

BAB II

KONSEP DASAR SEBAGAI PENUNJANG

2.1 DASAR-DASAR PELUANG

2.1.1 RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN

Definisi 2.1 :

Ruang Sampel yang dinyatakan dengan S , adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan.

Setiap hasil yang terdapat pada ruang sampel dinamakan titik sampel.

Contoh 2.1 :

Misalkan tiga buah kelereng dipilih secara sembarang dari sepuluh kelereng. Kesepuluh kelereng tersebut lima berwarna merah (M) dan lima berwarna putih (P). Ruang Sampel yang dihasilkan adalah $S = \{ MMM, MMP, MPM, PMM, PPP, PPM, PMP, MPP \}$.

Setiap hasil (anggota) dari ruang sampel S dinamakan titik sampel.

Definisi 2.2 :

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel.

Dari definisi ini, jumlah kejadian yang dapat dihasilkan oleh suatu ruang sampel S adalah 2^s , dengan s menunjukkan banyaknya titik sampel pada S .

Misalkan terdapat ruang sampel $S = \{1, 2, 3\}$, kejadian-kejadian yang mungkin dihasilkan oleh S sebanyak $2^3 = 8$, yaitu : $\{ \emptyset \}, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 1, 3 \},$

{ 2,3 }, { 1,2,3 }.

Contoh 2.2 :

Misalkan $A = \{ \text{MMM}, \text{MMP}, \text{MPM}, \text{PMM} \}$ himpunan bagian dari ruang sampel S pada contoh 2.1, maka A merupakan kejadian bahwa kelereng yang terpilih sekurang-kurangnya dua berwarna merah.

Dalam hal ini jika salah satu titik sampel yang berada di A diperoleh, yaitu MMM atau MMP atau MPM atau PMM , maka kejadian A dikatakan terjadi.

Theorema 2.1 :

Bila suatu percobaan dapat menghasilkan N macam hasil yang berkemungkinan sama, dan bila tepat sebanyak n dari hasil berkaitan dengan kejadian A , maka peluang kejadian A adalah :

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Dari theorema ini diperoleh :

- n paling kecil 0, yaitu kejadian A tidak ada.
- n paling besar N , yaitu semua yang terjadi merupakan kejadian A .

Sehingga diperoleh : $0 \leq P(A) \leq 1$

Untuk ruang sampel S , karena anggota-anggota S merupakan hasil yang pasti diperoleh, maka $P(S) = 1$.

Hubungan kejadian-kejadian dikatakan mutually exclusive, bila kejadian-kejadian tersebut mempunyai hubungan yang saling meniadakan atau saling terpisah.

Artinya kalau suatu kejadian terjadi, maka tidak mungkin kejadian lain juga terjadi. Misalnya jika sebuah mata uang logam dilemparkan, maka tampaknya M(muka) dan B(belakang) mempunyai hubungan yang saling terpisah, sebab yang dapat terjadi hanya salah satu dari dua permukaan.

Hubungan kejadian-kejadian dikatakan independent (bebas), bila terjadinya suatu kejadian tidak mempengaruhi terjadinya kejadian yang lain.

Theorema 2.2 :

Bila kejadian-kejadian A_1, A_2, \dots, A_n saling terpisah, maka :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Untuk $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ dibaca dengan peluang (A_1 atau A_2 atau..... atau A_n).

2.1.3 PELUANG BERSYARAT

Peluang terjadinya suatu kejadian B bila diketahui bahwa kejadian A telah terjadi disebut peluang bersyarat dan dinyatakan dengan $P(B|A)$. Lambang $P(B|A)$ dibaca dengan peluang B terjadi bila diketahui A terjadi.

Peluang bersyarat B dengan diketahui A dinyatakan dengan

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \text{ bila } P(A) > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga diperoleh } P(B \cap A) &= P(B|A) P(A) \\ &= P(A|B) P(B) \end{aligned}$$

Theorema 2.3 :

Bila n merupakan sembarang bilangan bulat ($n \geq 2$), dan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ merupakan sejumlah n kejadian dimana $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, maka :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) &= P(A_1) P(A_2 | A_1) \\ &\quad P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \dots \dots \\ &\quad P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$ menyatakan peluang kejadian bahwa n kejadian A_1, A_2, \dots, A_n terjadi.

