BAB III

KONSEP UMUM PROSES

3.1 PROSES-PROSES YANG INDEPENDEN, ORTHOGONAL DAN TAKBERKORRELASI

3.1.1 VARIABEL RANDOM INDEPENDEN, ORTHOGONAL DAN TAKBERKORRELASI

Pada teori probabilitas, dua event A dan B dikatakan independen, apabila memenuhi syarat yaitu :

$$P(AB) = P(A).\ P(B) \quad \text{............... (3.1-1)}$$

Konsep keindependenan suatu variabel random didasarkan pada pengertian tersebut di atas.

Definisi 3.1.1

Dua variabel random X dan Y adalah independen, apabila event $\{X \leq x\}$ dan event $\{Y \leq y\}$ independen untuk setiap x dan y, yaitu jika memenuhi :

$$P\{X \leq x,\ Y \leq y\} = P\{X \leq x\}.\ P\{Y \leq y\} \quad \text{..... (3.1-2)}$$

Bentuk seperti pada (3.1-2) dapat kita nyatakan dalam bentuk fungsi distribusi, yaitu :

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) . F_Y(y) \quad \text{............. (3.1-3)}$$

Dan jika fungsi distribusi tersebut ada harganya maka dapat diturunkan bentuk :

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) . f_Y(y) \quad \text{............. (3.1-4)}$$

Dengan mengintegralkan (3.1-4) dimana harga x terdefinisi pada (x_1 , x_2) dan y terdefinisi pada (y_1 , y_2) maka :

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx . \int_{y_1}^{y_2} f_Y(y)dy \quad \text{............ (3.1-5)}$$

Untuk dua variabel random X dan Y yang disajikan keduanya dikatakan takberkorrelasi (UNCORRELATED) apabila memenuhi :

$$E\{XY\} = E\{X\}.\ E\{Y\} \quad \text{............. (3.1-6)}$$

Dan variabel random X dan Y dikatakan Orthogonal apabila memenuhi :

$$E\left\{XY\right\} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1\text{-}7)$$

Theorema 3.1.1

Apabila variabel random X dan Y independen, maka variabel random-variabel random tersebut juga takberkorrelasi.

B u k t i :

Dari persamaan (2.3-14) tentang momen serikat yaitu :

$E\left\{X^k\ Y^r\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k\ y^r\ f_{XY}(x,y)\ dx\ dy$, maka dengan mengambil harga k = 1, r = 1 kita mendapatkan :

$$E\left\{X\ Y\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\ y\ f_{XY}(x,y)\ dx\ dy$$

Padahal diketahui bahwa variabel random X dan Y independen, yang artinya memenuhi (3.1-4), oleh karena itu diperoleh :

$$E\left\{X\ Y\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_X(x)\ dx. \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_Y(y)\ dy$$

$= E\left\{X\right\} . E\left\{Y\right\}$, dan memenuhi persamaan (3.1-6), theorema terbukti.

Theorema 3.1.2

Jika variabel random X dan Y takberkorrelasi maka kovarian dan koefisien korelasinya sama dengan nol, yaitu :

$$E\left\{(X - \eta_X)(Y - \eta_Y)\right\} = 0\ ,\ r = 0 \ \ldots\ldots \quad (3.1\text{-}8)$$

B u k t i :

Dari (2.3-22) didapatkan bahwa :

$E\left\{(X - \eta_X)(Y - \eta_Y)\right\} = E\left\{XY\right\} - E\left\{X\right\}.E\left\{Y\right\}$, sedangkan keduanya diketahui takberkorrelasi yang artinya

$E\left\{XY\right\} = E\left\{X\right\} . E\left\{Y\right\}$. Jadi didapat :

$E\left\{(X - \eta_X)(Y - \eta_Y)\right\} = E\left\{XY\right\} - E\left\{XY\right\} = 0$, dan

dari persamaan (2.3-23) diperoleh :

$r = \sigma_{XY}^2 / \sigma_X\ \sigma_Y = 0$, terbukti.

Sekarang kita lihat pada (3.1-8), disini berarti bahwa variabel random ($X - \eta_X$) dan ($Y - \eta_Y$) adalah orthogonal, dikarenakan memenuhi (3.1-7).

Theorema 3.1.3

Jika variabel random X dan Y takberkorrelasi, maka varian jumlahnya sama dengan jumlah varian variabel random-variabel random tersebut, yaitu : $\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$ ....(3.1-9)

<u>B u k t i</u> :

Diketahui variabel random X dan Y takberkorrelasi, menurut (3.1-8) variabel random ($X - \eta_X$) dan ($Y - \eta_Y$) adalah orthogonal, sehingga :

$$E\left\{ [(X-\eta_X)+(Y-\eta_Y)]^2 \right\} = E\left\{ (X-\eta_X)^2 + 2(X-\eta_X)(Y-\eta_Y) + (Y-\eta_Y)^2 \right\}.$$

$$= E\left\{(X-\eta_X)^2\right\} + 2E\left\{(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)\right\} + E\left\{(Y-\eta_Y)^2\right\}.$$

$$= E\left\{(X-\eta_X)^2\right\} + E\left\{(Y-\eta_Y)^2\right\},$$ untuk:

$$E\left\{ [(X-\eta_X)+(Y-\eta_Y)]^2 \right\} = \sigma^2_{X+Y}$$

$E\left\{(X-\eta_X)^2\right\} = \sigma^2_X$ dan $E\left\{(Y-\eta_Y)^2\right\} = \sigma^2_Y$

Jadi diperoleh :

$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$, terbukti.

Selanjutnya, apabila variabel random X dan Y adalah Orthogonal maka menurut di atas didapat :

$$E\left\{(X+Y)^2\right\} = E\left\{X^2\right\} + E\left\{Y^2\right\} \quad .....(3.1-10)$$

3.1.2 VARIABEL RANDOM ORDER n YANG INDEPENDEN, ORTHOGONAL DAN TAKBERKORRELASI

Barisan variabel random $X_1, \ldots, X_n$ dapat dikatakan independen, jika event-event $\{X_1 \leq x_1\}, \ldots, \{X_n \leq x_n\}$ juga independen. Dengan demikian apabila variabel random tersebut fungsi distribusinya ada dan fungsi densitasnya ada masing-masing $F(x_i)$ dan $f(x_i)$ dengan $i = 1, \ldots, n$ maka :

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$
$$f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1-11)$$

Secara jelasnya, apabila variabel random-variabel random $X_1,\ldots,X_n$ independen, maka barisan variabel random tersebut independen secara berpasangan. Sebagai contohnya :

$$f(x_1,x_2,x_3) = f(x_1).\ f(x_2).\ f(x_3)$$

Barisan variabel random $X_1,\ldots,X_n$ dikatakan takberkorrelasi, apabila kovarian dari setiap dua variabel random sama dengan nol, yaitu :

$$E\{X_i\ X_j\} = E\{X_i\}\cdot E\{X_j\} \quad \ldots\ldots\ldots(3.1-12)$$

untuk setiap $i \neq j$.

Dan dikatakan orthogonal apabila :

$$E\{X_i\ X_j\} = 0\ ,\ \text{untuk tiap}\ i \neq j\ \ldots.\ (3.1-13)$$

Selanjutnya apabila variabel random X_i takberkorrelasi, maka varian jumlahnya sama dengan jumlah varian masing-masing X_i. Jadi :

$$\sigma^2_{x_1+\ldots+x_n} = \sigma^2_{x_1} + \ldots + \sigma^2_{x_n} \quad \ldots.(3.1-14)$$

Dengan demikian sesuai dengan (3.1-10) maka variabel random tersebut orthogonal dengan :

$$E\{(X_1+\ldots+X_n)^2\} = E\{X_1^2\}+\ldots+E\{X_n^2\} \quad \ldots..(3.1-15)$$

Kita tinjau untuk variabel random kompleks Z, varian variabel random kompleks ini adalah :

$$\sigma^2_Z = E\{\,|Z - E\{Z\}|^2\} \quad \ldots\ldots..(3.1-16)$$

sedangkan kovarian dari variabel random Z_i dan Z_j adalah :

$$\sigma^2_{Z_iZ_j} = E\{[Z_i - E\{Z_i\}]\,[Z_j^* - E\{Z_j^*\}]\} \quad \ldots\ldots..(3.1-17)$$

