

BAB III

FUNGSI ANALITIK

III.1. FUNGSI FUNGSI PERUBAH KOMPLEK.

Suatu fungsi f yang didefinisikan pada daerah $G \subset \mathbb{C}$ adalah aturan yang mengawankan setiap $z \in G$ dengan suatu bilangan kompleks $w = f(z)$.

$$\begin{aligned}f : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\z &\longrightarrow w = f(z)\end{aligned}$$

G disebut daerah definisi dari f , sedangkan $f(G) = \{f(z) | z \in G\}$ disebut daerah hasil (range) dari f . Apabila G terbuka dan terhubung, maka G disebut domain dari f . Agar suatu fungsi f terdefinisi dengan baik (well defined), maka baik aturan dari f maupun daerah definisinya harus jelas. Jika G sebagai daerah definisi dari f tidak ditentukan, maka G diasumsikan sebagai semua bilangan kompleks yang memberikan harga untuk f . Sebagai contoh, bila hanya disebutkan $f(z) = \frac{1}{z}$, maka diasumsikan $G = \mathbb{C} - \{0\}$, atau f hanya terdefinisi untuk $z \neq 0$.

Pengertian fungsi dari perubah komplex berbeda dengan fungsi dari perubah riil. Dalam sistem bilangan riil setiap fungsi selalu dimaksudkan berharga satu, sedangkan fungsi-fungsi dari perubah komplex tidak selalu demikian. Sebagai contoh, $f(z) = z^{1/2}$ akan memberikan dua harga untuk setiap $z \neq 0$. Fungsi fungsi dengan sifat demikian dibutuh sebagai fungsi berharga banyak. Suatu fungsi berharga banyak dapat dipandang sebagai kumpulan dari fungsi-fung-

maka baik u maupun v tergantung pada perubah riil x dan y

Jadi :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

Dengan demikian setiap fungsi dari perubah komplex dapat dituliskan dalam bentuk dua fungsi riil dari dua perubah riil.

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

Suatu fungsi komplex $w = f(z)$ menyajikan suatu transformasi atau pemetaan dari titik-titik z di bidang Z ke titik-titik $w = u + iv$ di bidang W . Titik $w = f(z)$ disebut juga peta atau bayangan (image) dari z . Untuk menyajikan transformasi oleh f secara grafik, maka dibutuhkan dua bidang komplex, yaitu bidang Z dan bidang W .

Contoh 1.

$$f(z) = 1/z = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \text{ untuk } z \neq 0.$$

Maka :

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Bila dituliskan dalam koordinat kutub :

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\theta) = \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

Maka :

$$u = \frac{1}{r} \cos \theta, \quad v = -\frac{1}{r} \sin \theta$$

Contoh 2.

$f(z) = \ln z$, $z \neq 0$, adalah fungsi berharga banyak.

Karena $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2n\pi)}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, maka

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2n\pi)$$

Dengan mengambil $n = 0$ dan $-\theta_0 < \theta \leq \theta_0 + 2\pi$ dengan θ_0

sembarang, maka :

$$\ln z = \ln r + i\theta, \quad r > 0 \text{ dan } -\theta_0 < \theta \leq \theta_0 + 2\pi$$

menjadi fungsi berharga satu, dan ini adalah cabang dari fungsi berharga banyak $\ln z$. Dengan mengambil harga uta-

ma dari $\theta = \arg z$, maka didapat cabang utama dari $\ln z$,
yaitu : $\ln z = \ln r + i\theta$, $r > 0$ dan $-\pi < \theta \leq \pi$

Contoh 3.

$f(z) = z^{1/2} = r^{1/2} \text{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{2} \right)$, $k = 0, 1$ mempunyai dua
harga untuk setiap $z \neq 0$. Bila diambil $k = 0$ dan membata-
si θ dengan $\theta_0 < \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, maka didapat cabang dari
 $f(z) = z^{1/2}$, ialah :

$$z^{1/2} = r^{1/2} \text{cis} \frac{\theta}{2}, \quad \theta_0 < \theta \leq \theta_0 + 2\pi$$

Untuk $\theta_0 = -\pi$ didapat cabang utama dari f .