$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$ dibaca dengan peluang (A_1 dan A_2 dan \dots dan A_n).

2.1.4 KOMPLEMENT

Definisi 2.3 :

Komplemen suatu kejadian A terhadap S ialah himpunan semua unsur S yang tidak termasuk A . Komplemen A dinyatakan dengan lambang \bar{A} .

Theorema 2.4 :

Bila A dan \bar{A} kejadian yang saling berkomplemen maka $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Definisi 2.4 :

Jika A suatu kejadian yang terdiri dari $X_1,$

X_2, \dots, X_n , maka didefinisikan peluang dari A adalah $P(A) = P_1 + P_2 + \dots + P_n$

Definisi ini memberi pengertian P_i adalah peluang $X_i, i=1,2,\dots,n$ untuk dihasilkan.

Jadi jika ruang sampel S terdiri dari N titik sampel, misal X_1, X_2, \dots, X_N yang masing-masing titik sampel mempunyai peluang yang sama untuk dihasilkan, maka diperoleh $P_1 = P_2 = \dots = P_N$, sedangkan $P_1 + P_2 + \dots + P_N = 1$, sehingga $P_1 = P_2 = \dots = P_N = 1/N$

Untuk kejadian A diatas diperoleh $P(A) = \frac{n}{N}$

2.1.5 VARIABEL ACAK

Definisi 2.5 :

Variabel yang nilainya merupakan suatu bilangan ditentukan oleh terjadinya hasil suatu percobaan dinamakan variabel acak.

Suatu variabel acak akan dinyatakan dengan huruf besar, misalnya X, sedangkan hasilnya dinyatakan dengan huruf kecil yang sesuai, misalnya x.

Suatu variabel acak misalkan X dinamakan variabel acak diskrit jika nilai yang mungkin dari X, terhingga atau tak terhingga tetapi terbilang.

Jadi X dapat mengambil nilai $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ atau $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; $x_i \in R$.

Suatu variabel acak diskrit mendapat tiap nilai dengan pe-

luang tertentu.

Untuk menyatakan peluang X mendapatkan nilai x dituliskan

dengan $P(X=x)$.

Definisi 2.6 :

Fungsi $f(x)$ adalah suatu fungsi peluang atau distribusi peluang suatu variabel acak diskrit X , bila untuk setiap hasil x yang mungkin :

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum f(x) = 1$
3. $P(X=x) = f(x)$

2.1.6 NILAI HARAPAN VARIABEL ACAK DISKRIT

2.1.6.1 RATA-RATA

Misalkan X variabel acak diskrit, rata-rata dari X dinyatakan dengan μ atau $E(X)$, didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum x_i f(x_i)$$

Jumlahan meliputi semua nilai yang mungkin untuk X .

$E(X)$ juga dinamakan nilai harapan dari X .

Theorema 2.5 :

Untuk variabel-variabel acak X_1, X_2, \dots, X_n

$$E \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n E (X_i)$$

2.1.6.2 Varian

Varian dari X dinyatakan dengan σ^2 atau $\text{Var}(X)$,

dirumuskan dengan :

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sigma^2 = E(X - E(X))^2 \\ &= \sum (x_i - E(X))^2 f(x_i)\end{aligned}$$

Jumlahan meliputi semua nilai yang mungkin untuk X.

Var(X) juga dinamakan nilai harapan dari $(X-E(X))^2$

2.1.7 BEBERAPA DISTRIBUSI PELUANG VARIABEL ACAK DISKRIT

2.1.7.1 Distribusi Geometri

Bila usaha yang saling bebas dan dilakukan berulang kali menghasilkan sukses dengan peluang p, dan gagal dengan peluang q=1-p, maka distribusi peluang variabel acak X, yaitu banyaknya usaha yang berakhir pada sukses yang pertama diberikan oleh :

$$f(x) = f(x;p) = p q^{x-1} ; x = 1, 2, 3, \dots$$

Jadi dalam hal ini, distribusi geometri merupakan distribusi peluang untuk suatu variabel acak yang menyatakan banyaknya usaha yang berakhir pada sukses yang pertama.