Untuk barisan variabel random kompleks $Z_1,\ldots,Z_n$ dikatakan takbrkorrelasi apabila (3.1 - 17) sama dengan nol, yaitu :

$$E\{Z_i Z_j^*\} = E\{Z_i\}.\ E\{Z_j^*\},\ i \neq j \quad \text{........(3.1-18)}$$

Dan barisan variabel random kompleks $Z_1, \ldots, Z_n$ dikatakan orthogonal apabila :

$$E\{Z_i Z_j^*\} = 0 \quad \text{..................(3.1-19)}$$

Misalkan kita ambil $Z_1 = X_1 + iY_1$ dan $Z_2 = X_2 + iY_2$ untuk Z_1 dan Z_2 yang independen maka :

$$f(x_1,y_1;x_2,y_2) = f(x_1,y_1).f(x_2,y_2) \quad \text{.....(3.1-20)}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1-20) maka :

$$E\{Z_1 Z_2^*\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z_1 z_2^*\ f(x_1,y_1)\ f(x_2,y_2)\ dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z_1 f(x_1,y_1)\ dx_1 dy_1 . \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z_2 f(x_2,y_2)\ dx_2 dy_2$$

$$= E\{Z_1\}.\ E\{Z_2^*\} \quad \text{............(3.1-21)}$$

3.1.3 PROSES-PROSES YANG INDEPENDEN, ORTHOGONAL DAN TAKBERKORRELASI

Dua proses $X(t)$ dan $Y(t)$ dikatakan independen apabila kelompok proses $X(t_1),\ldots,X(t_n)$ independen terhadap kelompok proses $Y(t_1'),\ldots,Y(t_m')$ untuk setiap $t_1,\ldots,t_n$ dan $t'_1,\ldots,t'_m$.

Dua proses $X(t)$ dan $Y(t)$ dikatakan takberkorrelasi untuk setiap t_1 dan t_2, apabila :

$R_{XY}(t_1,t_2) = \eta_X(t_1).\eta_Y^*(t_2)$, yang berarti pula kovarian silangnya sama dengan nol, yaitu :

$$C_{XY}(t_1,t_2) = 0 \quad \text{..................(3.1-22)}$$

Sedangkan dua proses $X(t)$ dan $Y(t)$ dikatakan orthogonal apabila korelasi silangnya sama dengan nol yaitu :

$$R_{XY}(t_1,t_2) = 0 \quad \text{..................(3.1-23)}$$

Suatu proses $X(t)$ merupakan suatu proses normal apabila variabel random $X(t_1),\ldots,X(t_n)$ adalah normal secara berserikat untuk setiap n, $t_1,\ldots,t_n$.

Jadi proses $X(t)$ merupakan proses normal haruslah memenuhi bahwa fungsi densitas setiap order adalah normal, tidak cukup bahwa fungsi densitas pertama saja yang normal . Untuk proses normal jika :

$E\{X(t)\} = \eta(t)$ dan $\sigma^2_{X(t)} = C(t,t)$ maka fungsi densitas order pertamanya adalah :

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C(t,t)}} \exp.\left\{-(X - \eta(t))^2/2\, C(t,t)\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1\text{-}24)$$

Contoh 1.

Diberikan suatu proses riil X(t) demgan autokorelasi $R(t_1,t_2)$ dan a = konstanta. Dibentuk suatu proses $Y(t) = X(t + a) - X(t)$. Tentukan autokorelasi dari proses Y(t) !

Jawab :

Untuk maksud soal ini, pertama-tama kita tentukan korelasi silang dari proses X(t) dan Y(t) yaitu;

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1,t_2) &= E\{X(t_1)\,[X(t_2+a) - X(t_2)]\} \\ &= E\{X(t_1)\,X(t_2+a)\} - E\{X(t_1)\,X(t_2)\} \\ &= R\,(t_1,t_2+a) - R\,(t_1,t_2) \quad \ldots\ldots\ 1) \end{aligned}$$

Padahal untuk proses Y(t), autokorelasinya adalah :

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1,t_2) &= E\,\{[X(t_1+a) - X(t_1)]\ Y(t_2)\} \\ &= E\{X(t_1+a)\,Y(t_2)\} - E\{X(t_1)\,Y(t_2)\} \\ &= R_{XY}(t_1+a,t_2) - R_{XY}(t_1,t_2) \quad \ldots\ldots\ldots 2) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan 1) dan 2) maka akan kita dapatkan

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1,t_2) = {} & R\,(t_1+a,t_2+a) - R\,(t_1+a,t_2) - \\ & R\,(t_1,t_2+a) + R\,(t_1,t_2) \end{aligned}$$

Contoh 2.

Diberikan proses $X(t) = a \operatorname{Cos} \omega t + b \operatorname{Sin} \omega t$, dimana a dan b adalah dua variabel random yang independen dan $E\{a\} = E\{b\} = 0$, $E\{a^2\} = E\{b^2\} = \sigma^2$, ω = konstanta. Tentukanlah :

a) $E\{X(t)\}$ c) $f\,(x,y)$

b) $R\,(t\ ,t\ )$ d) r

Jawab :

Proses $X(t_i)$, $i = 1,\ldots,n$ adalah variabel random yang merupakan kombinasi linier dari variabel random a dan b, maka $X(t_i)$ adalah variabel random berserikat .

a). $E\{X(t)\} = E\{a\}\text{Cos}\,\omega t + b\,\text{Sin}\,\omega t = E\{a\}\text{Cos}\,\omega t + E\{b\}\,\text{Sin}\,\omega t = 0$, sebab $E\{a\}=E\{b\} = 0$

Telah diketahui bahwa a dan b variabel random yang independen, menurut theorema 3.1.1 , maka a dan b juga takberkorrelasi, berarti :

$E\{ab\} = E\{a\}.\,E\{b\}= 0$

b).
$$\begin{aligned} R(t_1,t_2) &= E\{X(t_1).X(t_2)\} \\ &= E\{(a\,\text{Cos}\,\omega t_1 + b\,\text{Sin}\,\omega t_1)(a\,\text{Cos}\,\omega t_2 + b\,\text{Sin}\,\omega t_2)\} \\ &= E\{a^2\}\text{Cos}\,\omega t_1\,\text{Cos}\,\omega t_2 + E\{ab\}\,\text{Sin}\,\omega t_1 . \text{Cos}\,\omega t_2 + E\{ab\}\text{Sin}\,\omega t_2 . \text{Cos}\,\omega t_1 + E\{b^2\}\,\text{Sin}\,\omega t_1 . \text{Sin}\,\omega t_2 . \\ &= \sigma^2(\text{Cos}\,\omega t_1\,\text{Cos}\,\omega t_2 + \text{Sin}\,\omega t_1 \text{Sin}\,\omega t_2) \\ &= \sigma^2(\,\text{Cos}\,\omega(t_1 - t_2)\,)\,. \end{aligned}$$

c). $$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C(t,t)}}\ \exp.\left\{-\frac{(X - \eta(t))^2}{2\,C(t,t)}\right\}$$

Kita tahu bahwa mean proses X(t) adalah nol dan variannya σ^2, jadi :

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}}\ \exp.\left\{-\frac{X^2}{2\,\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}\ e^{-(X/\sqrt{2}\sigma)^2} \end{aligned}$$

d). Koefisien korelasi r adalah :

$$r = \frac{E\{[X(t_1) - \eta(t_1)][X(t_2) - \eta(t_2)]\}}{\sqrt{E\{(X(t_1) - \eta(t_1))^2\}.E\{[X(t_2) - \ (t_2)]^2\}}}$$

$$= \frac{R(t_1,t_2)}{\sqrt{R(t_1,t_1)\ R(t_2,t_2)}} = \frac{\sigma^2\,\text{Cos}\,\omega(t_1 - t_2)}{\sqrt{\sigma^2\ \sigma^2}}$$

$= \text{Cos}\,\omega(\,t_1 - t_2\,)$.

3.2 PROSES STASIONER

Proses stochastik $X(t)$ dikatakan stasioner jika semua harga statistiknya tidak berubah karena perubahan waktu dari waktu awalnya. Dalam hal ini berarti bahwa dua proses $X(t)$ dan $X(t+\varepsilon)$ mempunyai harga statistik yang sama untuk setiap ε. Sedangkan untuk dua proses yang harga statistiknya (mean, varian, momen, dan lainnya) tidak sama dikatakan proses non-stasioner.