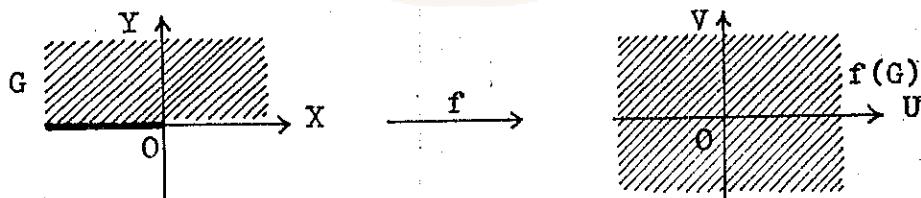
Contoh 4.

Transformasi $w = f(z) = z^2$ bukanlah transformasi satu-sa-
tu, karena $f(z) = f(-z)$. Jika $z = r \text{cis} \theta$, maka :

$$-z = -r \text{cis} \theta = r \text{cis} \theta \cdot \text{cis} \pi = r \text{cis} (\theta + \pi)$$

Sehingga bila f didefinisikan pada $G = \{re^{i\theta} \mid a < \theta \leq b\}$
untuk $b - a \leq \pi$, maka transformasi menjadi satu-satu.

Misalkan $G = \{re^{i\theta} \mid 0 < \theta \leq \pi\}$, maka $f(G) = \mathbb{C}$ dan tran-
formasi adalah satu-satu.



II.2. LIMIT DAN KONTINUITAS.

DEFINISI.

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ apabila untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$

sedemikian hingga untuk setiap z dimana $0 < |z - z_0| < \delta$
berlaku $|f(z) - L| < \epsilon$.

Apabila $N_\delta(z_0)$ dan $N_\epsilon(L)$ berturut-turut adalah su-
tu sekitar dari z_0 dengan jari-jari δ dan sekitar dari L
dengan jari-jari ϵ , maka menurut definisi di atas f harus

terdefinisi di $N_\delta(z_0)$ kecuali mungkin di z_0 sendiri. Bila G daerah definisi dari f , maka definisi limit di atas berlaku jika z_0 titik interior dari G sedemikian hingga $N_\delta(z_0) \subset G$. Walau demikian, jika z_0 titik perbatasan dari G , maka pertidaksamaan $|f(z) - L| < \epsilon$ perlu dipenuhi hanya untuk $z \in N_\delta(z_0)$ yang terletak di G .

Seperti halnya limit dari fungsi-fungsi perubah riil, maka jika limit dari f untuk $z \rightarrow z_0$ ada maka harga dari limit itu pastilah tunggal, dan dalam hal ini tidak tergantung dari lintasan mana bagi z untuk mendekati z_0 .

DEFINISI.

Fungsi f kontinu di z_0 apabila untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sedemikian hingga untuk setiap z dimana $|z - z_0| < \delta$ berlaku $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Perlu diperhatikan bahwa dalam definisi diatas f harus terdefinisi di $N_\delta(z_0)$ termasuk di z_0 sendiri.

Sehingga bila f kontinu di z_0 , maka berlaku :

1. $f(z_0)$ ada
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ada
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada daerah G , jika f kontinu di setiap titik $z \in G$.

THEOREMA 3.1.

Jika $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ dan $w_0 = u_0 + iv_0$, maka $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ jika hanya jika

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x,y) = u_0 \quad \text{dan} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x,y) = v_0$$

Fungsi $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ kontinu di $z_0 = x_0 + iy_0$ jika hanya jika $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ kontinu di z_0 .

THEOREMA 3.2.

Jika $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L_1$ dan $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_2$, maka berlaku

$$1. \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = L_1 + L_2$$

$$2. \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z).g(z)) = L_1 \cdot L_2$$

$$3. \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)/g(z)) = L_1/L_2, \text{ untuk } L_2 \neq 0.$$

AKIBAT.

Jika f dan g fungsi-fungsi yang kontinu di z_0 , maka $f + g$ dan $f \cdot g$ kontinu di z_0 , sedangkan f/g kontinu di z_0 jika $g(z_0) \neq 0$.