2.1.7.2 Distribusi Uniform

Untuk X variabel acak diskrit yang mengambil nilai x_1, x_2, \dots, x_k dengan peluang yang sama, distribusi peluang dari X diberikan oleh :

$$f(x) = f(x,k) = 1 / k \quad ; \quad x = x_1, x_2, \dots, x_k$$

2.2 PEMILIHAN SAMPEL

2.2.1 POPULASI DAN SAMPEL

Untuk mendapatkan kesimpulan suatu permasalahan dari keseluruhan unsur-unsur yang akan diteliti, seringkali tidak dilakukan pengamatan terhadap seluruh unsur-unsur yang ada, akan tetapi dilakukan pengamatan terhadap sebagian unsur-unsur yang akan diteliti.

Keseluruhan unsur-unsur yang akan diteliti dinamakan populasi. Sedangkan sebagian dari keseluruhan unsur-unsur yang akan diteliti dinamakan sampel.

Oleh karena kesimpulan yang diperoleh sampel digunakan untuk populasi, maka sampel dipandang sebagai wakil dari populasi.

Sampel dapat dikatakan sebagai wakil dari populasi jika sampel tersebut diperoleh dari suatu populasi yang anggota-anggotanya mempunyai peluang yang sama untuk terpilih dalam sampel (diperoleh dengan sampling acak).

Dalam hal ini N digunakan untuk menyatakan ukuran populasi yaitu banyaknya anggota yang terdapat dalam populasi.

Sedangkan n digunakan untuk menyatakan ukuran sampel yaitu banyaknya anggota yang terdapat dalam sampel.

Untuk ukuran populasi ada dua macam yaitu populasi berhingga dan populasi takberhingga.

Sampel dapat dikumpulkan (dipilih) dari populasi

dengan suatu cara. Cara yang digunakan untuk memilih sampel dinamakan sampling.

Pada dasarnya ada dua macam sampling, yaitu :

1. Sampling Acak

Sampling dinamakan acak (sampling acak), jika cara yang digunakan untuk memilih sampel tersebut memberikan peluang yang sama pada semua anggota populasi untuk dijadikan anggota sampel.

Sampling acak hanya digunakan untuk populasi yang berhingga.

Sampling acak dapat dibagi menjadi dua macam, yaitu :

1. Sampling acak sederhana.
2. Sampling acak yang lain (misalnya sampling kelompok).

Dalam tulisan ini hanya dibicarakan sampling acak sederhana.

2. Sampling tidak acak

Sampling dinamakan tidak acak jika cara yang digunakan untuk memilih sampel tersebut tidak memberikan peluang yang sama kepada semua anggota populasi untuk dijadikan anggota sampel.

Sampling tidak acak dapat digunakan untuk populasi yang berhingga ataupun tak berhingga.

Untuk populasi yang berhingga, berdasarkan bagaimana anggota populasi diperlakukan ketika sampel dipilih, sampling dapat dibedakan menjadi :

1. Sampling Dengan Pengembalian

Pada sampling dengan pengembalian, setiap anggota populasi yang telah terpilih menjadi anggota sampel disatu-

kan kembali dengan anggota populasi yang lain .

Dengan demikian anggota ini masih mempunyai kesempatan untuk terpilih kembali pada pemilihan berikutnya.

Dengan cara ini banyaknya sampel yang mungkin dapat dipilih dari populasi yang bersangkutan adalah N^n , dengan N menyatakan ukuran populasi dan n menyatakan ukuran sampel.

Contoh 2.5 :

Misalkan terdapat populasi dengan $N=3$, anggotanya terdiri dari a, b, c, dan dipilih sampel dengan $n=2$. Banyaknya sampel yang mungkin dapat dipilih adalah $N^2=3^2=9$, dengan susunan aa, ab, ac, bb, ba, bc, cc, ca, cb.

2. Sampling Tanpa Pengembalian

Pada sampling tanpa pengembalian, setiap anggota populasi yang telah terpilih menjadi anggota sampel tidak disatukan kembali dengan anggota populasi yang lain. Dengan demikian setiap anggota populasi hanya dapat terpilih satu kali.