3.2.1 PROSES STASIONER ORDER SATU

Proses stochastik dikatakan stasioner order satu apabila fungsi densitas order satunya tidak berubah harganya karena pergeseran terhadap waktu awal. Dengan kata lain :

$$f_X(x,t) = f_X(x,t+\varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2\text{-}1)$$

harus benar untuk tiap t dan bilangan riil ε, jika $X(t)$ adalah proses stasioner order satu.

Sebagai akibat (3.2-1) maka $f_X(x,t)$ tidak bergantung pada t, jadi $f_X(x,t) = f_X(x)$, sehingga mean dari proses $X(t)$ adalah konstanta.

$$E\{X(t)\} = \eta = \text{konstanta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.2\text{-}2)$$

Sebagai buktinya kita ambil $X(t_1)$ dan $X(t_2)$ akan mempunyai mean yang sama, demikian :

$$E\{X(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x,t_1)\, dx \quad \ldots\ldots 1)$$

$$E\{X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x,t_2)\, dx \quad \ldots\ldots 2)$$

Misalkan $t_2 = t_1 + \varepsilon$, maka dari 2) didapat :

$E\{X(t_1+\varepsilon)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x,t_1+\varepsilon)\, dx$, menurut persamaan (3.2-1) maka :

$$E\{X(t_1+\varepsilon)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x,t_1)dx = E\{X(t_1)\} = \eta$$

terbukti.

3.2.2 PROSES STASIONER ORDER DUA DAN PROSES STASIONER WIDE SENSE

Proses stochastik dikatakan stasioner untuk order dua apabila fungsi densitas order duanya memenuhi

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon) \quad \text{....(3.2-3)}$$

untuk semua t_1, t_2 dan ε.

Hal ini dapat disimpulkan bahwa fungsi densitas order dua hanya bergantung pada selisih waktu $t_1 - t_2 = \tau$.

Demikian: ambil sembarang $\varepsilon = -t_2$, dari (3.2-3) diperoleh :

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1-t_2)$$

$$= f_X(x_1,x_2;\tau) \quad \text{...........(3.2-4)}$$

Untuk proses yang stasioner pada order dua juga stasioner pada order satu dikarenakan fungsi densitas order dua menentukan fungsi densitas order satu. Jadi bila ada $f_{X_1X_2}(x_1,x_2)$ maka dapat dicari $f_{X_1}(x_1)$ dan $f_{X_2}(x_2)$ yaitu dengan rumus :

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2}(x_1,x_2)\, dx_2$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2}(x_1,x_2)\, dx_1$$

Sekarang dengan $\tau = t_1 - t_2$, persamaan dari (2.3-16) menjadi :

$$R(t_2+\tau,t_2) = E\{X(t_2+\tau)\ X(t_2)\} = E\{X(t+\tau)\ X(t)\}$$

$$= R_X(\tau) = R(-\tau) \quad \text{......... (3.2-5)}$$

Proses X(t) dikatakan stasioner WIDE SENSE bila meannya konstanta dan autokorrelasinya hanya bergantung pada τ, jadi :

$$E\{X(t)\} = \eta = \text{konstanta}$$

$$E\{X(t+\tau)\ X(t)\} = R_X(\tau) \quad \text{........... (3.2-6)}$$

Dua proses stasioner berserikat dalam wide sense bila setiap syarat (3.2-6) dipenuhi dan korelasi silangnya juga hanya bergantung pada τ, yaitu :

$$E\{X(t+\tau)Y(t)\} = R_{XY}(\tau) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2\text{-}8)$$

3.2.3 PROSES STASIONER ORDER n DAN PROSES STASIONER STRICT SENSE

Dengan mengembangkan n proses $X(t_i)$, $i=1,2,\ldots,n$ kita dapat mengatakan proses stochastik stasioner order n jika dipenuhi bahwa fungsi densitas order ke-n invarian terhadap pergeseran waktu awal, yaitu bila :

$$f_X(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = f_X(x_1,\ldots,x_n;t_1+\varepsilon,\ldots,t_n+\varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2\text{-}9)$$

untuk semua $t_1,\ldots,t_n$ dan ε.

Stasioneritas order n menentukan stasioneritas semua order $k \leq n$. Suatu proses stasioner untuk semua order n, $n=1,\ldots$ disebut sebagai proses stasioner STRICT SENSE.

Dengan demikian jelaslah bahwa setiap proses wide sense pasti juga strict sense.

contoh 1.

Apabila a_n variabel random yang takberkorrelasi dengan mean nol, maka proses $X(t) = \sum_{n=1}^{k} a_n e^{i\omega_n t}$ adalah stasioner wide sense dengan mean nol dan autokorrelasi :

$$R(\tau) = E\{X(t+\tau)X^*(t)\} = \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2 e^{i\omega_n t}.$$

<u>Bukti</u> :

Diketahui $E\{a_n\} = 0$ dan variannya dicari dari :

$$\sigma_n^2 = E\{|a_n|^2\} - [E\{|a_n|\}]^2 = E\{|a_n|^2\} - E\{|a_n|\}.E\{|a_n|\}$$

$$= E\{|a_n|^2\} - E\{\sqrt{a_n a_m^*}\}.E\{\sqrt{a_n a_m^*}\} = E\{|a_n|^2\} - E\{a_n . a_m^*\}$$

(karena variabel random a_n takberkorrelasi) juga akan menjadi :

$$\sigma_n^2 = E\{|a_n|^2\} - E\{a_n\} . E\{a_m^*\} \text{ (karena } a_n \text{ takberkorrelasi)}$$

$$\sigma_n^2 = E\{|a_n|^2\}.$$ Kemudian :

$$E\{X(t)\} = E\{\sum_{n=1}^{k} a_n e^{i\omega_n t}\} = \sum_{n=1}^{k} E\{a_n\} e^{i\omega_n t} = 0$$

$$R(\tau) = E\{X(t+\tau)X^*(t)\} = E\{\sum_{n=1}^{k} a_n e^{i\omega_n(t+\tau)} . \sum_{n=1}^{k} a_n^* e^{-i\omega_n t}\}$$

$$= \sum_{n=1}^{k} E\{|a_n|^2\} e^{i\omega_n \tau} = \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2 e^{i\omega_n \tau}.$$

Contoh 2.

Jika variabel random riil a_n dan b_n takberkorelasi dengan mean masing-masing nol dan variannya σ_n^2 maka proses $X(t) = \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$ merupakan proses stasioner wide sense dengan mean nol dan autokorrelasinya :

$$R(\tau) = \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2 \cos \omega_n \tau .$$

<u>B u k t i</u> :

Karena a_n dan b_n takberkorrelasi maka :

$$E\{a_n b_n\} = E\{a_n\} . E\{b_n\}$$

Padahal $E\{a_n\} = E\{b_n\} = 0$, jadi :

$$E\{a_n b_n\} = 0$$

Untuk itu $E\{X(t)\} = \sum_{n=1}^{k} (E\{a_n\} \cos \omega_n t + E\{b_n\} \sin \omega_n t)$

$$= 0 .$$

$$X(t + \tau) = \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos \omega_n (t + \tau) + b_n \sin \omega_n (t + \tau))$$

maka :

$$\begin{aligned}
R(\tau) &= E\Big\{ \Big[\sum_{n=1}^{k} (a_n \cos \omega_n (t + \tau) + b_n \sin \omega_n (t + \tau)\Big] . \\
&\quad \Big[\sum_{n=1}^{k} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)\Big]\Big\} . \\
&= \sum_{n=1}^{k} \Big\{ E\{a_n^2\} \cos \omega_n (t + \tau) \cos \omega_n t + E\{a_n b_n\} . \\
&\quad \cos \omega_n (t + \tau) \sin \omega_n t + E\{a_n b_n\} \sin \omega_n (t + \tau) \\
&\quad \cos \omega_n t + E\{b_n^2\} \sin \omega_n (t + \tau) \sin \omega_n t \Big\} . \\
&= \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2 (\cos \omega_n (t + \tau) \cos \omega_n t + \sin \omega_n (t + \tau) \\
&\quad \sin \omega_n t). \\
&= \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2 (\cos^2 \omega_n t . \cos \omega_n \tau - \sin \omega_n t . \cos \omega_n t . \sin \omega_n \tau \\
&\quad + \sin^2 \omega_n t . \cos \omega_n \tau + \cos \omega_n t . \sin \omega_n t . \sin \omega_n \tau). \\
&= \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2 (\cos^2 \omega_n t + \sin^2 \omega_n t) \cos \omega_n \tau . \\
&= \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2 \cos \omega_n \tau .
\end{aligned}$$

Jelas bahwa meannya konstanta dan autokorrelasinya merupakan fungsi dari τ, jadi stasioner wide sense.

