BAB II

TEORI MATHEMATIKA PENUNJANG

2.1 VARIABEL RANDOM (PERUBAH ACAK)

Sebelum kita mendefinisikan mengenai suatu variabel random, sebaiknya kita definisikan dahulu mengenai apa yang disebut ruang sampel dan ruang probabilitas yang merupakan konsep pokok variabel random ini.

Definisi 1.1

Tiap outcome yang mungkin dari suatu eksperimen disebut sebagai titik sampel. Dan koleksi total semua titik sampel/outcome yang mungkin disebut suatu ruang sampel S (universe set).

Dalam teori probabilitas kita telah mengenal tentang himpunan bagian dari ruang sampel S yang dinamakan event (kejadian). Event-event yang kita kumpulkan akan membentuk suatu koleksi, kita notasikan sebagai $\mathcal{A}$. Dan $P[.]$ adalah probabilitas suatu fungsi yang domainnya di $\mathcal{A}$. Kemudian kita bentuk suatu ruang tripel yaitu : (S, $\mathcal{A}$, $P[.]$).

Definisi 1.2

Suatu ruang probabilitas adalah tripel (S, $\mathcal{A}$, $P[.]$) yang mana S adalah ruang sampelnya, $\mathcal{A}$ koleksi event-event dan $P[.]$ adalah probabilitas fungsi yang berdomain di $\mathcal{A}$.

Selanjutnya kita definisikan suatu variabel random.

Definisi 1.3

Untuk ruang probabilitas yang diberikan (S, $\mathcal{A}$, $P[.]$), X (.) atau X adalah suatu variabel random suatu fungsi yang domainnya S dan konterdomainnya (pasangan) adalah garis bilangan real.

Fungsi X (.) harus merupakan himpunan sedemikiatau

Suatu variabel random real X (.) adalah fungsi real yang domainnya ruang sampel S, yang mana fungsi real itu adalah pengurutan bilangan real X (ξ) untuk setiap outcome ξ dari suatu eksperimen sedemikian sehingga :

1. Himpunan $\{X(\xi) \leq x\}$ adalah event untuk setiap bilangan real x.
2. Probabilitas event $\{X(\xi) = \infty\}$ dan $\{X(\xi) = -\infty\}$ sama dengan nol, jadi $P\{X = \infty\} = 0$ dan $P\{X = -\infty\} = 0$

Dengan demikian X (ξ) adalah suatu variabel random yang merupakan fungsi dari outcome ξ. Dan kalau $Z(\xi) = X(\xi) + i\,Y(\xi)$ maka Z (ξ) adalah suatu variabel random kompleks yang mana ditentukan oleh variabel random X (ξ) dan Y (ξ).

Dari uraian di atas jelaslah bahwa X (t,ξ) atau X (t) suatu proses stochastik merupakan keluarga dari variabel random-variabel random sebab variabel random adalah suatu fungsi, sedangkan proses stochastik merupakan family (keluarga) dari fungsi-fungsi.

2.2 FUNGSI DISTRIBUSI DAN FUNGSI DENSITAS (DENSITY)

2.2.1 FUNGSI DISTRIBUSI

Diberikan bilangan real x, himpunan yang dinotasikan sebagai $\{X \leq x\}$ yang terdiri dari semua outcome ξ sedemikian sehingga $\{X(\xi) \leq x\}$ adalah suatu event. Probabilitas event tersebut adalah $P\{X \leq x\}$. Probabilitas ini dinotasikan sebagai $F_X(x)$ dan disebut Fungsi Distribusi dari variabel random X (.).

Definisi 2.1

Fungsi Distribusi dari variabel random X (.)

adalah fungsi $F_X(x) = P\left\{ X \leq x \right\}$ yang didefinisikan untuk setiap bilangan x dari $-\infty$ sampai ∞. Secara jelasnya, untuk bilangan x yang diberikan maka $F_X(x)$ adalah sama dengan probabilitas event $\left\{ X \leq x \right\}$. Dengan demikian sebagai syarat fungsi distribusi adalah $F(-\infty) = P\left\{ X = -\infty \right\} = 0$ dan $F(\infty) = P\left\{ X \leq \infty \right\} = 1$

Bertitik tolak pengertian di atas kita dapat mendefinisikan fungsi distribusi order n yaitu :

$F_X(x_1,\ldots,x_n) = P\left\{ X \leq x_1,\ldots,X \leq x_n \right\}$.

