

BAB VI

KESIMPULAN

Dari pembahasan di muka, maka dapat disimpulkan :
Transformasi Mobius dengan bentuk umum :

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

merupakan fungsi dari perubah kompleks yang analitik untuk $z \neq -d/c$ dan merupakan transformasi konformal untuk $z \neq -d/c$ dan $z \neq \infty$. Transformasi Mobius merupakan transformasi satu-satu dari $\mathbb{C}_\infty$ ke $\mathbb{C}_\infty$, dan akan memetakan lingkaran, termasuk garis lurus sebagai suatu kejadian khusus dari lingkaran, menjadi lingkaran lagi.

Apabila transformasi Mobius disajikan dalam bentuk perbandingan silang dari empat titik z, z_2, z_3 dan z_4 , dimana z_2, z_3 dan z_4 adalah titik-titik yang berlainan dan z bertindak sebagai variabel, yaitu :

$$f(z) = (z, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{z - z_3}{z - z_4} \right) / \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right)$$

maka akan didapat sifat-sifat istimewa darinya, yaitu :

1. $f(z_2) = 1, f(z_3) = 0$ dan $f(z_4) = \infty$.
2. Suatu lingkaran $\mathcal{P}$ dengan persamaan $\text{Im} (z, z_2, z_3, z_4) = 0$ akan dipetakan oleh f ke $\mathbb{R}$.
3. Apabila $f(z_1)$ berharga riil, maka z_1 terletak pada lingkaran $\mathcal{P} : \text{Im} (z, z_2, z_3, z_4) = 0$.
4. Orientasi dari lingkaran $\mathcal{P}$ di atas adalah (z_2, z_3, z_4) , sedangkan sisi kanan dan sisi kiri dari $\mathcal{P}$ akan dipetakan oleh f secara berturut-turut ke sisi kanan dan sisi kiri dari $\mathbb{R}$ dengan orientasi $(1, 0, \infty)$, yaitu setengah bidang atas dan setengah bidang bawah dari bidang kompleks.

Ada dua cara untuk mencari atau menentukan peta suatu lingkaran oleh suatu transformasi Mobius. Misalkan f suatu transformasi Mobius dan Γ adalah lingkaran yang akan dicari petanya.

1. Dengan mengambil tiga titik sembarang $z_1, z_2, z_3 \in \Gamma$ maka $f(\Gamma)$ adalah lingkaran yang melalui $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$, yaitu lingkaran :

$$\text{Im}(w, f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = 0$$

2. Dengan menggunakan invers dari $w = f(z)$, yaitu $z = f^{-1}(w)$, maka dicari hubungan antara z dan w , dimana $z \in \Gamma$.

Untuk mencari transformasi Mobius yang memetakan lingkaran Γ_1 ke lingkaran Γ_2 , dapat dilakukan dengan cara :

1. Dengan mengambil tiga titik berlainan $z_1, z_2, z_3 \in \Gamma_1$ dan $w_1, w_2, w_3 \in \Gamma_2$, dimana $f(z_j) = w_j$ untuk $j = 1, 2, 3$. Maka transformasi Mobius $w = f(z)$ yang dimaksud adalah

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$$

2. Dengan prinsip Simetri, yaitu dengan mengambil titik $z_1 \in \Gamma_1, z_2 \notin \Gamma_1$ dan $w_1 \in \Gamma_2, w_2 \notin \Gamma_2$ dimana $f(z_j) = w_j$ untuk $j = 1, 2$. Selanjutnya dicari titik simetri dari z_2 terhadap Γ_1 , yaitu z_2^* , serta titik simetri dari w_2 terhadap Γ_2 , yaitu w_2^* . Maka $w = f(z)$ yang dimaksudkan adalah :

$$(w, w_1, w_2, w_2^*) = (z, z_1, z_2, z_2^*)$$

Disamping itu, prinsip simetri mempunyai satu kegunaan yang amat penting, yaitu untuk mendapatkan semua transformasi Mobius yang memetakan Γ_1 ke Γ_2 .

Prinsip orientasi merupakan sarana untuk menentukan pemetaan daerah-daerah di bidang kompleks yang dibatasi

oleh beberapa lingkaran. Dengan memberikan orientasi - orientasi tertentu ke setiap lingkaran dan dengan memperhatikan sisi kanan dan sisi kiri yang sesuai dengan arah lintasan dari setiap lingkaran, maka akan dapat ditentukan peta dari daerah-daerah tersebut oleh sembarang transformasi Mobius.

Dari ringkasan di atas, tampak bahwa pemakaian notasi perbandingan silang (cross ratio) sangatlah bermanfaat, dimana notasi ini dapat dipakai untuk menyatakan persamaan lingkaran maupun bentuk dari suatu transformasi Mobius. Salah satu theorem penting yang menyatakan hubungan antara perbandingan silang dari empat titik dengan suatu transformasi Mobius adalah theorem 5.3.

Sebagai penutup bab ini, perlu ditekankan sekali lagi bahwa isi pembahasan skripsi ini terlepas dari aplikasi dari transformasi Mobius sebagai suatu fungsi dari perubah kompleks yang telah kita ketahui sifat-sifat istimewa dari pemetaannya.