengan mengingat bahwa :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dT}{dr}.r\right) = \frac{dT}{dr} + r\ \frac{d^2T}{dr^2}.$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\ \frac{dT}{dr}\right) = \frac{dT}{dr} + r\ \frac{d^2T}{dr^2}$$

dan menuliskannya kembali dalam bentuk;

$$q_r r = -\ k\ \frac{d}{dr}\left(r\ \frac{dT}{dr}\right) \quad \Rightarrow q.r = -k\ \frac{d}{dr}\left(r\ \frac{dT}{dr}\right).$$

maka integrasi menghasilkan :

$$\Rightarrow \frac{q.r^2}{2} = -k.r\ \frac{dT}{dr} + C_1$$

2 2

Agarsyarat batas $\frac{dT}{dr} = 0$ pada $r = 0$ dipenuhi, maka konstanta integrasi c_1 harus sama dengan nol ($c_1 = 0$).

$$\frac{q.r^2}{2} = -k.r\frac{dT}{dr}$$

$$\frac{q.r}{2} = -k\frac{dT}{dr}$$

$$\int -\frac{q.r}{2k}\,dr = \int dT \Longrightarrow T = -\frac{q.r^2}{4k} + c_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3-34^*)$$

Agar dip enuhi bahwa suhu pada permukaan luar yaitu pada $r = r_o$, adalah $T = T_o$, maka diperoleh :

$$T_o = -\frac{q\ r_o^2}{4\ k} + c_2$$

$$c_2 = T_o + \frac{q\ r_o^2}{4\ k}$$

Sehingga setelah c_2 dimasukkan dalam persamaan (3 - 34*) diperoleh :

$$T = -\frac{q\ r^2}{4\ k} + T_o + \frac{q\ r_o^2}{4\ k}$$

$$T = T_o + \frac{q\ r_o^2}{4\ k}\left[1 - \left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3-35)$$

Persamaan (3 - 35) ini merupakan persamaan distribusi suhu dengan nilai maksimumnya adalah :

$$T_{maks} = T_o + \frac{q\ r_o^2}{4\ k}$$

5. SISTEM KONDUKSI - KONVEKSI

Kalor/panas yang dihantarkan melalui suatu benda sering harus dibuang, pembuangan kalor/panas tersebut dengan cara konveksi.

Sebagai contoh suatu sirip yang bersinggungan dengan fluida lingkungan yang suhunya T_s (gambar,3 - 9). Suhu pada dasar sirip T_o, luas penampang sirip A dan kelilingnya P seragam serta terbuat dari bahan dengan konduktivitas k seragam pula dan koefisien perpindahan panas bersihnya $\bar{h}$.

Dengan mengambil pendekatan terhadap masalah dibuat neraca aliran panas/kalor untuk elemen sirip setebal dx.

Sehingga proses yang terjadi dapat dituliskan sebagai berikut :

" Panas /kalor mengalir dengan cara konduksi melalui permukaan sebelah kiri elemen, dan akan keluar melalui permukaan sebelah kanan dengan cara yang sama serta panas / kalor akan mengalir pada batang sirip dengan cara konveksi ".

Dengan persamaan dapat dituliskan :

-. Laju aliran panas/kalor masuk: $q_x = -k\ A \frac{dT}{dx}$

-. Laju aliran panas/kalor keluar: $q_{x+dx} = -k\ A \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+dx}$

-. Laju aliran panas/kalor konveksi: $q_c = \bar{h}\ P\ dx\ (T - T_s)$

Karena;

$$q_x = q_{x+dx} + q_c$$

maka :

$$-kA\frac{dT}{dx} = -kA\frac{dT}{dx}\bigg|_{x+dx} + \bar{h}\,P\,dx\,(T - T_s)$$

$$-kA\frac{dT}{dx} = \left[-kA\frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx}\left(-kA\frac{dT}{dx}\right)dx\right] + \bar{h}P\,dx\,(T - T_s)$$

.... (3 - 36)

Dengan menggabungkan besaran - besaran dalam persamaan tersebut diperoleh;

$$-kA\frac{dT}{dx} = -kA\frac{dT}{dx} - kA\frac{d^2T}{dx^2}\,dx + \bar{h}\,P\,(T - T_s)\,dx$$

$$kA\frac{d^2T}{dx^2}\,dx = \bar{h}\,P\,(T - T_s)\,dx$$

masing - masing unsur dibagi dengan dx diperoleh;

$$kA\frac{d^2T}{dx^2} = \bar{h}\,P\,(T - T_s)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\bar{h}\,P}{k\,A}(T - T_s)$$

dan dengan mengambi pemisalan $m^2 = \frac{\bar{h}\,P}{k\,A}$ maka :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = m^2\ (T - T_s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3 - 37)$$

Persamaan (3 - 37) ini merupakan bentuk baku dari persamaan defrensial linier biasa orde dua.