Untuk proses stochastik X (t) yang diberikan maka fungsi distribusi order n untuk proses stochastik adalah :

$$F_X(x_1,\ldots,x_n;\ t_1,\ldots,t_n) = P\left\{X(t_1) \leq x_1,\ldots,X(t_n) \leq x_n\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.2 - 1)$$

untuk setiap n dan $t_1,\ldots,t_n$ yang diberikan.

Apabila hanya disajikan proses stochastik X (t) yang terdiri dari dua variabel random X_1 dan X_2, maka yang disebut fungsi distribusi serikat adalah :

$F_{X_1X_2}(x_1,x_2) = P\left\{X_1 \leq x_1,\ X_2 \leq x_2\right\}$ dimana :

$\left\{X_1 \leq x_1\right\}\left\{ X_2 \leq x_2 \right\} = \left\{X_1 \leq x_1,\ X_2 \leq x_2 \right\}$

Jadi :

$$F_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n;\ t_1,\ldots,t_n) = F(x_1,\ldots,x_n;\ t_1,\ldots,t_n) = P\left\{X(t_1) \leq x_1,\ldots,\ X(t_n) \leq x_n\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.2 - 2)$$

Berarti untuk fungsi distribusi order 1 dan order 2 adalah :

$F(x,t) = F_X(x,t) = P\left\{X(t) \leq x \right\}$ dan

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = F_{X_1\ X_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\left\{ X(t_1) \leq x_1,\ X(t_2) \leq x_2\right\}$$

2.2.2 FUNGSI DENSITAS

Untuk x yang diberikan maka fungsi densitas merupakan pendefferensialan fungsi distribusinya yaitu:

$$f_X(x) = \frac{d\ F_X(x)}{dx} \qquad \text{.............(2.2-3)}$$

Sedangkan fungsi densitas order n adalah :

$$f_X(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1,\ldots,\partial x_n} \qquad \text{......(2.2-4)}$$

Jika diberikan proses stochastik X(t) yang tersusun atas $X_1(t),\ldots,X_n(t)$ maka fungsi densitasnya adalah :

$$f_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)}{\partial x_1,\ldots,\partial x_n} \quad \text{..(2.2-5)}$$

Jadi fungsi densitas order n diperoleh dengan mendefferensialkan fungsi distribusi order n terhadap semua variabel x_i , i = 1,2, ...,n.

Berarti juga fungsi densitas serikat dicari dari hubungan :

$$f\ (x_1,x_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1,x_2)}{\partial x_1\ \partial x_2} \qquad \text{...........(2.2-6)}$$

Dari uraian di atas maka jelaslah bahwa untuk proses stochastik/variabel random yang diberikan didapat :

$$f_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = \frac{\partial^n F_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)}{\partial x_1,\ \ldots\ ,\ \partial x_n} \qquad \text{.,...........(2.2-7)}$$

Jadi jelasnya untuk proses X(t) dan Y(t) yang diberikan maka fungsi distribusi dan fungsi densitasnya (order 2) adalah :

$$F_{X,Y}(x,y) = P\left\{ X \leq x\ ,\ Y \leq y \right\}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\ \partial y} \qquad \text{............(2.2-8)}$$

2.3 EKSPEKTASI (MEAN), MOMEN, AUTOKORRELASI DAN AUTOKOVARIAN

2.3.1 EKSPEKTASI (MEAN)

Dalam teori dan applikasi probabilitas, mungkin parameter tunggal yang terpenting adalah mean (expected value), dari suatu variabel random X (ξ). Notasi untuk mean adalah $E\{X\} = \eta_X = \eta$ ....(2.3-1)

Untuk percobaan yang diulangi n kali dan menghasilkan outcome $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, tiap outcome menentukan sebuah harga numerik tertentu. Selanjutnya dari out - come-outcome eksperimen kita akan mendapatkan n bilangan yaitu : $X(\xi_1), \ldots, X(\xi_n)$.
Jika harga n cukup besar, maka mean dari bilamgan $X(\xi_i)$; i = 1,2,...,n mendekati harga rata-rata dari variabel random X yang diberikan.
Dapat disimpulkan bahwa :

$$E\{X(\xi)\} \cong \frac{X(\xi_1) + X(\xi_2) + \ldots + X(\xi_n)}{n} \qquad \text{..........(2.3-2)}$$

