# BAB III

# RUANG VEKTOR DAN MODULE

## 3.1. RUANG VEKTOR

Definisi 3.1.1.

Apabila $(V,+)$ suatu group abelian terhadap penjumlahan , F suatu field yang dimisalkan $f : V \times V \dashrightarrow V$ dengan $(v,v) \longmapsto f(v,v) = v + v$ dan $g : F \times V \dashrightarrow V$ dengan $(\alpha,v) \longmapsto g(\alpha,v) = \alpha v$ , maka V dikatakan Ruang Vektor atas field F , jika untuk setiap $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ dan $v_1$ , $v_2 \in V$ memenuhi syarat berikut :

i). $\alpha_1 (v_1 + v_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2$

ii). $(\alpha_1 + \alpha_2) v_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_1$

iii). $(\alpha_1 . \alpha_2) v_1 = \alpha_1 (\alpha_2 v_1)$

iv). $1 v_1 = v_1$

Elemen - elemen $v_1$ , $v_2$ dalam V disebut vektor , sedangkan elemen - elemen $\alpha_1 , \alpha_2$ dalam F disebut skalar dan begitu juga $\alpha v$ dikatakan kelipatan skalar dari v dengan $\alpha$.

Sebagai akibatnya $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n \in V$ dan kelipatan skalar - kelipatan skalar dari $v_i$ dengan $\alpha_i$ yaitu $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n \in V$ karena $\alpha_i v_i \in V$ dimana $1 \leqslant i \leqslant n$ .

Apabila suatu ruang vektor terdiri hanya satu elemen nol saja maka disebut dengan vektor nol dan yang dinotasikan dengan (0) .

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

Contoh :

1). V suatu kumpulan vektor - vektor dengan urutan 4 tuple dari himpunan bilangan bulat dan yang didefinisikan :

$$(a,b,c,d) + (e,f,g,h) = (a+e,b+f,c+g,d+h)$$

$$\beta\,(a,b,c,d) = (\beta a, \beta b, \beta c, \beta d)$$

dimana $(a,b,c,d)$ , $(e,f,g,h) \in V$ dan $\beta \in F$ .

Maka V suatu ruang vektor atas F, sebab misalkan ambil

$(4,3,1,5)$ , $(4,2,7,2) \in V$ dan $3,2 \in F$

. $3\,\{(4,3,1,5) + (4,2,7,2)\} = 3\,.\,(8,5,8,7)$

$= (24,15,24,21) \in V$ ..(1).

$3.(4,3,1,5) + 3.(4,2,7,2) = (12,9,3,15) + (12,6,21,6)$

$= (24,15,24,21) \in V$ ...(2).

dari (1). dan (2). tampak bahwa :

$3\,\{(4,3,1,5) + (4,2,7,2)\} = 3.(4,3,1,5) + 3.(4,2,7,2)$

. $(3+2).(4,3,1,5) = 5.(4,3,1,5)$

$= (20,15,5,25) \in V$ ...(1).

$3.(4,3,1,5) + 2.(4,3,1,5) = (12,9,3,15) + (8,6,2,10)$

$= (20,15,5,25) \in V$ ...(2).

dari (1). dan (2). tampak bahwa :

$(3+2).(4,3,1,5) = 3.(4,3,1,5) + 2.(4,3,1,5)$

. $(3.2).(4,3,1,5) = 6.(4,3,1,5)$

$= (24,18,6,30) \in V$ ...(1).

$3.\{2.(4,3,1,5)\} = 3.(8,6,2,10)$

$= (24,18,6,30) \in V$ ...(2).

dari (1). dan (2). tampak bahwa :

$(3.2).(4,3,1,5) = 3.\{2.(4,3,1,5)\}$

Karena semua syarat suatu ruang vektor dipenuhi oleh V maka V suatu ruang vektor atas F.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

2). A suatu kumpulan vektor - vektor dengan urutan 2 tuple dari himpunan bilangan - bilangan bulat modulo 8 merupakan suatu ruang vektor yaitu bila didefinisikan :

$$(\bar{a},\bar{b}) + (\bar{p},\bar{q}) = (\bar{a}+\bar{p},\bar{b}+\bar{q})$$
$$\beta(\bar{a},\bar{b}) = (\beta\bar{a},\beta\bar{b})$$

misalkan ambil $(\bar{3},\bar{5}),(\bar{2},\bar{7}) \in A$ dan $2,4 \in F$

. $2 . \{(\bar{3},\bar{5}) + (\bar{2},\bar{7})\} = 2.(\bar{5},\bar{4})$
$= (\bar{2},\bar{0}) \in A$ ..... (1).