Dengan menganggap $\theta = T - T_s$, maka persamaan menjadi;

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = m^2\,\theta$$

$D^2 - m^2 = 0$

$(D-m)(D+m)$

dengan penyelesaian umumnya:

$$\theta = c_1\, e^{-mx} + c_2\, e^{mx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3 - 38)$$

c_1 dan c_2 adalah konstanta - konstanta integritas yang harga - harganya ditentukan dari syarat - syarat batasnya yaitu :

Untuk $T = T_o$ pada $x = 0$, yaitu suhu pada dasar/permukaan elemen sama dengan suhu pada permukaan yang ditempeli oleh sirip tersebut.

Sehingga syarat batas menjadi :

$$\theta = \theta_o = T_o - T_s \quad , \text{ pada } x = 0$$

masukkan dalam persamaan (3 - 38), didapatkan :

$$T_o - T_s = c_1\, e^{(m)0} + c_2\, e^{-(m)0}$$

$$\ldots\ldots \quad (3 - 39)$$

Kondisi batas lainnya tergantung dari keadaan fisik / ujud dari bahan bersangkutan.

Sebagai gambaran diberikan beberapa kasus dari keadaan tersebut, yaitu:

Kasus I : Panjang batang tak hingga, maka suhu batang akan mendekati suhu fluida lingkungan.

Sehingga syarat batasnya dapat dituliskan;

$$T = T_s \quad \text{pada} \quad x \longrightarrow \infty$$

Dengan memasukkan syarat batas tersebut dalam persamaan (3 - 38) diperoleh :

$$T - T_s = 0 = c_1 e^{m\infty} + c_2 e^{-m\infty} \quad \text{.........} \quad (3 - 40)$$

Karena sukau kedua sama dengan nol, maka syarat batas dipenuhi hanya jika $c_1 = 0$, sehingga dengan memasukkan $c_1 = 0$ dalam persamaan (3 - 39) diperoleh :

$$c_2 = T_o - T_s$$

Dan distribusa suhu akan menjadi :

$$T - T_s = (T_o - T_s) e^{-mx} \quad \text{...........} \quad (3 - 41)$$

Laju aliran panas dari sirip ke fluida dapat diperoleh dengan dua cara, yaitu :

Panas mengalir dari akar sirip dengan cara konduksi dan diteruskan dari permukaan batang ke fluida dengan cara konveksi.

Catatan : $m^2 = \frac{\bar{h} P}{kA}$

Maka : $\int_0^\infty \bar{h} P (T - T_s)\, dx = \int_0^\infty \bar{h} P (T_o - T_s)\, e^{-mx}\, dx$

$$= -\frac{\bar{h} P}{m} (T_o - T_s)\, e^{-mx} \Big|_0^\infty = \sqrt{\bar{h} P k A}\, (T_o - T_s).$$

$$q_{sirip} = - k A \frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = \int_0^\infty \bar{h} P (T - T_s)\, dx$$

$$= - k A \frac{d}{dx} \left(T - T_s \right)\Big|_{x=0} = \int_0^\infty \bar{h} P (T - T_s)\, dx$$

$$= - k A \frac{d}{dx} (T_o - T_s)\, e^{-mx} \Big|_{x=0} = \sqrt{\bar{h} P kA}\, (T_o - T_s)$$

$$= - k A \left[-m (T_o - T_s)\, e^{-m0} \right] = \sqrt{\bar{h} P kA}\, (T_o - T_s)$$

...............(3 - 42)

Kasus II : Jika panjang batang terbatas, tetapi kerugian panas dari ujung batang diabaikan, atau jika ujung batang berisolasi.

Maka syarat batas kedua ini mengharuskan gradien suhu pada $x = L$ mempunyai harga nol atau $\frac{dT}{dx} = 0$ pada $x = L$.