Definisi 3.1

Harga ekspektasi suatu variabel random X(.) adalah : $E\{X(.)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx$ ....(2.3-3)
dimana f(x) adalah fungsi densitas variabel random X(.) dan X(.) merupakan variabel random tipe kontinu. Untuk X(.) variabel random tipe diskrit maka harga ekspektasinya adalah :

$$E\{X(.)\} = \sum_j x_j\ P\{X=x_j\} = \sum_j x_j\ p_j \qquad \text{.......(2.3-4)}$$

j = 1,2,..... , dimana tiap titik massa x_j mempunyai probabilitas p_j.

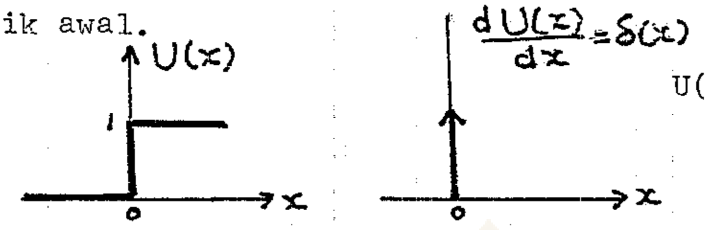
Kita akan membuktikan (2.3-4) namun sebelumnya kita ketahui dahulu tentang apa yang disebut dengan -

fungsi impuls (fungsi delta).

Fungsi impuls $\delta(x)$ adalah suatu transformasi generalis yang dapat ditulis dalam bentuk integral yaitu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, \delta(x)\, dx = \phi(0) \qquad \text{...........(2.3-5)}$$

dimana $\phi(x)$ adalah setiap fungsi yang kontinu pada titik awal.



$U(x)$ = fungsi satuan/unit.

Bila fungsi impuls ini bergeser dari titik awalnya sampai titik x_o dan masih bersifat kontinu pada titik itu maka fungsi impulsnya dinyatakan sebagai :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, \delta(x - x_o)\, dx = \phi(x_o) \qquad \text{........(2.3-6)}$$

Untuk variabel random tipe diskrit, fungsi densitasnya terdiri atas impuls-impuls ;

$$f(x) = \sum_j p_j\, \delta(x - x_j) \qquad \text{........(2.3-7)}$$

Kembali pada pembicaraan semula, jika kita ambil $\phi(x) = x$ dan $f(x) = \sum_j p_j\, \delta(x - x_j)$, maka menurut (2.3-6) kita peroleh ;

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, \delta(x - x_j)\, dx = \phi(x_j) = x_j$$

Dari definisi (2.3-3) didapat :

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_j p_j\, \delta(x - x_j)\, dx$$

$$= \sum_j p_j \int_{-\infty}^{\infty} x\, \delta(x - x_j)\, dx$$

$$= \sum_j p_j\, x_j \ , \text{ sebab } \ x_j = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \delta(x - x_j)\, dx$$

terbukti.

Sekarang untuk $f(x)$ merupakan fungsi genap yaitu jika dipenuhi $f(-x) = f(x)$, maka harga meannya adalah :

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{0} x\, f(-x)\, dx + \int_{0}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= -\int_{0}^{\infty} x\, f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} x\, f(x)\, dx = 0$$

$$E\{X\} = 0 \qquad \text{..........(2.3-8)}$$

Jika fungsi $f(x)$ simetris disekitar $x = a$, artinya

$f(a - x) = f(a + x)$ maka harga meannya diperoleh dari

$\int_{-\infty}^{\infty} (a - x)\ f(x)\ dx = 0$, sebab fungsi genap dan simetris terhadap $x = a$.

$$a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx - \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx.$$

Kita tahu dari definisi bahwa $E\left\{X\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx$,

sedangkan harga $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1$.