Jika telah diperoleh suatu sampel ukuran n dari populasi ukuran N , berarti anggota sampel yang pertama dipilih dari populasi yang terdiri dari N anggota pada pemilihan yang pertama, anggota sampel yang kedua dipilih dari populasi dengan $N-1$ anggota pada pemilihan yang kedua, anggota sampel ketiga dipilih dari populasi dengan $N-2$ anggota pada pemilihan ketiga, demikian seterusnya hingga anggota sampel ke n dipilih dari populasi dengan $N-n+1$ anggota pada pemilihan ke n .

Dengan menggunakan Theorema (2.6), jumlah sampel yang mungkin dihasilkan dengan cara ini sebanyak

$$N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1) = {}_N P_n = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Oleh karena sampel-sampel yang mempunyai unsur sama dianggap sebagai sebuah sampel, berdasarkan Theorema (2.7), jumlah sampel yang mungkin dihasilkan menjadi :

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Jika contoh (2.5) dikerjakan dengan sampling tanpa pengembalian, banyaknya sampel yang mungkin dihasilkan :

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3,$$

dengan susunan : ab, ac, bc.

Sampel ini sebenarnya berasal dari ab,ba,ac,ca,bc,cb.

2.2.2 SAMPLING ACAK SEDERHANA

Definisi 2.7 :

Sampling acak sederhana adalah metode memilih n unit dari N unit sedemikian hingga setiap sampel dari

$\binom{N}{n}$ sampel mempunyai kemungkinan yang sama untuk

terpilih.

Dari definisi ini diperoleh, jika terdapat suatu sampling,

dimana jumlah sampel yang mungkin dihasilkan oleh sampling tersebut sebanyak $\binom{N}{n}$, dengan setiap sampel dari $\binom{N}{n}$ sampel mempunyai peluang yang sama untuk terpilih, maka sampling tersebut dinamakan sampling acak sederhana.

Oleh karena jumlah sampel yang mungkin dihasilkan sampling acak sederhana sebanyak $\binom{N}{n}$, maka sampling acak sederhana dianggap diterapkan pada sampling tanpa pengembalian (lihat 2.2.1).

Dari pengertian ini, untuk menjelaskan sampling acak sederhana akan digunakan sampling tanpa pengembalian.

Dari definisi diatas, sampel yang diperoleh dengan sampling acak sederhana mempunyai peluang sebesar $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ untuk terpilih.

Ini berarti pemilihan sampelnya dilakukan tanpa pengembalian, sedemikian hingga setiap anggota populasi yang ada pada setiap pemilihan mempunyai peluang yang sama untuk terpilih dalam sampel.

Untuk lebih jelasnya dapat dilihat sebagai berikut :

Oleh karena pemilihan sampel dilakukan tanpa pengembalian dengan peluang yang sama, maka jika sampel ukuran n akan dipilih dari populasi ukuran N , dengan menggunakan definisi (2.4) diperoleh :

Pemilihan ke 1, peluang suatu anggota populasi terpi-

Pemilihan ke 2, peluang suatu anggota populasi terpi-

lih dalam sampel sebesar $\frac{1}{N-1}$

Pemilihan ke 3 , peluang suatu anggota populasi terpi-

lih dalam sampel sebesar $\frac{1}{N-2}$

.....
.....
.....

Pemilihan ke n , peluang suatu anggota populasi terpi-

lih dalam sampel sebesar $\frac{1}{N-(n-1)}$

Pandang populasi $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_N$, sampel ukuran n akan dipilih dari populasi tersebut.

Misalkan :

- Anggota populasi yang akan terpilih menjadi sampel adalah $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.
- B_i : Kejadian terpilihnya anggota populasi ke dalam sampel, pada pemilihan ke i.
- P_i : Peluang terpilihnya a_i menjadi anggota sampel.

Oleh karena sampel $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ akan terpilih jika B_1, B_2, \dots, B_n terjadi, maka peluang terpilihnya sampel $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, adalah peluang kejadian B_1, B_2, \dots, B_n terjadi. Sedangkan B_i terjadi bila B_1, B_2, \dots, B_{i-1} terjadi.