THEOREMA 3.3.

Jika f dan g berturut-turut didefinisikan pada G_1 dan G_2 , dimana $f(G_1) \subset G_2$. Maka jika f kontinu di $z_0 \in G_1$ dan g kontinu di $f(z_0) \in G_2$ maka $g \circ f$ juga kontinu di z_0 .

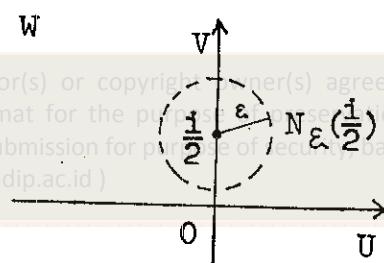
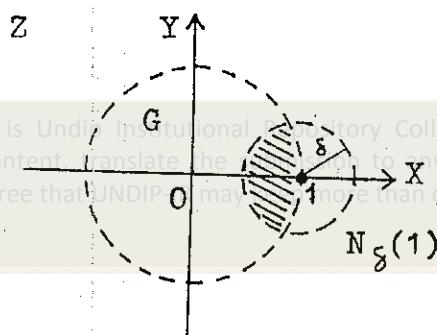
Contoh 1.

Bila $f(z) = \frac{iz}{2}$ didefinisikan pada $G = \{z \mid |z| < 1\}$, maka akan diperlihatkan $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = i/2$.

Titik $z = 1$ adalah titik perbatasan dari G , dan f tidak di definisikan di $z = 1$ karena $1 \notin G$. Dengan mengambil sembarang $\epsilon > 0$ maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk $0 < |z - 1| < \delta$ dengan $z \in G$, berlaku :

$$\left| \frac{iz}{2} - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{i}{2} \right| |z - 1| = \frac{1}{2} |z - 1| < \frac{\delta}{2}$$

Dengan mengambil $\delta = 2\epsilon$, maka jelas bahwa $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \frac{i}{2}$



Contoh 2.

Bila $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$, maka $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ tidak ada. Sebab :

Jika $z \rightarrow 0$ sepanjang sumbu riil, maka $\bar{z} = z$. Sehingga

$$\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z}/z = \lim_{z \rightarrow 0} 1 = 1$$

Jika $z \rightarrow 0$ sepanjang sumbu imaginer, maka $\bar{z} = -z$. Sehingga

$$\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z}/z = \lim_{z \rightarrow 0} (-1) = -1$$

Karena harga kedua limit tidak sama, maka $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ tidak ada.

Contoh 3.

Cabang utama dari $f(z) = \ln z$, yaitu :

$\ln z = \ln r + i\theta$, $r > 0$ dan $-\pi < \theta \leq \pi$
 tidak kontinu di sepanjang sumbu riil negatif. Sebab setiap titik $z = -x$ ($x > 0$) mempunyai argumen sebesar π . Sedangkan setiap titik $z \in N_\delta(-x)$, $\delta > 0$, yang terletak di bawah sumbu riil negatif mempunyai argumen yang mendekati $-\pi$. Sehingga $\operatorname{Im} f(z) = v(r, \theta) = \theta$ tidak kontinu di $z = -x$. Dengan demikian cabang utama dari $\ln z$ tidak kontinu di sepanjang sumbu riil negatif.

Contoh 4.

$f(z) = \frac{z^2 + 4}{z - 2i}$ tidak kontinu hanya di $z = 2i$.

Bila sekarang didefinisikan :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 + 4}{z - 2i}, & \text{untuk } z \neq 2i \\ 4i, & \text{untuk } z = 2i \end{cases}$$

Maka f akan kontinu di $z = 2i$. Sebab untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sedemikian hingga untuk $|z - 2i| < \delta$ maka

$$\left| \frac{z^2 + 4}{z - 2i} - 4i \right| = \left| \frac{(z - 2i)(z + 2i)}{z - 2i} - 4i \right| = |z - 2i| < \delta$$

Dengan mengambil $\epsilon = \delta$, maka berarti $\lim_{z \rightarrow 2i} f(z) = 4i = f(2i)$, yaitu f kontinu di $z = 2i$.