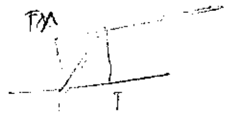
Akhirnya persamaan di atas menjadi :

$$E\left\{X\right\} = a \qquad \text{.............. (2.3-9)}$$

Untuk variabel random kompleks Z yaitu : $Z = X + iY$, dimana X dan Y variabel random maka meannya adalah:

$$E\left\{Z\right\} = E\left\{X\right\} + i\ E\left\{Y\right\} \qquad \text{.............. (2.3-10)}$$

Apabila disajikan proses stochastik X(t) maka mean darinya dinotasikan sebagai :



$$\eta_X(t) = \eta(t) = E\left\{X(t)\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x,t)\ dx \qquad \text{.........(2.3-11)}$$

2.3.2 M O M E N

Momen suatu variabel random atau proses didefinisikan sebagai :

$$m_k = E\left\{X^k\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\ f(x)\ dx\ ;\ k = 0,1,...$$
$$\text{.........(2.3-12)}$$

untuk $k = 0$ maka $m_o = 1$ dan untuk $k = 1$, maka :
$m_1 = E\left\{X\right\} = \eta$, untuk $k = 2$, $m_2 = E\left\{X^2\right\}$ dinamakan varian. Sedangkan momen sentral disekitar η dinotasikan sebagai :

$$\mu_k = E\left\{(X - \eta)^k\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta)^k\ f(x)\ dx$$
$$\text{..........(2.3-13)}$$

Jika diberikan dua variabel random X dan Y maka momen serikatnya m_{kr} didefinisikan sebagai :

$$m_{kr} = E\left\{X^k Y^r\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^r\ f(x,y)\ dx\ dy$$
$$\text{..........(2.3-14)}$$

Jumlahan k + r = n dinamakan order dari momen-momen, sebagai contoh m_{o2} , m_{20} , m_{11} adalah momen-momen order dua dan bisa ditulis sebagai :

$$R_{XY} = E\left\{XY\right\} = m_{11}$$

Sedangkan $m_{10} = \eta_X$, $m_{01} = \eta_Y$ kita namakan momen-momen order satu.

Kemudian momen sentral serikatnya μ_{kr} adalah :

$$\mu_{kr} = E\left\{(X - \eta_X)^k (Y - \eta_Y)^r\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta_X)^k (y - \eta_Y)^r f(x,y)\ dx\ dy \qquad \text{...........(2.3-15)}$$

2.3.3 AUTOKORRELASI (AUTOCORRELATION)

Diberikan proses X(t), pada umumnya merupakan fungsi waktu maka autokorrelasi (korelasi diri sendiri) merupakan momen serikat dari proses $X(t_1)$ dan $X(t_2)$ yang mana berupa variabel random-variabel random. Notasi autokorrelasi dinyatakan dengan $R(t_1,t_2)$ dan didefinisikan sebagai :

$$R(t_1,t_2) = E\left\{X(t_1)\ X(t_2)\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\ f(x_1,x_2;t_1,t_2)\ dx_1 dx_2 \qquad \text{...........(2.3-16)}$$

Dengan demikian autokorrelasi $R(t_1,t_2)$ merupakan fungsi dari t_1 dan t_2 .

Definisi di atas berlaku untuk proses X(t) berharga - real, untuk Proses berharga Kompleks, autokorrelasi - nya dinyatakan dengan :

$$R(t_1,t_2) = E\left\{X(t_1)\ X^*(t_2)\right\} \qquad \text{..........(2.3-17)}$$

dimana simbol $X^*(t_2)$ adalah konjugasi untuk proses $X(t_2)$.

Pada umumnya autokorrelasi dapat ditulis dalam beberapa cara yaitu :

$$R(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2)$$

maksudnya dalam hal ini variabel random yang diberikan merupakan anggota proses X(t). Sedangkan untuk proses X(t) dan Y(t) yang masing-masing merupakan fungsi dari t_1 dan t_2 maka yang disebut korrelasi-silang (CROSS-CORRELATION) dinyatakan dalam bentuk :

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E\left\{X(t_1)\ Y^*(t_2)\right\} \qquad \text{.........(2.3-18)}$$

dimana $Y^*(t_2)$ adalah konjugasi dari $Y(t_2)$.