Dengan Theorema (2.3), peluang terpilihnya sampel $a_1, a_2,$

....., a_n menjadi :

$$P(B_1 B_2 B_3 \dots B_n) = P(B_1) P(B_2 | B_1) P(B_3 | B_1 B_2) \dots \\ \dots P(B_n | B_1 B_2 B_3 \dots B_{n-1})$$

- Pada pemilihan pertama, diperoleh $B_1 = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ sebab B_1 akan terjadi jika a_1 atau a_2 atau a_n terpilih dalam sampel .

Karena pemilihannya dilakukan dari N anggota populasi, sesuai definisi (2.4) didapat :

$$P(B_1) = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

$$P(B_1) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}$$

$$= \frac{n}{N}$$

- Misalkan pemilihan pertama menghasilkan anggota sampel a_1 . Pada pemilihan kedua, $(B_2 | B_1) = \{ a_2, a_3, \dots, a_n \}$ sebab $(B_2 | B_1)$ akan terjadi jika a_2 atau a_3 atau atau a_n terpilih dalam sampel .

Karena pemilihannya dilakukan dari $N-1$ anggota populasi maka didapat :

$$P(B_2 | B_1) = P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_n$$

$$P(B_2 | B_1) = \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{N-1}$$

$$= \frac{n-1}{N-1}$$

- Misalkan pemilihan kedua menghasilkan anggota sampel a_2 . Pada pemilihan ketiga, $(B_3 \ B_1 \ B_2) = \{ a_3, a_4, \dots, \dots, a_n \}$, sebab $(B_3 \ B_1 \ B_2)$ akan terjadi bila a_3 atau a_4 atau atau a_n terpilih dalam sampel.

Karena pemilihannya dilakukan dari $N-2$ anggota populasi, maka berlaku :

$$P(B_3 \ B_1 \ B_2) = P_3 + P_4 + \dots + P_n$$

$$P(B_3 \ B_1 \ B_2) = \frac{1}{N-2} + \frac{1}{N-2} + \dots + \frac{1}{N-2}$$

$$P(B_3 \ B_1 \ B_2) = \frac{n-2}{N-2}$$

.....

- Misalkan anggota sampel yang belum terpilih pada pemilihan ke $(n-1)$ adalah a_n , maka diperoleh :

$(B_n \ B_1 \ B_2 \ \dots \ B_{n-1}) = \{a_n\}$ dari $N-(n-1)$ anggota populasi, sebab hanya a_n yang belum terpilih dalam sampel sehingga :

$$P(B_n \ B_1 \ B_2 \ \dots \ B_{n-1}) = P_n$$

Dengan diperolehnya hasil-hasil diatas, maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
 P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}) &= P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) \\
 &\quad P(B_3 | B_1 \cap B_2) \dots \dots \dots \\
 &\quad P(B_{n-1} | B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-2}) \\
 &= \frac{n (n-1) (n-2) \dots \dots \dots 2}{N (N-1) (N-2) \dots \dots N-(n-2)} \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

Dengan demikian syarat theorema 2.3 dipenuhi, sehingga berlaku :

$$\begin{aligned}
 P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_n) &= \frac{n (n-1) (n-2) \dots \dots \dots 1}{N (N-1)(N-2) \dots \dots N-(n-1)} \\
 &= \frac{n!}{N (N-1) (N-2) \dots \dots \dots N-(n-1)} \\
 &= \frac{n! (N-n)(N-(n+1)) \dots \dots \dots 1}{N(N-1)(N-2) \dots \dots (N-(n-1))(N-n)(N-(n+1)) \dots 1} \\
 &= \frac{n! (N-n)!}{N!}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{1}{\binom{N}{n}}$$

Dari hasil ini diperoleh, sampel A_1, A_2, \dots, A_n yang dihasilkan dengan sampling acak sederhana, mempunyai

peluang sebesar $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ untuk terpilih.

Sesuai dengan sampling acak, selanjutnya akan ditunjukkan, dengan sampling acak sederhana, anggota populasi yang satu dengan yang lain mempunyai peluang yang sama untuk terpilih dalam sampel.

Misalkan :

P : Peluang anggota populasi ke i , $i=1,2,3,\dots,N$ terpilih dalam sampel.

B_k : Kejadian anggota populasi ke i , $i=1,2,\dots,N$ terpilih dalam sampel pada pemilihan ke k , $k=1,2,3,\dots,n$.