III.3. DERIVATIF DARI FUNGSI FUNGSI PERUBAH KOMPLEK.

Bila $G \subset \mathbb{C}$ dan didefinisikan fungsi $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, maka derivatif dari f di titik $z_0 \in G$ diberikan dengan persamaan :

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Bila $h = z - z_0$, maka persamaan di atas menjadi

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

DEFINISI.

Fungsi $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ dikatakan differensiabel di titik $z_0 \in G$ apabila $f'(z_0)$ ada. Selanjutnya jika f differensiabel di setiap titik $z \in G$, maka f dikatakan differensiabel pada G

Definisi dari derivatif fungsi perubah komplex tam-pak identik dengan definisi derivatif fungsi perubah riil, tetapi mempunyai perbedaan dalam pengambilan limitnya. Jika pada perubah riil hanya ada dua cara pendekatan, yaitu limit kiri dan limit kanan, maka pada perubah komplex titik z_0 dapat didekati oleh z dari segala arah. Sehingga dapat dipilih lintasan yang mana saja bagi z untuk mendekati z_0 . Jika dapat ditemukan dua lintasan dari z untuk mendekati z_0 yang memberikan dua harga limit yang berbeda, maka dapat dikatakan $f'(z_0)$ tidak ada.

THEOREMA 3.4.

Jika $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ differensiabel di $z_0 \in G$, maka f kontinu di z_0 .

Bukti :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Berarti $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, atau f kontinu di z_0 .

Sebaliknya jika f kontinu di z_0 , maka belum tentu f akan differentiabel di z_0 .

Contoh 1.

Bila $f(z) = z^2$, maka untuk sembarang $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2z + h) = 2z$$

Jadi $f(z) = z^2$ differensiabel

Contoh 2.

Bila $f(z) = |z|^2$, maka :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)(\bar{z}+\bar{h}) - z\bar{z}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\bar{z} + \bar{h} + z \frac{\bar{h}}{h}) \end{aligned}$$

Untuk $z = 0$, maka $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} = 0$. Sedangkan untuk $z \neq 0$.

Jika h riil, maka $\bar{h} = h$. Sehingga untuk $h \rightarrow 0$ harga limit di atas adalah $\bar{z} + z$. Jika h imaginer murni, maka $\bar{h} = -h$. Sehingga harga limit di atas adalah $\bar{z} - z$. Dengan demikian f hanya differensiabel di $z = 0$ saja. Selanjutnya karena bagian riil dan bagian imaginer dari f adalah :

$$u(x,y) = x^2 + y^2, \quad v(x,y) = 0$$

dimana keduanya kontinu di setiap $z \in \mathbb{C}$, maka f kontinu pada \mathbb{C} . Dengan demikian pada $z \neq 0$, f kontinu tetapi tidak differensiabel.

Rumus-rumus derivatif di bawah ini merupakan pengembangan dari definisi derivatif fungsi komplex yang telah diberikan diatas.

Misalkan c suatu konstanta komplex, sedangkan f dan g

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, edit the submission for purpose of presentation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:

$$1. \frac{d}{dz} c = 0 \quad (\text{http://eprints.undip.ac.id})$$

$$2. \frac{d}{dz} c f(z) = c f'(z)$$

$$3. \frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}, \text{ untuk } n \text{ bulat positif}$$

Rumus 3 ini juga berlaku untuk n bulat negatif, asal $z \neq 0$

$$4. \frac{d}{dz} f(z) + g(z) = f'(z) + g'(z)$$

$$5. \frac{d}{dz} f(z) \cdot g(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

$$6. \frac{d}{dz} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z) \cdot g(z) - g'(z) \cdot f(z)}{\{g(z)\}^2}, \quad g(z) \neq 0$$

THEOREMA 3.5.

Apabila $f: G_1 \rightarrow \mathbb{C}$ dan $g: G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ dimana $f(G_1) \subset G_2$.