2.3.4 AUTOKOVARIAN (AUTOCOVARIANCE)

Dari uraian di atas mean suatu variabel random adalah rata-rata dari f(x). Parameter lain yang sangat penting adalah varian (dispersi) σ^2 yang didefinisikan sebagai :

$$\sigma^2 = E\left\{(X-\eta)^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\eta)^2 f(x)\,dx \qquad \text{..........(2.3-19)}$$

untuk variabel random kontinu, sedang untuk variabel diskrit variannya adalah :

$$\sigma^2 = \sum_n (x_n-\eta)^2\, P\left\{X = x_n\right\} \qquad \text{..........(2.3-20)}$$

Dari persamaan di atas, dapat dicari standard deviasi σ merupakan akar kuadrat variannya.

Kita tahu bahwa $E\left\{X\right\} = \eta$, jadi :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\left\{(X-\eta)^2\right\} = E\left\{X^2 - 2X\eta + \eta^2\right\}\\ &= E\left\{X^2\right\} - 2\eta E\left\{X\right\} + \eta^2 = E\left\{X^2\right\} - \eta^2\\ &= E\left\{X^2\right\} - (E\left\{X\right\})^2 \qquad \text{..........(2.3-21)}\end{aligned}$$

Diberikan variabel random X dan Y, kovarian variabel random-variabel random tersebut merupakan momen sentral serikat order 2, bentuknya adalah :

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= E\left\{(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)\right\}\\ &= E\left\{XY - X\eta_Y - Y\eta_X + \eta_X\eta_Y\right\}\\ &= E\left\{XY\right\} - \eta_Y E\left\{X\right\} - \eta_X E\left\{Y\right\} + \eta_X\eta_Y\\ &= E\left\{XY\right\} - \eta_X\eta_Y - \eta_X\eta_Y + \eta_X\eta_Y\\ &= E\left\{XY\right\} - \eta_X\eta_Y\end{aligned}$$

Jadi :

$$E\left\{(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)\right\} = E\{XY\} - E\{X\}.E\{Y\} \quad \text{.............(2.3-22)}$$

Sedangkan koefisien korrelasi dari variabel random X dan Y adalah :

$$r = \frac{E\left\{(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)\right\}}{\sqrt{E\left\{(X-\eta_X)^2\right\}.E\left\{(Y-\eta_Y)^2\right\}}} \quad \text{.............(2.3-23)}$$

Apabila disajikan proses X(t) maka yang disebut autokovarian dari proses X(t) adalah kovarian proses - $X(t_1)$ dan $X(t_2)$ yaitu :

$$C(t_1,t_2) = E\left\{\left[X(t_1) - \eta(t_1)\right]\left[X(t_2) - \eta(t_2)\right]\right\} \quad \text{.............(2.3-24)}$$

$$= E\left\{X(t_1)X(t_2) - \eta(t_1).\eta(t_2) - \eta(t_1).\eta(t_2) + \eta(t_1).\eta(t_2)\right\}$$

$$= E\left\{X(t_1)\,X(t_2)\right\} - \eta(t_1).\eta(t_2)$$

Akhirnya didapat :

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - \eta(t_1).\eta(t_2) \quad \text{.............(2.3-25)}$$

Kita dapat menarik kesimpulan bahwa untuk varian proses X(t) adalah :

$$\sigma^2_{X(t)} = C(t,t) = R(t,t) - \eta^2(t) \quad \text{....(2.3-26)}$$

Untuk proses X(t) suatu proses kompleks maka autokovariannya adalah :

$$C(t_1,t_2) = E\left\{\left[X(t_1) - \eta(t_1)\right]\left[X^*(t_2) - \eta^*(t_2)\right]\right\}$$

$$= E\left\{X(t_1)\,X^*(t_2) - \eta(t_1)\,X^*(t_2) - \eta^*(t_2)\,X(t_1) + \eta(t_1)\,\eta^*(t_2)\right\}$$

$$= E\left\{X(t_1)\,X^*(t_2)\right\} - \eta(t_1)\,E\left\{X^*(t_2)\right\} - \eta^*(t_2)\,E\left\{X(t_1)\right\} + \eta(t_1)\,\eta^*(t_2)$$

karena $E\left\{X(t_1)\,X^*(t_2)\right\} = R(t_1,t_2)$ dan harga $E\left\{X^*(t)\right\} = \eta^*(t)$, maka ;

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - \eta(t_1)\eta^*(t_2) - \eta(t_2)\eta(t_1) + \eta(t_1)\eta^*(t_2).$$
$$= R(t_1,t_2) - \eta(t_1)\eta^*(t_2) \qquad \text{.......... (2.3-27)}$$

dimana $X^*(t_2)$ adalah konjugasi $X(t_2)$ dan

$\eta^*(t_2)$ adalah konjugasi $\eta(t_2)$.