\bar{B}_k : Kejadian anggota populasi ke i , $i=1,2,\dots,N$ tidak terpilih dalam sampel pada pemilihan ke k , $k=1,2,3,\dots,n$.

Sesuai dengan (2.1.4) diperoleh :

$$P(B_1) = \frac{1}{N}$$

$$P(\bar{B}_1) = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$$

$$P(B_2) = \frac{1}{N-1}$$

$$P(\bar{B}_2) = 1 - \frac{1}{N-1} = \frac{N-2}{N-1}$$

.....

$$P(B_{n-1}) = \frac{1}{N-(n-2)}$$

$$P(\bar{B}_{n-1}) = 1 - \frac{1}{N-(n-2)} = \frac{N-(n-1)}{N-(n-2)}$$

$$P(B_n) = \frac{1}{N-(n-1)}$$

$$P(\bar{B}_n) = 1 - \frac{1}{N-(n-1)} = \frac{N-n}{N-(n-1)}$$

Karena anggota populasi yang terpilih dalam sampel pada suatu pemilihan tidak terpilih pada pemilihan sebelumnya, maka diperoleh :

Untuk $k=2,3,\dots,n$, $B_k = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap \dots \cap \bar{B}_{k-1} \cap B_k$

Dengan Theorema (2.3) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap \dots \cap \bar{B}_{k-1}) &= P(\bar{B}_1) P(\bar{B}_2 | \bar{B}_1) \dots \dots \dots \\
 & P(\bar{B}_{k-1} | \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap \dots \cap \bar{B}_{k-2}) \\
 &= \frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N-1} \dots \dots \dots \frac{N-(k-1)}{N-(k-2)} \\
 &= \frac{N-(k-1)}{N} \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

Dengan demikian syarat theorema 2.3 dipenuhi, sehingga berlaku :

$$\begin{aligned}
 P(B_k) &= P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \dots \cap \bar{B}_{k-1} \cap B_k) \\
 &= P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2 | \bar{B}_1) \dots \dots \dots P(\bar{B}_{(k-1)} | \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \dots \dots \dots \cap \bar{B}_{(k-2)}) \\
 & \quad P(B_k | \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \dots \dots \cap \bar{B}_{(k-1)}) \\
 &= \frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N-1} \dots \dots \dots \frac{N-(k-1)}{N-(k-2)} \frac{1}{N-(k-1)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N}$$

Bukti :

Untuk k=2

$$P(B_2) = P(\bar{B}_1 \cap B_2) = P(\bar{B}_1) P(B_2 | \bar{B}_1)$$

$$= \frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N}$$

Untuk k=3

$$P(B_3) = P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3) = P(\bar{B}_1) P(\bar{B}_2 | \bar{B}_1) P(B_3 | \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2)$$

$$= \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{1}{N-2} = \frac{1}{N}$$

Terbukti theorema benar untuk k=2 dan k=3 .

Akan dibuktikan jika theorema benar untuk k=n-1, maka benar untuk k=n.

Andaikan benar untuk k=n-1, berarti :

$$P(B_{n-1}) = P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \dots \cap \bar{B}_{(n-2)} \cap B_{(n-1)})$$

$$= P(\bar{B}_1) P(\bar{B}_2 | \bar{B}_1) \dots P(\bar{B}_{(n-2)} | \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \dots \cap \bar{B}_{(n-3)}) P(B_{(n-1)} | \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \dots \cap \bar{B}_{(n-2)})$$

$$= \frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N-1} \dots \frac{N-(n-2)}{N-(n-3)} \frac{1}{N-(n-2)}$$

$$= \frac{1}{N}$$

Sedangkan :

$$P(B_n) = P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \dots \cap \bar{B}_{(n-2)} \cap \bar{B}_{(n-1)} \cap B_n)$$

$$= P(\bar{B}_1) P(\bar{B}_2 | \bar{B}_1) \dots P(\bar{B}_{(n-2)} | \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \dots \cap \bar{B}_{(n-3)})$$

$$P(\bar{B}_{(n-1)} | \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \dots \cap \bar{B}_{(n-2)}) P(B_n | \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \dots$$

$$\dots \cap \bar{B}_{(n-1)})$$

$$= \frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N-1} \dots \frac{N-(n-2)}{N-(n-3)} \frac{N-(n-1)}{N-(n-2)} \frac{1}{N-(n-1)}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{N-(n-1)}{N-(n-1)} = \frac{1}{N}$$

Karena Theorema benar untuk $k=n$, maka terbukti $P(B_k) = 1/N$ untuk $k=2,3,\dots,n$.