Jika f differensiabel di $z_0 \in G_1$ dan g differensiabel di $f(z_0) \in G_2$, maka $g \circ f$ differensiabel di z_0 dengan

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

Bukti :

Jika f konstan maka $g \circ f$ juga konstan, sehingga theorem di atas berlaku. Jika $f \neq$ konstan, sedemikian hingga $f'(z_0) \neq 0$

Misalkan $f(z) \neq f(z_0)$ untuk $0 < |z - z_0| < r$. Apabila $0 < |h| < r$, maka $f(z_0 + h) \neq f(z_0)$. Sehingga :

$$\frac{(g \circ f)(z_0 + h) - (g \circ f)(z_0)}{h} = \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{f(z_0 + h) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Karena $\lim_{h \rightarrow 0} f(z_0 + h) - f(z_0) = 0$, maka didapat :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(z_0 + h) - (g \circ f)(z_0)}{h} = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \quad \text{atau}$$

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

Contoh 1.

Polinomial $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ dapat dituliskan sebagai :

$$P(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z), \quad \text{dengan } f_j(z) = a_j z^j, \text{ untuk } j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Untuk sembarang $z \in \mathbb{C}$, maka berlaku :

Contoh 2.

Jika $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, untuk $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Dengan mengambil $g(z) = az + b$ dan $h(z) = cz + d$, maka : $f(z) = g(z)/h(z)$.

$$f'(z) = \frac{h(z).g'(z) - h'(z).g(z)}{\{h(z)\}^2} = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2}$$

$$= \frac{(ad - bc)}{(cz + d)^2}$$

Sehingga f differensiabel untuk $z \neq -d/c$

Contoh 3.

Bila $F(z) = (2z^2 + i)^5$, maka dengan mengambil $f(z) = 2z^2 + i$ dan $g(z) = z^5$ didapat : $F(z) = (g \circ f)(z)$. Sehingga :

$$F'(z) = g'(f(z)).f'(z) = 5(2z^2 + i)^4 \cdot 4z = 20z(2z^2 + i)^4$$

III.4. SYARAT SYARAT CAUCHY RIEMANN.

Bila $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ differensiabel di $z = x + iy$. Misalkan $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ dan $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ dan $h = s + it$.

Pandang : $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$

Bila h riil, maka $h = s$. Maka :

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{f(x+s+iy) - f(x+iy)}{s} \\ &= \frac{u(x+s, y) - u(x, y)}{s} + i \frac{v(x+s, y) - v(x, y)}{s} \end{aligned}$$

Untuk $h = s \rightarrow 0$ didapat :

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) \quad \dots (1)$$

Bila h imaginer murni, maka $h = it$. Maka :

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{f(x+iy+it) - f(x+iy)}{it} \\ &= -i \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t} + \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{t} \end{aligned}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, copy, reformat, or medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:

$$f'(z) = -i \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \quad \dots (2)$$

ri persamaan (1) dan (2) didapat :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{atau}$$

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

Ini adalah syarat-syarat Cauchy Riemann yang akan dipenuhi apabila f differensiabel di titik z . Sedangkan persamaan untuk $f'(z)$ diberikan oleh persamaan (1) maupun (2).

Apabila dituliskan dalam koordinat kutub, sedemikian hingga $f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$, maka syarat-syarat Cauchy Riemann mempunyai bentuk :

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \quad (r \neq 0)$$

$$\text{Sedangkan } f'(z) = (\cos \theta - i \sin \theta)(u_r + i v_r)$$

$$= e^{-i\theta}(u_r + i v_r)$$

Adapun terpenuhinya syarat-syarat Cauchy Riemann di suatu titik tidak menjamin adanya derivatif dari suatu fungsi di titik tersebut. Jadi syarat-syarat Cauchy Riemann adalah syarat perlu tetapi tidak cukup untuk adanya derivatif dari suatu fungsi perubah komplex.

Contoh.