Seka rang jika disajikan dua proses kompleks X dan Y maka kovarian-silangnya (CROSS-COVARIANCE) adalah :

$$C_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2) - \eta_X(t_1)\ \eta^*_Y(t_2) \qquad \text{........... (2.3-28)}$$

2.4 EKSPANSI FOURIER

Fungsi f(x) dikatakan mempunyai perioda T atau periodik dengan perioda T untuk semua x, jika $f(x + T) = f(x)$ dimana T konstanta positif. Harga $T > 0$ terkecil disebut perioda terkecil dari fungsi f(x).

Untuk f(x) yang didefinisikan pada selang/interval terbuka (-T,T) dan diluar selang tersebut berlaku ; $f(x + 2T) = f(x)$, hal ini diasumsikan bahwa f(x) mempunyai perioda 2T.

Ekspansi Fourier yang berhubungan dengan f(x) diberikan sebagai :

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{T} \right) \qquad \text{............(2.4-1)}$$

dimana a_n dan b_n adalah koefisien-koefisien Fourier yang besarnya adalah :

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{T}\, dx$$
$$\text{..........(2.4-2)}$$
$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{T}\, dx$$

dengan $n = 0,1,2, \ldots$

Jika f(x) mempunyai perioda 2T, maka harga koefisien a_n dan b_n ditentukan sebagai :

$$a_n = \frac{1}{\ldots} \int^{c + 2T} f(x) \operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{\ldots}\, dx \qquad \text{(2.4-3)}$$

dan

$$b_n = \frac{1}{T} \int_c^{c+2T} f(x) \text{ Sin } \frac{n\pi x}{T} \, dx$$

dimana c adalah setiap bilangan real. Untuk c = - T persamaan (2.4-3) menjadi bentuk (2.4-2). Untuk menentukan harga a_o pada persamaan (2.4-1) kita menggunakan persamaan (2.4-2) dengan mengambil harga n=0 sehingga dari (2.4-2) kita peroleh :

$$a_o = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \, dx \quad \text{dan} \quad \tfrac{1}{2}a_o = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \, dx.$$

Pada (2.4-1), jika harga $\frac{n\pi}{T} = \omega$, n = 0,1,... maka :

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{Cos } \omega x + b_n \text{Sin } \omega x) \qquad \text{..............(2.4-4)}$$

dan koefisien Fouriernya adalah :

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \text{ Cos } \omega x \, dx$$

$$\text{...........(2.4-5)}$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \text{ Sin } \omega x \, dx$$

Dengan menggunakan identitas Euler yaitu :

$$e^{ix} = \text{Cos } x + i \text{ Sin } x \, , \quad e^{-ix} = \text{Cos } x - i \text{ Sin } x$$

$$e^{i\omega x} = \text{Cos } \omega x + i \text{ Sin } \omega x, \quad e^{-i\omega x} = \text{Cos } \omega x - i \text{ Sin } \omega x$$

sehingga ekspansi Fourier f(x) dapat dinyatakan seba - gai :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{i\omega x} \, , \; \omega = \frac{n\pi}{T} \qquad \text{.......(2.4-6)}$$

dimana harga;

$$C_n = \frac{1}{2\,T} \int_{-T}^{T} f(x) \, e^{-i\omega x} \, dx \qquad \text{..........(2.4-7)}$$

Apabila f(x) terdefinisi pada selang (-T/2, T/2) maka (2.4-6) menjadi :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega x} \qquad \text{dengan harga}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, e^{-i\omega x} \, dx \qquad \text{.......(2.4-8)}$$

Untuk proses X(t) = f(x) yang terdefinisi pada selang (-T/2 , T/2) maka ekspansi Fourier proses X(t) adalah sebagai berikut :

$$X(t) = \sum^{\infty} C_n \, e^{i\omega t} \qquad \text{..............(2.4-9)}$$

dan harga :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)\, e^{-i\omega t} dt \; \ldots\ldots\ldots \; (2.4\text{-}10)$$

2.5 FORMULA INVERSI FOURIER

Sebelum kita sampai kepada pembicaraan tentang formula inversi Fourier, sebaiknya kita ketahui dahulu mengenai apa yang disebut Fungsi Karakteristik.