$2.(\bar{3},\bar{5}) + 2.(\bar{2},\bar{7}) = (\bar{6},\bar{2}) + (\bar{4},\bar{6})$
$= (\bar{2},\bar{0}) \in A$ ..... (2).

dari (1). dan (2). tampak bahwa :

$2.\{(\bar{3},\bar{5}) + (\bar{2},\bar{7})\} = 2.(\bar{3},\bar{5}) + 2.(\bar{2},\bar{7})$

. $(2+4).(\bar{3},\bar{5}) = 6.(\bar{3},\bar{5})$
$= (\bar{2},\bar{6}) \in A$ ..... (1).

$2.(\bar{3},\bar{5}) + 4.(\bar{3},\bar{5}) = (\bar{6},\bar{2}) + (\bar{4},\bar{4})$
$= (\bar{2},\bar{6}) \in A$ ..... (2).

dari (1). dan (2). tampak bahwa :

$(2+4) . (\bar{3},\bar{5}) = 2.(\bar{3},\bar{5}) + 4.(\bar{3},\bar{5})$

. $(2.4) . (\bar{3},\bar{5}) = 8 . (\bar{3},\bar{5})$
$= (\bar{0},\bar{0}) \in A$ ..... (1).

$2 .\{4 . (\bar{3},\bar{5})\} = 2 . (\bar{4},\bar{4})$
$= (\bar{0},\bar{0}) \in A$ ..... (2).

dari (1). dan (2). tampak bahwa :

$(2.4) . (\bar{3},\bar{5}) = 2 .\{4 . (\bar{3},\bar{5})\}$

Karena semua syarat dari suatu ruang vektor dipenuhi oleh A maka A suatu ruang vektor atas F.

3). Apabila V = F(x) yaitu himpunan polynomial - polynomial berderajat 10 dalam variabel x atas field F dan yang didefinisikan sebagai berikut :

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{10}x^{10}$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{10}x^{10}$$
$$p(x) + q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{10}x^{10}$$
$$\gamma\, p(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_{10}x^{10}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

dimana : $p(x), q(x) \in F(x)$ ; $\gamma, a_i, b_i \in F$

$c_i = a_i + b_i$ ; $d_i = \gamma a_i$ ; $1 \leqslant i \leqslant 10$

maka $F(x)$ merupakan suatu ruang vektor atas F.

Misalkan ambil $p(x), q(x) \in F(x)$ dan $3, 5 \in F$

$$p(x) = 1 - 3x + 2x^2 + 4x^3 - 2x^5 + x^6 - 3x^8 - 2x^9 + x^{10}$$

$$q(x) = 2 + x^2 + 3x^3 - 2x^6 + 4x^7 - x^8 + 3x^9 - 2x^{10}$$

. $3.\{p(x) + q(x)\}$

$$= 3.(3 - 3x + 3x^2 + 7x^3 - 2x^5 - x^6 + 4x^7 - 4x^8 + x^9 - x^{10})$$

$$= 9 - 9x + 9x^2 + 21x^3 - 6x^5 - 3x^6 + 12x^7 - 12x^8 + 3x^9 - 3x^{10}$$

$\in F(x)$ ..... (1).

$3.p(x) + 3.q(x)$

$$= (3 - 9x + 6x^2 + 12x^3 - 6x^5 + 3x^6 - 9x^8 - 6x^9 + 3x^{10}) + (6 + 3x^2 + 9x^3 - 6x^6 + 12x^7 - 3x^8 + 9x^9 - 6x^{10})$$

$$= 9 - 9x + 9x^2 + 21x^3 - 6x^5 - 3x^6 + 12x^7 - 12x^8 + 3x^9 - 3x^{10}$$

$\in F(x)$ ..... (2).

dari (1). dan (2). tampak bahwa :

$$3.\{p(x) + q(x)\} = 3.p(x) + 3.q(x)$$

. $(3+5).p(x)$

$$= 8.(1 - 3x + 2x^2 + 4x^3 - 2x^5 + x^6 - 3x^8 - 2x^9 + x^{10})$$

$$= 8 - 24x + 16x^2 + 32x^3 - 16x^5 + 8x^6 - 24x^8 - 16x^9 + 8x^{10}$$

$\in F(x)$ ..... (1).