Bila $f(z) = \begin{cases} 0 & , z = 0 \\ (\bar{z})^2/z & , z \neq 0 \end{cases}$

Jika dituliskan dalam koordinat kutub, maka untuk $r \neq 0$,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{r^2 e^{-2i\theta}}{re^{i\theta}} = re^{-3i\theta} = r(\cos 3\theta - i \sin 3\theta)$$

Sehingga :

$$u = r \cos 3\theta, \quad v = -r \sin 3\theta$$

$$u_r = \cos 3\theta, \quad v_r = -\sin 3\theta, \quad u_\theta = -3r \sin 3\theta \text{ dan } v_\theta = -3r \cos 3\theta$$

Dari keempat persamaan terakhir ini maka tampak tidak ada $z = re^{i\theta}$, untuk $r > 0$, yang memenuhi syarat-syarat Cauchy-Riemann. Sehingga f tidak differensiabel di $z \neq 0$.

Sedangkan di $z = 0$, karena $f(0) = 0$, maka $u(0) = v(0) = 0$.

Sehingga syarat-syarat Cauchy Riemann

titik $z = 0$, karena u_x , u_y , v_x dan v_y semuanya berharga nol di titik ini. Selanjutnya :

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{h}}{h} \right)^2$$

Jika h riil, sedemikian hingga $\bar{h} = h$, maka harga limit di atas adalah 1. Tetapi jika h melintasi garis $y = x$, maka $h = x + ix$ dan $\bar{h} = x - ix$. Sehingga limit di atas menjadi :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x - ix}{x + ix} \right)^2 = \lim_{h \rightarrow 0} (-i)^2 = -1$$

Dengan demikian $f'(0)$ tidak ada, sekalipun syarat-syarat Cauchy Riemann dipenuhi di titik $z = 0$.

Theorema di bawah ini menyatakan syarat perlu dan cukup agar suatu fungsi mempunyai derivatif di suatu titik.

THEOREMA 3.6.

Fungsi $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan oleh $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ differensiabel di titik $z \in G$ jika hanya jika u_x , u_y , v_x dan v_y ada dan kontinu serta memenuhi syarat-syarat Cauchy Riemann di titik tersebut.

Bukti :

Misalkan $z = x + iy \in G$, sedemikian hingga $N_r(z) \subset G$ dan $h = s + it \in N_r(0)$.

$$u(x+s, y+t) - u(x, y) = \{u(x+s, y+t) - u(x, y+t)\} + \{u(x, y+t) - u(x, y)\}$$

$$v(x+s, y+t) - v(x, y) = \{v(x+s, y+t) - v(x, y+t)\} + \{v(x, y+t) - v(x, y)\}$$

Dengan menggunakan theorema harga menengah untuk derivatif dari fungsi-fungsi perubah riil, maka untuk setiap $s + it \in N_r(0)$ terdapat $s_1 + it_1 \in N_r(0)$ dengan $|s_1| < |s|$ dan $|t_1| < |t|$, sehingga kedua persamaan di atas menjadi :

$$u(x+s, y+t) - u(x, y) = u_x(x+s_1, y+t) \cdot s + u_y(x, y+t_1) \cdot t$$

$$v(x+s, y+t) - v(x, y) = v_x(x+s_1, y+t) \cdot s + v_y(x, y+t_1) \cdot t$$

Misalkan dibentuk persamaan :

$$\varphi(s, t) = \{u(x+s, y+t) - u(x, y)\} - \{u_x(x, y) \cdot s + u_y(x, y) \cdot t\}$$

$$\psi(s, t) = \{v(x+s, y+t) - v(x, y)\} - \{v_x(x, y) \cdot s + v_y(x, y) \cdot t\}$$

maka didapat :

$$\frac{\varphi(s, t)}{s+it} = \frac{s}{s+it} \{u_x(x+s_1, y+t) - u_x(x, y)\} + \frac{t}{s+it} \{u_y(x, y+t_1) - u_y(x, y)\}$$

$$\frac{\psi(s, t)}{s+it} = \frac{s}{s+it} \{v_x(x+s_1, y+t) - v_x(x, y)\} + \frac{t}{s+it} \{v_y(x, y+t_1) - v_y(x, y)\}$$