3.3 INTEGRAL STOCHASTIK DAN ERGODISITAS

3.3.1 INTEGRAL STOCHASTIK

Diberikan proses stochastik X(t) yang kontinu merupakan proses stasioner riil, kita bentuk suatu integral :

$$S = \int_a^b X(t)\ dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3.3\text{-}1\ )$$

Apabila integral ini ada nilainya untuk setiap fungsi $X(t,\zeta)$, integral ini akan mendefinisikan bilangan $S(\zeta)$ untuk tiap ζ. Hal ini berarti bahwa S suatu variabel random sebagai fungsi dari ζ.

Dari persamaan (3.3-1), jika dicari meannya akan diperoleh : $E\{S\} = \int_a^b E\{X(t)\} dt$

$$= \int_a^b \eta(t)\ dt \quad \ldots\ldots\ldots (\ 3.3\text{-}2\ )$$

Kuadrat dari S dapat kita tulis dalam bentuk integral ganda yaitu :

$$S^2 = \int_a^b X(t_1)\ dt_1 \cdot \int_a^b X(t_2)\ dt_2$$

$$= \int_a^b \int_a^b X(t_1) . X(t_2)\ dt_1\ dt_2 \qquad \text{dan}$$

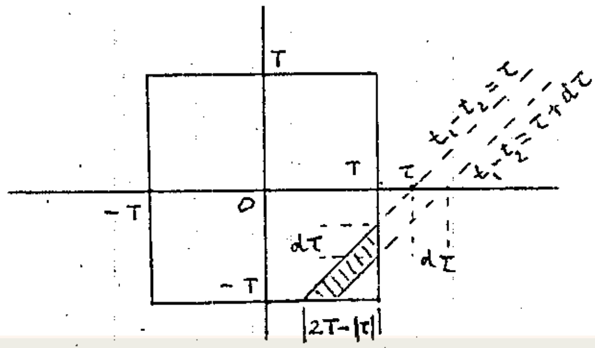
$$E\{S^2\} = \int_a^b \int_a^b E\{X(t_1)\ X(t_2)\}\ dt_1\ dt_2$$

$$= \int_a^b \int_a^b R(t_1,t_2)\ dt_1\ dt_2 \quad \ldots\ldots (\ 3.3\text{-}3\ )$$

Misalkan ambil $a = -T$ dan $b = T$

$\tau = |t_1 - t_2|$, $d\tau = dt_1 = dt_2$ maka

$$E\{S^2\} = \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} R(t_1,t_2)\ dt_1\ dt_2 \quad \ldots\ldots\ldots (\ 3.3\text{-}4\ )$$



Pandang gambar di atas, harga $\tau = t_1 - t_2$ bergerak dari $-2T$ sampai ke $2T$. Garis τ pada daerah yang terarsir persamaannya ($2T - |\tau|$) oleh karena itu luas daerah yang terarsir(daerah $R(t_1,t_2) = R(\tau)$) adalah

$(2T - |\tau|)\, d\tau$. Dari kenyataan ini harga (3.3-4) dapat diambil :

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R(t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2 = \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|)\, R(\tau)\, d\tau$$

Jadi persamaan (3.3-4) menjadi :

$$E\{S^2\} = \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|)\, R(\tau)\, d\tau \quad \ldots\ldots(3.3\text{-}5)$$

Apabila S merupakan proses kompleks stasioner maka:

$$E\{|S|^2\} = \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|)\, R(\tau)\, d\tau \quad \ldots\ldots(3.3\text{-}6)$$

Sekarang autokovarian dari S adalah :

$$\sigma_S^2 = E\{S^2\} - (E\{S\})^2.$$

$$= \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R(t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2 - \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \eta(t_1)\,\eta(t_2)\, dt_1\, dt_2 .$$

Padahal kita tahu bahwa $C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2)$ maka :

$$\sigma_S^2 = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C(t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2$$

Analog uraian pendapatan (3.3-5) sehingga :

$$\sigma_S^2 = \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|)\, C(\tau)\, d\tau \quad \ldots\ldots(3.3\text{-}7)$$

Untuk proses stasioner kompleks W(t) dibentuk :

$$S = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} W(t)\, dt \qquad \text{maka;}$$

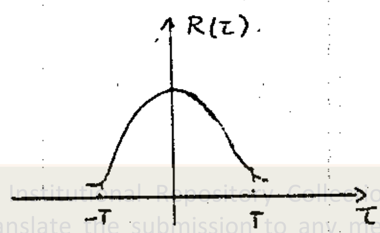
$$E\{|S|^2\} = \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R(t_1,t_2)\, dt_1 dt_2$$

Menurut persamaan (3.3-6) :

$$E\{|S|^2\} = \frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|)\, R(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R(\tau)\, d\tau$$

Apabila proses W(t) adalah proses stasioner riil maka $R(\tau)$ merupakan fungsi yang simetri, sebab :



$$\tau = t_1 - t_2 \qquad -\tau = t_2 - t_1$$

$$E\{W(t_1)\, W(t_2)\} = E\{W(t_1)\, W(t_1-\tau)\}$$

$$E\, W(t_2+\tau)W(t_2) = R(-\tau)$$

$$R(\tau) = R(-\tau) \text{ maka :}$$

$$E\{|S|^2\} = \frac{1}{T}\int_{0}^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) R(\tau)\, d\tau \quad \ldots\ldots(3.3\text{-}8)$$

dan variannya menurut (3.3-7) adalah :

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) C(\tau)\, d\tau \; ....(3.3\text{-}9)$$

Sebagai contohnya :

Proses X(t) merupakan sinyal telegrap random mempunyai mean nol dan $R(\tau) = \exp(-2\lambda|\tau|)$. Dibentuk integral

$S = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\, dt$. Tentukan meannya dan variannya.

Jawab :

$$E\{S\} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\{X(t)\}dt = 0$$

$$\begin{aligned}
\sigma_S^2 &= \frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)\left(R(\tau) - \eta^2\right) d\tau \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) e^{-2\lambda\tau} d\tau \\
&= \frac{-1}{2T\lambda}\int_0^{2T} e^{-2\lambda\tau} d(-2\lambda\tau) + \frac{1}{4\lambda T^2}\int_0^{2T} \tau \; d(e^{-2\lambda\tau}) \\
&= \frac{-1}{2T\lambda}\, e^{-2\lambda\tau}\Big|_0^{2T} + \frac{1}{4\lambda T^2}\left\{\tau . e^{-2\lambda\tau}\Big|_0^{2T} - \int_0^{2T} e^{-2\lambda\tau} d\tau\right\} \\
&= \frac{-1}{2T\lambda}(e^{-4T\lambda} - 1) + \frac{1}{4\lambda T^2}\left\{2T. e^{-4T\lambda} + \frac{1}{2\lambda}\, e^{-2\lambda\tau}\Big|_0^{2T}\right\} \\
&= \frac{1}{2T\lambda} - \frac{e^{-4T\lambda}}{2T\lambda} + \frac{e^{-4T\lambda}}{2T\lambda} + \frac{(e^{-4T\lambda} - 1)}{8T^2\lambda^2} \\
&= \frac{1}{2T\lambda} - \frac{1 - e^{-4T\lambda}}{8T^2\lambda^2} .
\end{aligned}$$

3.3.2 ERGODISITAS

Ergodisitas timbul karena adanya masalah penentuan harga statistik (mean, korelasi dll.) proses X(t) yang merupakan proses tunggal.

X(t) ergodik dalam semua bentuk bila nilai-nilai statistiknya dapat ditentukan dari fungsi tunggal $X(t,\zeta)$ proses tersebut.

Pada bagian ini selalu digunakan proses stasioner wide sense yang bernilai riil. Didefinisikan time everage mean dan time everage autokorrelasi yaitu :

$$N = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\, dt \quad \text{dan}$$

$$\mathcal{R}(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\lambda).X(t)\, dt.$$

Jika dapat dicari harga :

dari proses X(t) maka dikatakan proses X(t) ergodik dalam mean.