Sehingga diperoleh $P(B_k) = \frac{1}{N}$, untuk $k=1,2,\dots,n$.

Dari hasil ini diperoleh, anggota populasi ke i dapat terpilih dalam sampel pada pemilihan pertama, pemilihan kedua, pemilihan ketiga,....., pemilihan ke n . Oleh karena anggota populasi ke i terpilih dalam sampel

hanya satu kali, maka untuk anggota populasi ke i yang terpilih dalam sampel, akan terpilih pada pemilihan pertama atau pada pemilihan kedua atau atau pada pemilihan ke n .

Dari ini diperoleh :

$$P = P(B_1 \text{ atau } B_2 \text{ atau } \dots \text{ atau } B_n)$$

Karena B_1, B_2, \dots, B_n saling terpisah, sesuai theorema (2.2) diperoleh :

$$P = P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n)$$

$$= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}$$

$$= \frac{n}{N}$$

Oleh karena $i=1,2,3,\dots,N$, dari hasil ini dapat dikatakan, dengan sampling acak sederhana, jika sampel ukuran n dipilih dari populasi ukuran N , setiap anggota populasi mempunyai peluang sebesar n/N untuk terpilih dalam sampel.

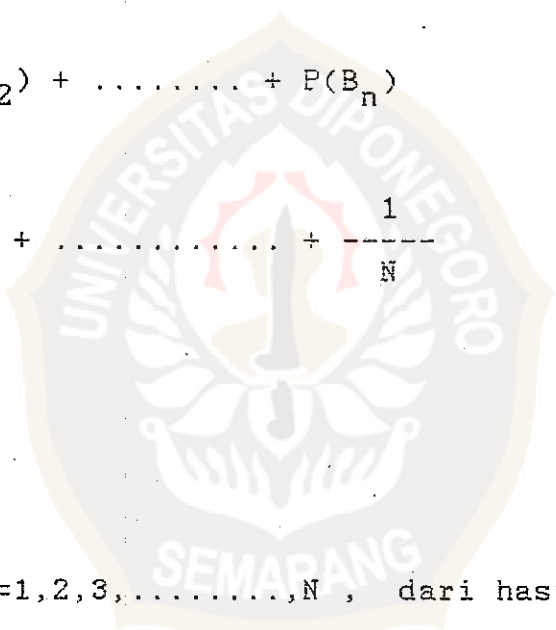
Jadi terlihat, dengan sampling acak sederhana, anggota populasi yang satu dengan yang lain mempunyai peluang yang sama untuk terpilih dalam sampel.

Dalam sampling acak sederhana, untuk memilih sampel dari populasi dilakukan dengan dua cara yaitu :

1. Dengan cara undian

Langkah-langkah yang digunakan adalah :

- Buat daftar yang berisi semua obyek yang menjadi



anggota populasi.

- Beri nomor urut pada semua obyek tersebut.
- Tulis nomor urut tersebut masing-masing pada kertas kecil.
- Gulung kertas tersebut baik-baik.
- Masukkan gulungan kertas kedalam kaleng, dan kocok kaleng tersebut baik-baik.
- Ambil kertas gulungan satu demi satu sampai jumlah yang diperlukan tercapai.
- Nomor-nomor yang terpilih menunjukkan nomor anggota populasi yang menjadi sampel.

Cara undian ini hanya digunakan bila populasinya tidak terlalu besar, sebab kalau populasinya besar, langkah-langkah diatas akan mempengaruhi peluang dari anggota populasi yang terpilih. Hal ini dapat dilihat sebagai berikut, dengan gulungan kertas berjumlah besar, maka akan sulit untuk mencampur dengan rata seluruh gulungan kertas yang ada. Sebagai akibatnya gulungan kertas yang satu dengan yang lain akan mempunyai peluang yang tidak sama untuk terpilih.