$3.p(x) + 5.p(x)$

$$=(3 - 9x + 6x^2 + 12x^3 - 6x^5 + 3x^6 - 9x^8 - 6x^9 + 3x^{10}) + (5 - 15x + 10x^2 + 20x^3 - 10x^5 + 5x^6 - 15x^8 - 10x^9 + 5x^{10})$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

dari (1). dan (2). tampak bahwa :

$$(3+5).p(x) = 3.p(x) + 5.p(x)$$

- $(3.5).p(x)$

$$= 15.(1 - 3x + 2x^2 + 4x^3 - 2x^5 + x^6 - 3x^8 - 2x^9 + x^{10})$$

$$= 15 - 45x + 30x^2 + 60x^3 - 30x^5 + 15x^6 - 45x^8 - 30x^9 + 15x^{10}$$

$\in F(x)$ ..... (1).

$3.\{5.p(x)\}$

$$= 3.(5 - 15x + 10x^2 + 20x^3 - 10x^5 + 5x^6 - 15x^8 - 10x^9 + 5x^{10})$$

$$= 15 - 45x + 30x^2 + 60x^3 - 30x^5 + 15x^6 - 45x^8 - 30x^9 + 15x^{10}$$

$\in F(x)$ ..... (2).

dari (1). dan (2). tampak bahwa :

$$(3.5).p(x) = 3.\{5.p(x)\}$$

Karena semua syarat suatu ruang vektor dipenuhi oleh F(x) maka F(x) merupakan suatu ruang vektor atas F.

4). Suatu himpunan vektor - vektor B yaitu :

$$B = \{ (a,b) \mid -1 \leq a \leq 1 \ ; \ -1 \leq b \leq 1 \}$$

dan yang diberikan definisi :

$$(a,b) + (c,d) = (a+c , b+d)$$

maka B bukan merupakan suatu ruang vektor , sebab B bukan suatu group yaitu sifat tertutup terhadap penjumlahan tidak dipenuhi . Untuk jelasnya ambil (-1,1) , (1,0) $\in$ B dan 2,1 $\in$ F maka :

$$2 . \{(-1,1) + (1,0)\} = 2.(0,1) = (0,2) \notin B$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

Definisi 3.1.2

Apabila V suatu ruang vektor atas field F, himpunan bagian ( subset ) U yang tidak kosong dari V disebut ruang bagian ( subspace ) dari V jika :

i. (U,+) adalah subgroup dari (V,+)

ii. $\alpha u \in U$ , untuk semua $\alpha \in F$ dan $u \in U$

Contoh :

1). Apabila $V_n$ suatu himpunan polynomial - polynomial berderajat 6 dalam F(x) yaitu suatu ruang vektor dari himpunan polynomial -polynomial berderajat 10 , maka $V_n$ merupakan suatu ruang bagian ( subspace ) dari F(x) ; misalkan ambil $p(x), q(x) \in V_n$ dan $3 \in F$ yaitu :

$$p(x) = 3 + 2x + x^3 - 4x^4 - x^5 + 0x^6$$

$$q(x) = 1 - 3x + 2x^2 - 2x^4 + x^6$$

. $p(x) + q(x) = 4 - x + 2x^2 + x^3 - 6x^4 - x^5 + x^6 \in V_n$

. $-p(x) = -(3 + 2x + x^3 - 4x^4 - x^5 + 0x^6)$

$$= -3 - 2x - x^3 + 4x^4 + x^5 - 0x^6 \in V_n$$

Oleh karena itu $V_n$ merupakan suatu subgroup terhadap penjumlahan dari F(x).

. $3\,p(x) = 3\,(3 + 2x + x^3 - 4x^4 - x^5 + 0x^6)$

$$= 9 + 6x + 3x^3 - 12x^4 - 3x^5 + 0x^6 \in V_n$$

Karena semua syarat suatu subspace dipenuhi oleh $V_n$ maka $V_n$ suatu ruang bagian ( subspace ) dari F(x).