Jika dapat dicari harga :

$$E\{\mathcal{R}(\lambda)\} = R(\lambda) \text{ dengan } \sigma_{\mathcal{R}}^2 = 0$$

dari proses X(t) maka dikatakan proses X(t) ergodik dalam autokorrelasi.

ERGODISITAS MEAN

Apabila limit dari N ada dan misalkan harganya

$$N_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3\text{-}10)$$

maka dapat dicari :

$$E\{N_T\} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\{X(t)\}\, dt = \eta = \text{konstanta, jadi}$$

$$E\{N_T\} = \eta = E\{X(t)\}, \text{ sebab :}$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \eta\, dt = \frac{\eta}{2T}\int_{-T}^{T} = 2T\eta/2T = \eta$$

Sedangkan variannya dapat diperoleh seperti pada persamaan (3.3-9) yaitu :

$$\sigma_{N_T}^2 = \frac{1}{T}\int_{0}^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)\left\{ R(\tau) - \eta^2 \right\} d\tau$$

yang mana $R(\tau)$ adalah autokorrelasi proses X(t).

Untuk $T \to \infty$, maka harga N akan menuju/mendekati η dan variannya akan menuju ke nol. Jadi :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\, dt = E\{X(t)\} = \eta \quad \ldots\ldots(3.3\text{-}11)$$

dan

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)\left\{ R(\tau) - \eta^2\right\} d\tau = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots(3.3\text{-}12)$$

Contohnya :

Proses X(t) berupa sinyal telegrap random mempunyai mean nol dan $R(\tau) = \exp\{-\alpha|\tau|\}$. Dibentuk suatu harga : $N_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\, dt$. Untuk $T \to \infty$, apakah X(t) ergodik dalam mean ?

<u>Jawab</u> :

Diketahui $E\{X(t)\} = 0$, $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, maka

$$C(\tau) = R(\tau) - \eta^2 = e^{-\alpha|\tau|}$$

$$E\left\{N_T\right\} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\left\{X(t)\right\} dt = 0$$

$$\sigma^2_{N_T} = \frac{1}{T}\int_{0}^{2T}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) e^{-\alpha\tau} d\tau$$

$$= \frac{-1}{\alpha T} e^{-\alpha\tau}\Big|_0^{2T} + \frac{1}{2\alpha T^2}\int_0^{2T} \tau \ d\left(e^{-\alpha\tau}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha T}\left(1 - e^{-2\alpha T}\right) + \frac{e^{-2\alpha T}}{\alpha T} + \frac{1}{2\alpha^2 T^2}\left(e^{-2\alpha T} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha T} + \frac{\left(e^{-2\ T} - 1\right)}{2\alpha^2 \ T^2}$$

untuk $T \to \infty$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) e^{-\alpha\tau} d\tau = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha T} + \frac{e^{-2\alpha T} - 1}{2\alpha^2 T^2}\right)$$

$$= 0 .$$

Berarti harga $\sigma^2_{N_T}$ menuju harga nol , $E\left\{N_T\right\} = 0$

d isimpulkan bahwa proses tersebut ergodik dalam mean.

ERGODISITAS AUTOKORRELASI

Sekali lagi, bila limit $\mathcal{R}(\lambda)$ ada dan dimisalkan : $\mathcal{R}_T(\lambda) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\lambda)\ X(t)\ dt$

.... (3.3-13)

dapat dicari :

$$E\left\{\mathcal{R}_T(\lambda)\right\} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\left\{X(t+\lambda)\ X(t)\right\} dt = R(\lambda) ,$$

mean time everage autokorrelasi ini sama dengan $R(\lambda)$ disebabkan integran pada sisi kanan sama dengan autokorrelasi $R(\lambda)$ proses $X(t)$.

Untuk λ yang diberikan $\mathcal{R}_T(\lambda)$ adalah integral dari proses : $\phi(t) = X(t+\lambda)\ X(t)$.

Mean proses $\phi(t)$ adalah :

$E\left\{\phi(t)\right\} = E\left\{X(t+\lambda)\ X(t)\right\} = R(\lambda)$ dan autokorrelasi proses $\phi(t)$ adalah :

$$R_{\phi\phi}(\tau) = E\left\{X(t+\lambda+\tau)\ X(t+\tau)\ X(t+\lambda)\ X(t)\right\}$$

Untuk λ yang diberikan :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\lambda)X(t)\ dt = E\left\{X(t+\lambda)X(t)\right\} = R(\lambda)$$

..............(3.3-14)

dan

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)\left\{R_{\phi\phi}(\tau) - R^2(\lambda)\right\} d\tau = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3\text{-}15)$$

3.4 KORELASI DAN SPEKTRUM POWER PROSES STASIONER

3.4.1 KORELASI

Dalam pembicaraan berikut disajikan momen-momen order satu dan order dua dari proses stasioner.

Untuk proses tunggal X(t) dimana meannya :

$E\{X(t)\} = \eta$, dan autokorrelasinya :

$$R(\tau) = E\{X(t+\tau)\,X^*(t)\} = R_X(\tau) \quad \ldots\ldots (3.4\text{-}1)$$

Kita pakai notasi :

$$R(-\tau) = R^*(\tau) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.4\text{-}2)$$

Apabila proses X(t) merupakan proses riil maka $R(\tau)$ merupakan fungsi genap dan harganya riil, berarti :

$$R(-\tau) = R(\tau) = R^*(\tau) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.4\text{-}3)$$

Sedangkan momen serikat order duanya adalah :

$$R_{XY}(\tau) = E\{X(t+\tau)\,Y^*(t)\} = R^*_{YX}(-\tau)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.4\text{-}4)$$

merupakan korelasi silang dari dua proses stasioner berserikat. Selanjutnya autokovarian didefinisikan :

$$C_{XX}(\tau) = E\{[X(t+\tau) - \eta]\,[X^*(t) - \eta^*]\}$$
$$= R_{XX}(\tau) - |\eta|^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.4\text{-}5)$$

dan kovarian silangnya adalah :

$$C_{XY}(\tau) = E\{[X(t+\tau) - \eta_X]\,[Y^*(t) - \eta^*_Y]\}$$
$$= R_{XY}(\tau) - \eta_X\,\eta^*_Y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.4\text{-}6)$$

Dengan mengikuti definisi (3.4-1) maka autokorelasi untuk proses jumlahan V(t) = X(t) + Y(t) didefinisikan sebagai :

$$R_{VV}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_{YY}(\tau)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots (3.4\text{-}7)$$

Autokorrelasi untuk hasil kali proses $\{X(t).Y(t)\}$ pada umumnya tidak dapat dibentuk dalam batas-batas momen order dua untuk proses yang diberikan. Akan tetapi apabila proses X(t) dan Y(t) independen maka proses $X(t+\tau)$ juga independenterhadap $Y(t+\tau)$. Oleh karena itu :

$$E\{X(t+\tau)Y(t+\tau)X^*(t)Y^*(t)\} = E\{X(t+\tau)X^*(t)\} \cdot E\{Y(t+\tau)Y^*(t)\}$$

dan misalkan V(t) = X(t)Y(t), maka :

$$R_{VV}(\tau) = R_{XX}(\tau) \cdot R_{YY}(\tau) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3.4\text{-}8\ )$$

Untuk harga $\tau = 0$ dari (3.4-1) akan menjadi :

$$R(0) = E\{X(t)X^*(t)\} = E\{|X(t)|^2\} \geq 0$$

$$R(0) \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3.4\text{-}9\ )$$

Sekarang untuk proses X(t) yang berharga riil, maka :

$$E\{|X(t+\tau) \pm X(t)|^2\} = E\{[X(t+\tau) \pm X(t)] \cdot [X^*(t+\tau) \pm X^*(t)]\}.$$

$$= E\{X(t+\tau)X^*(t+\tau)\} \pm E\{X(t+\tau)X^*(t)\} \pm E\{X(t)X^*(t+\tau)\} \pm E\{X(t)X^*(t)\}.$$

$$= E\{|X(t+\tau)|^2\} \pm E\{X(t+\tau)X^*(t)\} \pm E\{X(t)X^*(t+\tau)\} \pm E\{|X(t)|^2\}.$$

$$= 2\,R(0) \pm 2\,R(\tau) = 2\{R(0) \pm R(\tau)\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3.4\text{-}10\ )$$

mengingat (3.4-9) maka pada (3.4-10) sisi sebelah kanan pasti positif(non negatif). Jelaslah bahwa :

$$R(0) \pm R(\tau) \geq 0 \quad \text{atau} \quad -R(0) \leq R(\tau) \leq R(0)$$

Untuk $R(\tau)$ pada titik awal berharga maksimum, seper - ti terlihat di atas, maka :

$$|R(\tau)| \leq R(0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3.4\text{-}11\ )$$