Agar semua anggota populasi mempunyai peluang yang sama untuk terpilih dalam sampel, cara undian diatas dapat digantikan dengan tabel bilangan acak.

Dengan tabel bilangan acak populasi yang berjumlah besar atau tidak terlalu besar bukan lagi merupakan masalah.

2. Dengan Tabel Bilangan Acak.

Tabel bilangan acak berisi angka dari 0 sampai dengan 9. Angka-angka tersebut diperoleh dari pemilihan secara acak (sampling acak) dengan pengembalian dari populasi

{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 }.

Dalam menggunakan tabel bilangan acak, untuk lebih jelasnya akan diberikan contoh sebagai berikut :

Misalkan jumlah anggota populasi $N=500$, dan akan dipilih sampel terdiri $n=10$. Dengan tabel bilangan acak, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

- Setiap anggota populasi tersebut diberi nomor 001, 002, 003,.....,500.
- Karena N terdiri tiga digit, maka tiga kolom dan sebuah baris ditentukan sebagai awal pemilihan bilangan acak.

Untuk menentukan kolom dan baris tersebut dapat dilakukan secara acak, antara lain dengan cara undian.

Misalkan telah terpilih kolom 5, 6, 7 dan baris 10.

- Pilih bilangan acak sebanyak 10 dengan harga dari 1 s/d 500, dimulai baris 10 kolom 5,6 dan 7 dengan arah kebawah (untuk menentukan arah juga dapat dilakukan secara acak), maka akan diperoleh 062, 360, 493, 084 (lihat lampiran) .

Jika bilangan acak yang diperoleh lebih besar 500, misalnya 921, 879, 543 atau 0 , maka bilangan tersebut tidak dipilih dan dilanjutkan memeriksa bilangan selanjutnya.

Demikian juga jika bilangan yang diperoleh sama dengan bilangan yang telah terpilih, bilangan tersebut tidak dipilih.

Pemilihan bilangan acak dilakukan hingga diperoleh 10 bilangan yang berbeda. Bilangan yang terpilih menu-

nunjukkan nomor anggota populasi yang menjadi anggota sampel.

2.2.2.1 PENGGUNAAN SAMPLING ACAK SEDERHANA

Sampling acak sederhana dapat digunakan dalam pemilihan sampel jika :

1. Terdapat kerangka untuk pemilihan sampel.

Yang dimaksud kerangka adalah daftar semua anggota populasi yang akan dipilih sampelnya.

Dengan adanya kerangka tersebut, langkah-langkah pemilihan sampel dalam sampling acak sederhana (seperti diatas) dapat dilaksanakan.

2. Populasinya mempunyai ukuran tertentu (N tertentu atau berhingga).

Dengan N berhingga, jika daftar semua anggota populasi tidak ada, maka daftar tersebut dapat dibuat sehingga langkah-langkah pemilihan sampel seperti diatas dapat dilaksanakan.

Jika N takberhingga, kerangka yang dibuat tidak memuat semua anggota populasi. Jadi hanya anggota populasi yang diketahui saja akan terdaftar.

Jelas hal ini tidak sesuai dengan sampling acak sederhana.

3. Tidak ada suatu keterangan mengenai populasi.

Jika kesimpulan yang akan diambil berdasarkan sampel tersebut berlaku umum untuk populasi (tidak ada sesuatu yang dibedakan, misalnya mengenai umur, pendidikan), maka pemilihan sampel dengan sampling acak sederhana dapat dilaksanakan.

2.2.3 SAMPEL TAK BIAS

Sampel tak bias dapat diartikan sebagai sampel yang dapat digunakan untuk mewakili populasi.

Dari pengertian sebelumnya (2.2.1), sampel yang dapat mewakili populasi diperoleh dengan sampling acak, sehingga sampel tak bias dapat diperoleh dengan sampling acak (pemilihannya dilakukan sedemikian hingga anggota populasi yang satu dengan yang lain mempunyai peluang yang sama untuk terpilih dalam sampel).

Dari uraian diatas diperoleh, dengan sampling acak sederhana, anggota populasi yang satu dengan yang lain mempunyai peluang yang sama untuk terpilih dalam sampel, sehingga sampel yang dihasilkan sampling acak sederhana dinamakan sampel tak bias.