Sehingga dengan syarat ini didapatkan harga - harga c_1 dan c_2 adalah :

$$c_1 = \frac{T_o - T_s}{1 + e^{2mL}} \qquad \text{dan} \qquad c_2 = \frac{T_o - T_s}{1 + e^{-2mL}}$$

Dan penyelesaian lengkap untuk distribusi suhunya adalah :

$$T - T_s = (T_o - T_s) \left[\frac{e^{-mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{mx}}{1 + e^{-2mL}} \right] \quad ....$$

Atau :

$$\frac{T - T_s}{T_o - T_s} = \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} + \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3 - 44)$$

Sesuai dengan fungsi hiperbalikus bahwa;

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \text{dan} \qquad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

serta;

$$\mathrm{tgh}\ x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

Maka persamaan (3 - 44) dapat dibawa kebentuk fungsi hiperbolikus yaitu :

$$\frac{T - T_s}{T_o - T_s} = \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} + \frac{e^{mx}}{1 + e^{2ml}}$$

$$= \frac{e^{mL} \cdot e^{-mx}}{e^{mL}\,(1 + e^{-2mL})} + \frac{e^{-mL} \cdot e^{mx}}{e^{-mL}\,(1 + e^{2mL})}$$

$$= \frac{e^{m(L - x)}}{e^{mL} + e^{-mL}} + \frac{e^{-m(L - x)}}{e^{-mL} + e^{mL}}$$

$$= \frac{e^{m(L - x)} + e^{-m(L - x)}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

$$= \frac{\cosh\left\{m(L - x)\right\}}{\quad} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3 - 44^{*})$$

Laju aliran panas pada batang sirip dapat dicari dari persamaan (3 - 42), dengan memasukkan gradien suhu pada akar sirip (x = 0), yaitu :

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \frac{d}{dx} \left(T_o - T_s \right) \left. \left(\frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} \right) \right|_{x=0}$$

$$= m \left(T_o - T_s \right) \left(\frac{e^{m(0)}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-m(0)}}{1 + e^{-2mL}} \right)$$

$$= m \left(T_o - T_s \right) \left(\frac{1}{1 + e^{2mL}} - \frac{1}{1 + e^{-2mL}} \right)$$

Sehingga diperoleh :

$$q_{batang} = - k A \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$$

$$= - k A \left[m \left(T_o - T_s \right) \left(\frac{1}{1 + e^{2mL}} - \frac{1}{1 + e^{-2mL}} \right) \right]$$

$$= - k A m \left(T_o - T_s \right) \left(\frac{1}{1 + e^{2mL}} - \frac{1}{1 + e^{-2mL}} \right)$$

mengingat $m^2 = \frac{\bar{h} P}{k A} \Longrightarrow m = \sqrt{\frac{\bar{h} P}{k A}}$

maka :

$$q_{batang} = - k A \sqrt{\frac{\bar{h} P}{k A}} \left(T_o - T_s \right) \left(\frac{1}{1 + e^{2mL}} + \frac{1}{1 + e^{-2mL}} \right)$$

$$q_{batang} = -\sqrt{\bar{h}\ P\ k\ A}\ (T_o - T_s)\left(\frac{1}{1 + e^{2mL}} - \frac{1}{1 + e^{-2mL}}\right)$$

.... (3 - 45)

Dalam bentuk fungsi hiperbolikus :

$$\frac{1}{1 + e^{2mL}} - \frac{1}{1 + e^{-2mL}} = \frac{1}{\frac{e^{-mL} + e^{mL}}{e^{-mL}}} - \frac{1}{\frac{e^{mL} + e^{-mL}}{e^{mL}}}$$

$$= \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} - \frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

$$= \frac{e^{-mL} - e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

$$= \frac{-(e^{mL} - e^{-mL})}{(e^{mL} + e^{-mL})}$$

Catatan :

$$\text{Sinh} . = \frac{e^{mL} - e^{-mL}}{2} \quad \text{dan} \quad \cosh L = \frac{e^{mL} + e^{-mL}}{2}$$

$$\tanh L = \frac{\sinh L}{\cosh L} = \frac{e^{mL} - e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

Dengan memasukkan harga - harga di atas kedalam persamaan (3 - 45) maka diperoleh :

$$q_{batang} = \sqrt{\bar{h}\ P\ k\ A}\ (T_o - T_s)\ \tanh (mL) \ ....$$