Persamaan (3.4-11) tetap berlaku untuk proses berharga kompleks. Berikut X(t) dan Y(t) merupakan proses riil dan a = konstanta riil. Untuk :

$$E\{|X(t+\tau) + a\,Y(t)|^2\} = E\{[X(t+\tau) + a\,Y(t)] [X^*(t+\tau) + a\,Y^*(t)]\}$$

$$E\{|X(t+\tau) + aY(t)|^2\} = E\{|X(t+\tau)|^2\} + E\{X(t+\tau)\ aY^*(t)\}$$
$$+ E\{X^*(t+\tau)\ aY(t)\} + E\{a^2Y(t)Y^*(t)\}$$
$$= R_{XX}(0) + aR_{XY}(\tau) + aR_{XY}(\tau) + a^2R_{YY}(0) \geq 0$$
$$= R_{XX}(0) + 2a\ R_{XY}(\tau) + a^2R_{YY}(0) \geq 0$$

Bentuk kuadratik dari a di atas adalah non-negatif untuk setiap a. Oleh karena itu diskriminannya adalah non-positif ($D \leq 0$), maka :

$$4a^2R^2_{XY}(\tau) - 4a^2R_{XX}(0)\ R_{YY}(0) \leq 0 \text{ , berarti :}$$

$$R^2_{XY}(\tau) \leq R_{XX}(0)\ R_{YY}(0) \quad \text{.......(3.4-12)}$$

3.4.2 SPEKTRUM POWER

Spektrum power adalah suatu transformasi Fourier dari autokorrelasi proses X(t), dinotasikan $P(\omega) = P_X(\omega)$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \text{............(3.4-13)}$$

Kalau $R(-\tau) = R^*(\tau)$ berarti disimpulkan bahwa $P(\omega)$ adalah fungsi yang berharga riil.

Dengan rumus inversi Fourier, persamaan (3.4-13) dapat kita bentuk $R(\tau)$ dalam batas-batas $P(\omega)$ yaitu :

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) . e^{i\omega\tau} d\omega \quad \text{..........(3.4-14)}$$

Untuk $\tau = 0$, maka :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)\ d\omega = R(0) = E\{|X(t)|^2\} \geq 0 \quad \text{...(3.4-15)}$$

Apabila proses X(t) berharga riil, maka $R(\tau)$ juga berharga riil dan genap. Oleh karena itu spektrum powernya akan ; $P(\omega) = P(-\omega)$ dan persamaan (3.4-13) menjadi :

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)(\ \mathrm{Cos}\ \omega\tau - i\ \mathrm{Sin}\ \omega\tau)\ d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\ \mathrm{Cos}\ \omega\tau\ d\tau$$

$$\text{dan} \quad R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)\ \mathrm{Cos}\ \omega\tau\ d\omega \quad \text{........(3.4-16)}$$

Untuk proses X(t) dan Y(t) yang diberikan, spektrum power silangnya merupakan transformasi Fourier dari korelasi silang kedua proses tersebut, yaitu :

$$P_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)\ e^{-i\omega\tau} d\tau$$
$$= P^*(\omega) \quad \text{.........(3.4-17)}$$

Kemudian dengan rumus inversi Fourier diperoleh :

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(\omega)\cdot e^{i\omega\tau} d\omega \quad \ldots\ldots (\ 3.4\text{-}18\ )$$

dan untuk $\tau = 0$

$$R_{XY}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(\omega)\ d\omega = E\{X(t)Y^*(t)\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3.4\text{-}19\ )$$

Apabila proses X(t) dan Y(t) bersifat Orthogonal satu sama lain, maka :

$$R_{XY}(\tau) = 0 \quad \text{dan} \quad P_{XY}(\omega) = 0$$

Untuk proses jumlahan, dengan (3.4-7) maka :

$$R_{X+Y}(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) \quad \text{dan}$$

$$P_{X+Y}(\omega) = P_X(\omega) + P_Y(\omega).$$

Contoh :

Diketahui proses $X(t) = \sum_{n=1}^{k} a_n e^{i\omega_n t}$, a_n = variabel random dan autokorrelasinya adalah :

$$R(\tau) = \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2 e^{i\omega_n\tau}$$

Buktikan bahwa spektrum powernya adalah :

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2\ \delta(\omega - \omega_n).$$

<u>B u k t i</u> :

Untuk soal ini kita pakai fungsi delta(impuls) dengan mengambil analog (2.5-6) kita peroleh :

$$\delta(\omega - \omega_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_n)t} dt$$

$$2\pi\delta(\omega - \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_n)t} dt$$

untuk $\tau = t_1 - t_2$, dan pengintegralan diambil pada selang (t_1, t_2) maka :

$$2\pi\delta(\omega - \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_n)\tau} d\tau$$

Dan spektrum powernya adalah :

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\ e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \cdot \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2\ e^{i\omega_n\tau} d\tau$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_n)\tau} d\tau$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^2\ \delta(\omega - \omega_n).$$

Contoh 2

Suatu sinyal telegrap random X(t) sebagai fungsi riil dan genap, mempunyai autokorrelasi :

$R(\tau) = \exp.(-2\lambda|\tau|)$. Tentukan spektrum power sinyal tersebut !.

Jawab :

Menurut persamaan (3.4-16) yaitu karena sinyal merupakan fungsi riil genap maka :

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\ \mathrm{Cos}\,\omega\tau\ d\tau$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} R(\tau)\ \mathrm{Cos}\,\omega\tau\ d\tau$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda\tau}\ \mathrm{Cos}\,\omega\tau\ d\tau$$

$$= \frac{-2}{2\lambda}\int_{0}^{\infty} \mathrm{Cos}\,\omega\tau\ d(e^{-2\lambda\tau})$$

$$= \frac{-1}{\lambda}\left(\mathrm{Cos}\,\omega\tau\, e^{-2\lambda\tau}\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda\tau}\ d(\mathrm{Cos}\,\omega\tau)\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda}(0-1) + \frac{\omega}{2\lambda^2}\int_{0}^{\infty} \mathrm{Sin}\,\omega\tau\ d(e^{-2\lambda\tau})$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{\omega}{2\lambda^2}\left(\mathrm{Sin}\,\omega\tau\, e^{-2\lambda\tau}\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda\tau}\ d(\mathrm{Sin}\,\omega\tau)\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{\omega}{2\lambda^2}\left(0 - \omega\int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda\tau}\ \mathrm{Cos}\,\omega\tau\ d\tau\right)$$

Sisi sebelah kanan timbul integral seperti semula, maka kita kumpulkan ke sebelah kiri didapat :

$$\left(2 + \frac{\omega^2}{2\lambda^2}\right)\int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda\tau}\ \mathrm{Cos}\,\omega\tau\ d\tau = \frac{1}{\lambda}$$

$$2\left(\frac{4\lambda^2 + \omega^2}{4\lambda^2}\right)\int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda\tau}\ \mathrm{Cos}\,\omega\tau\ d\tau = \frac{1}{\lambda}$$

$$2\int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda\tau}\ \mathrm{Cos}\,\omega\tau\ d\tau = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{4\lambda^2}{4\lambda^2+\omega^2}$$

Jadi harga $P(\omega) = \dfrac{4\lambda}{4\lambda^2 + \omega^2}$

3.5 SISTEM-SISTEM LINIER

Disini kita dihadapkan pada masalah sistem suatu proses, yang memberikan aksi terhadap sinyal yang biasanya berupa proses X(t) yang kemudian akan memberikan suatu hasil proses baru Y(t).

Anggaplah proses X(t) sebagai input sistem, yang mana sistem tersebut mempunyai sifat tertentu biasanya disebut sebagai respon impuls. Proses baru Y(t) sebagai output memenuhi :

$$Y(t) = L\left[X(t)\right] \qquad \text{................(3.5-1)}$$

Disini L sebagai operator yang mewakili aksi sistem yang bekerja pada X(t).