2). Didalam suatu ruang vektor A kumpulan vektor - vektor dengan urutan 2 tuple dari himpunan bilangan - bilangan bulat modulo 8 ( lihat contoh 3.1.1 2). ) dipandang suatu himpunan $B = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{4},\bar{4}),(\bar{6},\bar{6})\}$ yaitu B merupakan suatu ruang bagian ( subspace ) dari A atas F.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

Sebab :

| + | $(\bar{0},\bar{0})$ | $(\bar{2},\bar{2})$ | $(\bar{4},\bar{4})$ | $(\bar{6},\bar{6})$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\bar{0},\bar{0})$ | $(\bar{0},\bar{0})$ | $(\bar{2},\bar{2})$ | $(\bar{4},\bar{4})$ | $(\bar{6},\bar{6})$ |
| $(\bar{2},\bar{2})$ | $(\bar{2},\bar{2})$ | $(\bar{4},\bar{4})$ | $(\bar{6},\bar{6})$ | $(\bar{0},\bar{0})$ |
| $(\bar{4},\bar{4})$ | $(\bar{4},\bar{4})$ | $(\bar{6},\bar{6})$ | $(\bar{0},\bar{0})$ | $(\bar{2},\bar{2})$ |
| $(\bar{6},\bar{6})$ | $(\bar{6},\bar{6})$ | $(\bar{0},\bar{0})$ | $(\bar{2},\bar{2})$ | $(\bar{4},\bar{4})$ |

Ambil $(\bar{a},\bar{b}) \in B$ maka inversnya adalah $(\bar{8}-\bar{a},\bar{8}-\bar{b}) \in B$ misalkan $(\bar{4},\bar{4}) \in B$ maka inversnya adalah $(\bar{4},\bar{4}) \in B$.

Sehingga B merupakan subgroup terhadap penjumlahan dari A. Selanjutnya misalkan ambil $5 \in F$ maka $5 \cdot (\bar{4},\bar{4}) = (\bar{4},\bar{4}) \in B$

Karena semua syarat suatu subspace dipenuhi oleh B maka jelaslah bahwa B suatu subspace dari A atas field F

Selanjutnya pandang $C = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{3}),(\bar{3},\bar{5}),(\bar{5},\bar{7})\}$ yaitu bukan merupakan suatu subspace dari A sebab :

| + | $(\bar{0},\bar{0})$ | $(\bar{2},\bar{3})$ | $(\bar{3},\bar{5})$ | $(\bar{5},\bar{7})$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\bar{0},\bar{0})$ | $(\bar{0},\bar{0})$ | $(\bar{2},\bar{3})$ | $(\bar{3},\bar{5})$ | $(\bar{5},\bar{7})$ |
| $(\bar{2},\bar{3})$ | $(\bar{2},\bar{3})$ | $(\bar{4},\bar{6})$ | $(\bar{5},\bar{0})$ | $(\bar{7},\bar{2})$ |
| $(\bar{3},\bar{5})$ | $(\bar{3},\bar{5})$ | $(\bar{5},\bar{0})$ | $(\bar{6},\bar{2})$ | $(\bar{0},\bar{4})$ |
| $(\bar{5},\bar{7})$ | $(\bar{5},\bar{7})$ | $(\bar{7},\bar{2})$ | $(\bar{0},\bar{4})$ | $(\bar{2},\bar{6})$ |

Karena $(\bar{4},\bar{6}),(\bar{5},\bar{0}),(\bar{7},\bar{2}),(\bar{6},\bar{2}),(\bar{0},\bar{4}),(\bar{2},\bar{6}) \notin C$ maka jelaslah bahwa syarat subgroup terhadap penjumlahan tidak dipenuhi oleh C, sehingga C bukan suatu subspace.

<u>Catatan</u> :

Ruang vektor yang hanya terdiri dari satu elemen nol saja yang disebut dengan vektor nol dan ruang vektor V itu sendiri merupakan ruang bagian ( subspace ).