Karena u_x, u_y, v_x, v_y ada dan kontinu di $z = x + iy$, maka :

$$\lim_{s+it \rightarrow 0} \frac{\varphi(s, t)}{s+it} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{s+it \rightarrow 0} \frac{\psi(s, t)}{s+it} = 0$$

Mengingat u_x, u_y, v_x, v_y memenuhi syarat-syarat Cauchy Riemann, maka didapat :

$$\begin{aligned} u(x+s, y+t) - u(x, y) &= u_x(x, y) \cdot s + u_y(x, y) \cdot t + \varphi(s, t) \\ &= u_x(x, y) \cdot s - v_x(x, y) \cdot t + \varphi(s, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x+s, y+t) - v(x, y) &= v_x(x, y) \cdot s + v_y(x, y) \cdot t + \psi(s, t) \\ &= v_x(x, y) \cdot s + u_x(x, y) \cdot t + \psi(s, t) \end{aligned}$$

Sehingga :

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{f(x+s, y+t) - f(x, y)}{s+it} \\ &= \frac{u(x+s, y+t) - u(x, y) + i(v(x+s, y+t) - v(x, y))}{s+it} \\ &= u_x(x, y) + i v_x(x, y) + \frac{\varphi(s, t) + i \psi(s, t)}{s+it} \end{aligned}$$

Untuk $h = s + it \rightarrow 0$, maka didapat :

$$f'(z) = u_x(x, y) + i v_x(x, y)$$

Dengan demikian f differensiabel di $z = x + iy$.

This document is undip institutional Repository. It is the post-peer-reviewed version of the article. The copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.

Contoh 1. Jika $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, maka :

$$u = e^x \cos y ; v = e^x \sin y$$

Selanjutnya didapat :

$u_x = e^x \cos y = v_y$ dan $v_x = e^x \sin y = -u_y$
yang ada dan kontinu di setiap $z \in \mathbb{C}$.

Sehingga $f(z) = e^z$ differensiabel pada \mathbb{C} , dan

$$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z.$$

Contoh 2.

$f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ mempunyai deriatif $f'(z) = \frac{1}{2}(1 - 1/z^2)$.

Hal ini dapat juga diperlihatkan dengan cara menggunakan syarat-syarat Cauchy Riemann dalam koordinat kutub.

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\theta + \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\theta.$$

Maka :

$$u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\theta, \quad v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\theta$$

dan didapatkan :

$$u_r = \frac{1}{2}(1 - 1/r^2)\cos\theta = \frac{1}{r}v_\theta$$

$$v_r = \frac{1}{2}(1 + 1/r^2)\sin\theta = -\frac{1}{r}u_\theta$$

yang ada dan kontinu di setiap $z \neq 0$. Sehingga dapat dituliskan :

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-i\theta}(\frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{2r^2}e^{-i\theta}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - 1/z^2) \end{aligned}$$

Contoh 3.

Jika $f(z) = x^2 + iy^2$, maka $u = x^2$ dan $v = y^2$ dan didapat $u_x = 2x$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, dan $v_y = 2y$ yang ada dan kontinu di setiap $z \in \mathbb{C}$. Dengan menggunakan syarat-syarat Cauchy Riemann, maka :

$$u_x = v_y \iff 2x = 2y \iff x = y$$

Sehingga f hanya differensiabel di garis $y = x$, dan pada garis ini berlaku :

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 2x = 2y$$

III.5. FUNGSI ANALITIK.

DEFINISI.

Fungsi f yang didefinisikan pada daerah $G \subset \mathbb{C}$ dikatakan analitik di suatu titik $z_0 \in G$ jika f differensiabel di setiap titik dalam suatu sekitar dari z_0 .

Dengan demikian jika f differensiabel di suatu titik, maka belum tentu f analitik di titik tersebut. Jika G suatu domain dan f differensiabel pada G maka f analitik pada G . Tetapi jika G bukan suatu domain dan disebutkan f analitik pada G , maka dalam hal ini f dimaksudkan differensiabel pada suatu domain yang memuat G . Sebagai contoh, suatu fungsi f akan analitik pada daerah $|z| < 1$, jika f differensiabel pada domain $|z| < 1 + \delta$, untuk $\delta > 0$.