Suatu sistem dikatakan linier jika fungsi responnya untuk sejumlah input $X_n(t)$, n = 1,2,...,N adalah sama dengan jumlah fungsi respon yang diambil secara terpisah. Jelasnya bila $X_n(t)$ menyebabkan fungsi respon $Y_n(t)$, maka sistemnya linier sehingga :

$$Y(t) = L\left[\sum_{n=1}^{N} k_n \; X_n(t)\right] = \sum_{n=1}^{N} k_n L\left[X_n(t)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} k_n \; Y_n(t).$$

dipenuhi, dengan k_n adalah konstanta sembarang dan N boleh jadi tak berhingga.

Dari (2.3-6) tentang fungsi impuls (delta) untuk proses X(t) dapat kita tulis sebagai :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \; \delta(t-\alpha)\, d\alpha \text{ dan}$$

$$Y(t) = L\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)\, \delta(t-\alpha)\, d\alpha\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \; L\left[\delta(t-\alpha)\right] d\alpha$$

Didefinisikan fungsi baru h(t,α) sebagai respon impuls untuk sistem linier, yaitu :

$$L\left[\delta(t-\alpha)\right] = h(t,\alpha)$$, sehingga didapat :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)\, h(t,\alpha)\, d\alpha \quad \text{.........(3.5-2)}$$

Sistem linier dikatakan invarian waktu apabila $h(t,\alpha)$ sebagai respon impuls tak bergantung pada waktu. Jika $\delta(t)$ terjadi pada $t = 0$ menyebabkan respon impuls $h(t)$ maka $\delta(t-\alpha)$ yang terjadi pada $t = \alpha$ harus menyebabkan respon impuls $h(t-\alpha)$ untuk sistem invarian waktu. Sehingga, bertitik tolak pada pengertian di atas didapat $h(t,\alpha) = h(t-\alpha)$, sehingga persamaan (3.5-2) menjadi :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha \quad \text{........(3.5-3)}$$

Dengan demikian persamaan diatas merupakan konvolusi $X(t)$ dan $h(t)$, dinotasikan sebagai :

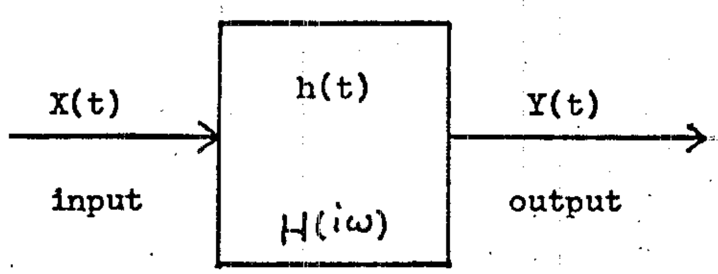
$$Y(t) = X(t) * h(t) \quad \text{.............(3.5-4)}$$

Dengan menukar variabel, persamaan (3.5-3) dapat diambil bentuk alternatif sebagai :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\alpha)\, h(\alpha)\, d\alpha \quad \text{.........(3.5-5)}$$

Dengan transformasi Fourier respon impuls $h(t)$ membentuk fungsi transfer suatu sistem yaitu $H(i\omega)$ sehingga :

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad \text{.......... (3.5-6)}$$



3.5.1 MEAN DAN AUTOKORRELASI SISTEM LINIER

Diasumsikan bahwa input $X(t)$ proses stohastiknya proses stasioner wide sense, maka mean outputnya dinyatakan sebagai :

$$E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{X(t-\alpha)\}\, h(\alpha)\, d\alpha$$

$$E\{Y(t)\} = \eta_Y = \eta_X \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, d\alpha = H(0)\,.\ \eta_X = \text{konstan}$$

Persamaan (3.5-3) dikalikan dengan $X^*(t-\tau)$ kemudian diambil meannya didapatkan :

$$E\{Y(t)\, X^*(t-\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{X(t-\alpha)\, X^*(t-\tau)\}\, h(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau-\alpha)\, h(\alpha)\, d\alpha \qquad \text{.............(3.5-7)}$$

($R_{XX}(\tau-\alpha) = E\{X(t-\alpha)X^*(t-\tau)\} = R_{XX}\ (t-\alpha)-(t-\tau))$

Persamaan (3.5-7) dinyatakan dengan **konvolusi** sebagai :

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau)$$

Kemudian konjugasi (3.5-5) dikalikan dengan $Y(t+\tau)$ lalu diambil meannya diperoleh :

$$E\{Y(t+\tau)\, Y^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{Y(t+\tau)\, X^*(t-\alpha)h^*(\alpha)\, d\alpha\}$$

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau+\alpha)\, h^*(\alpha)\, d\alpha$$

$$= R_{YX}(\tau) * h^*(\alpha)\ ; \quad h^*(\alpha) = h^*(-\tau)$$

$$= R_{YX}(\tau) * h^*(-\tau) \qquad \text{.......(3.5-8)}$$

Analog cara yang di atas maka :

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h^*(-\tau)$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau) \qquad \text{...........(3.5-9)}$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h^*(-\tau) * h^*(\tau)$$

$$\text{...........(3.5-10)}$$

3.5.2 SPEKTRUM POWER SISTEM LINIER

Kalau transformasi Fourier $h^*(\alpha)$ adalah $H^*(i\omega)$ dan transformasi Fourier $h(\alpha)$ adalah $H(i\omega)$ jadi :

$$H^*(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)\, e^{i\omega\alpha}\, d\alpha \qquad \text{dan}$$

dengan teori konvolusi di atas dapat dicari spektrum powernya yaitu :

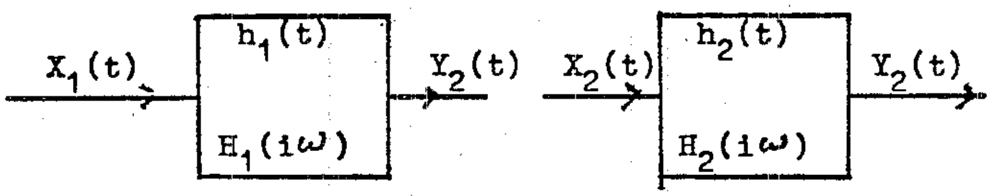
$$P_{XY}(\omega) = P_{XX}(\omega)\, H^*(i\omega)$$
$$P_{YY}(\omega) = P_{XY}(\omega)\, H(i\omega) \qquad \text{............(3.5-11)}$$

Sedangkan untuk spektrum power output sistem linier invarian waktu yang mempunyai fungsi trasfer(fungsi sistem) $H(i\omega)$ adalah :

$$P_{YY}(\omega) = P_{XX}(\omega)\, H^*(i\omega)\, H(i\omega)$$
$$= P_{XX}(\omega)\, |H(i\omega)|^2 \qquad \text{.........(3.5-12)}$$

3.5.3 TERMINAL GANDA SUATU SISTEM

Penjabaran pada bagian yang lalu khusus untuk terminal tunggal suatu sistem, pada bagian ini kita bicarakan untuk terminal ganda. Artinya bahwa dalam pembicaraan sistem linier menggunakan lebih dari satu input atau juga outputnya. Pandang dua sistem seperti pada gambar dibawah yang masing-masing mempunyai respon impuls $h_1(t)$ dan $h_2(t)$ dan fungsi sistem (fungsi transfer) $H_1(i\omega)$ dan $H_2(i\omega)$.