Fungsi Karakteristik $\Phi(\omega) = \Phi_X(\omega)$ suatu variabel random adalah transformasi Fourier dari fungsi densitas $f(x)$.

Definisi 4.1

Fungsi karakteristik suatu variabel random X didefinisikan sebagai :

$$\Phi(\omega) = E\left\{ e^{i\omega x} \right\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2.5\text{-}1)$$

Harga ekspektasi ini adalah fungsi kompleks $e^{i\omega x}$ = $\cos \omega x + i \sin \omega x$ dari variabel random X. Dan persamaan (2.5-1) ini dapat kita tuliskan dalam bentuk integral, yaitu :

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\, dx \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2.5\text{-}2)$$

dan jika variabel random X bertipe diskrit, maka :

$$\Phi(\omega) = \sum_k e^{i\omega x_k} . P\left\{ X = x_k \right\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (2.5\text{-}3)$$

Bentuk lain fungsi karakteristik dan disebut fungsi - karakteristik bentuk kedua yaitu :

$$\Psi(\omega) = \ln \Phi(\omega) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2.5\text{-}4)$$

Kita perhatikan bhwa untuk $\omega = 0$, maka :

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \quad \text{dan}$$

$$\Psi(0) = \ln 1 = 0 \; .$$

Sekarang dari persamaan (2.5-2) kita dapat membentuk persamaan baru yaitu :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega \; \ldots\ldots\ldots \; (2.5\text{-}5)$$

dimana $f(x)$ adalah fungsi densitas variabel random X yang diberikan dan pernyataan (2.5-5) di atas dikenal sebagai Formula Inversi Fourier.

Bukti :

Untuk membuktikan (2.5-5) kita pakai dasar sifat-sifat fungsi impuls. Kita misalkan bahwa :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, d\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.5\text{-}6)$$

dan
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \delta(x - y)\, dy = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5\text{-}7)$$

Kalau kita dapat menunjukkan (2.5-5) dengan memasukkan bentuk-bentuk (2.5-2) ke dalam (2.5-5) dan menghasilkan (2.5-7) yang artinya sama dengan (2.5-5) maka Formula Inversi Fourier terbukti.

Demikian;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{-i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty} e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} f(y)\, dy\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x - y)}\, d\omega\, dy$$

Dari persamaan (2.5-6) kita peroleh :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{-i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \delta(x - y)\, dy$$

Karena persamaan (2.5-7) maka ;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega . \quad \text{terbukti.}$$

Kalau $\Phi(\omega)$ diambil untuk fungsi sembarang/proses maka persamaan (2.5-5) tetap berlaku.

Untuk mencari fungsi distribusi F(x) dapat dibentuk secara langsung dengan batas-batas $\Phi(\omega)$, yaitu :

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots(2.5\text{-}8)$$

dengan mengintegralkan (2.5-5) dari x_1 ke x_2 , kita peroleh :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_1}^{x_2} e^{-i\omega x}\, \Phi(\omega)\, dx\, d\omega$$

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x_2} - e^{-i\omega x_1}}{-i\omega}\, \Phi(\omega)\, d\omega$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots(2.5\text{-}9)$$

Apabila fungsi f(x) fungsi genap yaitu memenuhi $f(x) = f(-x)$ maka harga $\Phi(\omega)$ adalah real dan genap.

Dari persamaan (2.5-2) didapatkan :

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\ \mathrm{Cos}\ \omega x + i\ \mathrm{Sin}\ \omega x)\, dx$$

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{Cos} \omega x \, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\ 2.5\text{-}10\ )$$

(sebab fungsi genap, harga $\Phi(\omega)$ diambil yang real saja)

Sedangkan f(x) adalah :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)(\ \operatorname{Cos} \omega x - i \operatorname{Sin} \omega x)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \operatorname{Cos} \omega x \, d\omega \quad \ldots\ldots (\ 2.5\text{-}11\ )$$