Jika f analitik pada \mathbb{C} , maka f disebut fungsi seluruh. Selanjutnya jika f analitik di setiap titik dalam suatu sekitar dari titik z_0 , kecuali di z_0 sendiri, maka z_0 disebut titik singular dari f .

Jika f dan g analitik pada domain G , maka $f + g$ dan $f \cdot g$ juga analitik pada G , sedangkan f/g analitik pada G asalkan $g(z) \neq 0$, untuk setiap $z \in G$. Selanjutnya jika f analitik pada domain G_1 dan g analitik pada domain G_2 , dimana $f(G_1) \subset G_2$, maka $g \circ f$ juga analitik pada G_1 .

Contoh 1.

Dari contoh-contoh yang telah diberikan di muka, maka :

$f(z) = e^z$ dan polinomial $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ adalah fungsi-fungsi seluruh.

Fungsi $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ tidak differensiabel hanya di $z = 0$, sehingga tidak analitik di $z = 0$. Titik $z = 0$ ini adalah titik singular dari f .

Fungsi $f(z) = |z|^2$ differensiabel hanya di $z = 0$, tetapi

dalam setiap sekitar dari $z = 0$ tidak differensiabel.

Fungsi $f(z) = x^2 + iy^2$ hanya differensiabel di garis $y = x$ tetapi tidak analitik pada garis ini, karena tidak ada suatu sekitar dari suatu titik pada garis $y = x$, dimana f analitik di setiap titik pada sekitar tersebut.

Fungsi $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, untuk $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, differensiabel untuk setiap $z \neq -d/c$. Sehingga f analitik di setiap $z \in \mathbb{C}$, kecuali di $z = -d/c$.

Contoh 2.

Cabang utama dari $\ln z$, yaitu :

$$f(z) = \ln r + i\theta, \quad r > 0 \text{ dan } -\pi < \theta \leq \pi$$

tidak kontinu pada sumbu riil negatif, sehingga tidak differensiabel pada garis ini. Dengan menggunakan syarat-syarat Cauchy Riemann maka $f'(z)$ dapat ditentukan. Karena :

$$u = \ln r, \quad v = -\theta$$

$$\text{maka didapat : } u_r = 1/r = \frac{1}{r} v_\theta \text{ dan } v_r = 0 = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

$$\text{Jadi : } f'(z) = e^{-i\theta} (u_r + iv_r) = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = 1/z.$$

Bila sekarang didefinisikan :

$$f(z) = \ln r + i\theta, \quad r > 0 \text{ dan } -\pi < \theta < \pi$$

maka f differensiabel pada domain ini, karena sumbu riil negatif telah diiris atau telah dikeluarkan dari daerah definisi dari f . Dengan demikian f analitik pada domain ini.

Contoh 3.

Fungsi $g(z) = z^{1/2} = r^{1/2} \text{cis } \frac{\theta}{2}$ yang didefinisikan pada $G = \{re^{i\theta} | r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$ mempunyai komponen riil dan komponen imaginer :

$$u = r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad v = r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for the purpose of security, back-up and preservation:

$$u_r = \frac{1}{2} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{r} v_\theta \text{ dan } v_r = \frac{1}{2} r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{r} u_\theta$$

Dengan demikian $u_r, u_\theta, v_r, v_\theta$ ada, kontinu dan memenuhi

syarat-syarat Cauchy Riemann di setiap $z \in G$. Jadi g differensiabel dan juga analitik pada G .

Bila sekarang diberikan fungsi $f(z) = z^2 + 1$ yang didefinisikan pada $D = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$, maka f adalah suatu polinomial, sedemikian hingga f analitik pada D .

Karena $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im}(z^2 + 1) = 2 \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z > 0$ untuk setiap $z \in D$, dimana ini berarti $f(D)$ terletak di setengah bidang atas dari bidang kompleks, maka : $f(D) \subset G$.

Dengan demikian fungsi komposisi $(g \circ f)(z) = g(z^2 + 1)$ juga analitik pada D .