Input-input sistem tersebut adalah $X_1(t)$ dan $X_2(t)$ yang masing-masing membentuk output sebagai :

$$Y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(t-\alpha)\, h_1(\alpha)\, d\alpha$$
$$\text{......(3.5-13)}$$
$$Y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_2(t-\beta)\, h_2(\beta)\, d\beta$$

Pada persamaan pertama kita kalikan dengan $Y_2^*(t-\tau)$ kemudian dicari meannya diperoleh :

$$E\{Y_1(t)Y_2^*(t-\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{X_1(t-\alpha)Y_2^*(t-\tau)\}\, h_1(\alpha)\, d\alpha$$

$$R_{Y_1Y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{X_1\,Y_2}(\tau-\alpha)\; h_1(\alpha)\; d\alpha$$

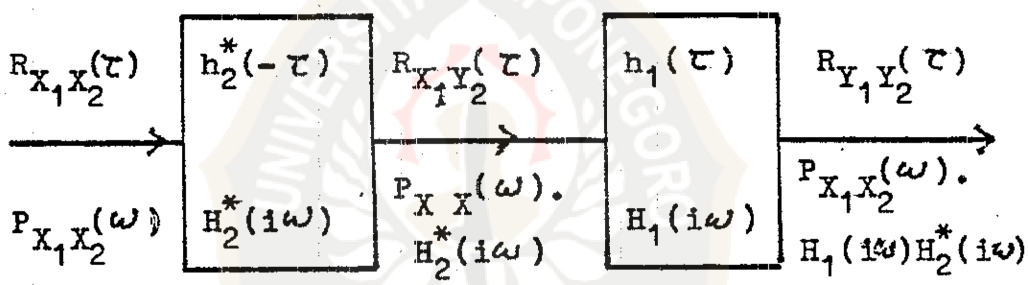
$$= R_{X_1Y_2}(\tau) * h_1(\tau) \quad \ldots\ldots\ldots (\ 3.5\text{-}14\ )$$

Kemudian konjugasi persamaan yang kedua kita kalikan dengan $X_1(t+\tau)$ lalu dicari meannya didapat :

$$E\{X_1(t+\tau)Y_2^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{X_1(t+\tau)X_2^*(t-\beta)\}h_2^*(\beta)\; d\beta$$

$$R_{X_1Y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{X_1X_2}(\tau+\beta)\; h_2^*(\beta)\; d\beta$$

$$= R_{X_1X_2}(\tau) * h_2^*(-\tau) \quad \ldots\ldots\ldots (\ 3.5\text{-}15\ )$$



Dari (3.5-14) dan (3.5-15) kita dapat mencari spektrum powernya dengan transformasi Fourier autoko relasi yaitu :

$$P_{Y_1Y_2}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(i\omega)\; R_{X_1Y_2}(\tau_1)\; e^{-i\omega\tau_1} d\tau_1 \quad , \ \tau_1 = \tau-\alpha$$

$$= H_1(i\omega).\ P_{X_1Y_2}(\omega) \quad \ldots\ldots\ldots (\ 3.5\text{-}16\ )$$

dan :

$$P_{X_1Y_2}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H_2^*(i\omega)\; R_{X_1X_2}(\tau_1)\; e^{-i\omega\tau_1} d\tau_1 \quad , \ \tau_1 = \tau+\beta$$

$$= H_2^*(i\omega)\; P_{X_1X_2}(\omega) \quad \ldots\ldots\ldots (\ 3.5\text{-}17\ )$$

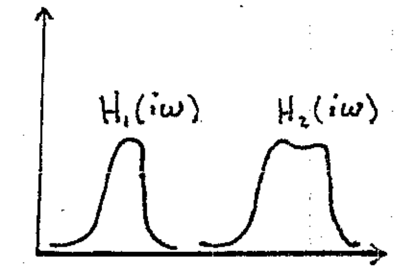
Dengan substitusi (3.5-17) ke dalam (3.5-16) diperoleh spektrum power terakhir yaitu :

$$P_{Y_1Y_2}(\omega) = P_{X_1X_2}(\omega)\; H_1(i\omega)\; H_2^*(i\omega) \quad \ldots\ldots (\ 3.5\text{-}18\ )$$

Dua fungsi sistem tidak overlap (bersamaan waktunya) apabila :

$$H_1(i\omega).\ H_2(i\omega) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3.5\text{-}19\ )$$

Pada gambar di bawah ini merupakan suatu sistem yang fungsi transfernya tidak overlap, dengan input $X_1(t)$ dan $X_2(t)$ akan menghasilkan output $Y_1(t)$ dan $Y_2(t)$

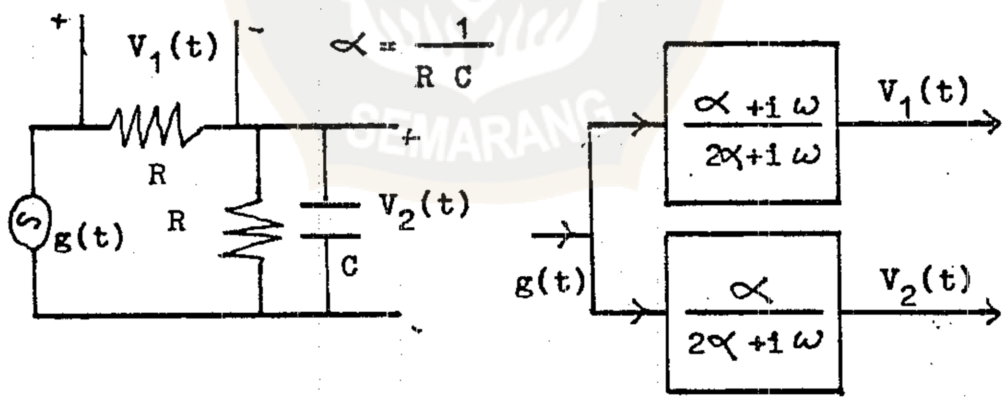


dimana kedua output ini saling orthogonal, sehingga pada persamaan (3.5-18) membentuk spektrum power sebagai :

$$P_{Y_1Y_2}(\omega) = 0 \qquad \text{...............(3.5-20)}$$

Contohnya :

Dalam suatu rangkaian generator, g(t) sebagai sinyal telegrap random dengan $R_{gg}(\tau) = \exp.(-2\lambda|\tau|)$ Tentukan spektrum power voltage-voltage $V_1(t)$ dan $V_2(t)$ yang melalui resistor(tahanan), seperti terlihat pada rangkaian berikut :



Jawab :

Disini voltage-voltage dianggap output dua sistem linier yang mana inputnya adalah g(t) dan fungsi tranfernya masing-ma sing adalah :

$$H_1(i\omega) = \frac{\alpha + i\omega}{2\alpha + i\omega} \; ; \; H_2(i\omega) = \frac{\alpha}{2\alpha + i\omega} \; , \; \alpha = \frac{1}{RC}$$

Sinyal g(t) dengan auto-korrelasi $R_{gg}(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$ akan membentuk spektrum power adalah :

$$P_{gg}(\omega) = \frac{4\lambda}{4\lambda^2 + \omega^2}$$ (lihat contoh halaman 41 depan)

Dengan menggunakan (3.5-12) kita peroleh :

$$P_{V_1V_1}(\omega) = P_{gg}(\omega)\ |H_1(i\omega)|^2 = P_{gg}(\omega)\ H_1(i\omega)H_1^*(\omega)$$

$$= \frac{4\lambda}{4\lambda^2+\omega^2} \cdot \frac{\alpha + i\omega}{2\alpha + i\omega} \cdot \frac{\alpha - i\omega}{2\alpha - i\omega}$$

$$= \frac{4\lambda}{4\lambda^2+\omega^2} \cdot \frac{\alpha^2 + \omega^2}{4\alpha^2+\omega^2}$$

$$P_{V_2V_2}(\omega) = P_{gg}(\omega)\ \ H_2(i\omega)\ \ H_2^*(i\omega).$$

$$= \frac{4\lambda}{4\lambda^2+\omega^2} \cdot \frac{\alpha}{2\alpha + i\omega} \cdot \frac{\alpha}{2\alpha - i\omega}$$

$$= \frac{4\lambda}{4\lambda^2 + \omega^2} \cdot \frac{\alpha^2}{4\lambda^2 + \omega^2}$$

dan akhirnya untuk :

$$P_{V_1V_2}(\omega) = P_{gg}(\omega)\ H_1(i\omega)\ H_2^*(i\omega)$$

$$= \frac{4\lambda}{4\lambda^2+\omega^2} \cdot \frac{\alpha + i\omega}{2\alpha + i\omega} \cdot \frac{\alpha}{2\alpha - i\omega}$$

$$= \frac{4\lambda}{4\lambda^2+\omega^2} \left\{ \frac{\alpha^2}{4\lambda^2 + \omega^2} + \frac{i\alpha\omega}{4\alpha^2+\omega^2} \right\}$$

$$= \frac{4\alpha^2\lambda}{(4\lambda^2+\omega^2)(4\alpha^2+\omega^2)} + i\,\frac{4\lambda\alpha\omega}{(4\lambda^2+\omega^2)(4\alpha^2+\omega^2)}$$