<u>Definisi 3.1.3.</u>

Jika V adalah ruang vektor dan n vektor $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ didalam V disebut bergantung linear ( tak bebas linear atau linear dependent ) atas F jika terdapat elemen - elemen ( skalar ) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ didalam F yang tidak

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

semuanya sama dengan nol, sedemikian hingga :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

Sedangkan ruang vektor dengan n vektor $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ didalam V disebut tidak bergantung linear ( bebas linear atau linear independent ) atas F sehingga :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$$

Apabila V suatu ruang vektor atas field F dan vektor - vektor $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$ maka vektor v yang disajikan dengan :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_n v_n$$

dimana $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in F$ ( yaitu $\lambda_i$ skalar ) dikatakan kombinasi linear ( linear combination ) dari vektor - vektor $v_i$ atas field F.

Contoh :

1). Himpunan tiga vektor $V = \{(1,3,-4),(2,-1,3),(5,1,2)\}$ dari $R^3$ merupakan himpunan vektor yang bergantung linear karena ada skalar (1,2,-1) sehingga berlakulah :

$$1(1,3,-4) + 2(2,-1,3) - 1(5,1,2) = 0 .$$

2). Himpunan empat vektor $V = \{(2,-3),(3,1),(5,2),(2,-7)\}$ dari $R^2$ merupakan himpunan vektor yang bergantung linear karena ada skalar (2,1,-1,-1) sehingga berlakulah :

$$2(2,-3) + 1(3,1) - 1(5,2) - 1(2,-7) = 0$$

3). Himpunan tiga vektor $V = \{(2,3,1),(1,3,-4),(2,1,3)\}$ dari $R^3$ merupakan himpunan vektor yang tidak bergantung linear karena :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: ( http://eprints.undip.ac.id )

$$\lambda_1(2,3,1) + \lambda_2(1,3,-4) + \lambda_3(2,1,3) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 24 + 1 - 6 + 8 - 9 = -12 \neq 0$$

oleh karena itu didapatlah $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

4). Himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ dari $R^n$ dimana :

$$e_1 = (1,0,0,0,\ldots,0)$$
$$e_2 = (0,1,0,0,\ldots,0)$$
$$e_3 = (0,0,1,0,\ldots,0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0,0,0,0,\ldots,1)$$

merupakan linear independent karena :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$$

sehingga didapatlah $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$

5). Satu vektor $v \neq 0$ merupakan linear independent karena $\lambda v = 0$ sehingga didapatlah $\lambda = 0$ ; sedangkan bila satu vektor $v = 0$ maka $\lambda v = 0$ untuk setiap nilai $\lambda$ sehingga 0 tidak linear independent atau 0 merupakan linear dependent.

V suatu ruang vektor dan misalkan G suatu subset dari V yaitu $G = \{v_\alpha\}$ ; selanjutnya G disebut himpunan pembangun untuk V atau G spans V jika setiap $v \in V$ adalah kombinasi linear dari vektor - vektor didalam G.

Definisi 3.1.4.

Suatu subset S dari ruang vektor V atas F disebut suatu basis dari V jika S terdiri dari himpunan linear independent dan S spans V.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
http://eprints.undip.ac.id/

Contoh :

1). Contoh 3.1.3. 4). diatas merupakan basis dan dapat di - katakan sebagai standart basis dari $R^n$ .

2). Himpunan tiga vektor $V = \{(2,3,-4),(-5,2,1),(2,-3,3)\}$ merupakan basis dari $R^3$ karena :

$$\lambda_1(2,3,-4) + \lambda_2(-5,2,1) + \lambda_3(2,-3,3) = 0$$

sehingga :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -5 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 6 - 60 + 16 + 6 + 45 = 25 \neq 0$$

maka didapatlah $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

jadi ketiga vektor diatas merupakan vektor yang tidak bergantung linear dari $R^3$ yang berarti ketiga vektor tersebut merupakan basis di $R^3$ .

Hal khusus dari setiap basis dari ruang vektor atas field F yang dibangun secara berhingga disebut dimensi. Dimensi dari suatu ruang vektor V atas field F dinotasikan dengan $[V:F]$ atau $\dim_F V$ .

Definisi 3.1.5.

Apabila V suatu ruang vektor atas field F dan V mempunyai basis dengan n elemen maka V disebut berdimensi berhingga ( finite dimensional ) dan dinotasikan dengan dim V = n.

Sedangkan apabila V tidak mempunyai basis yang berhingga maka V disebut berdimensi tak berhingga ( infinite dimensional ) dan dinotasikan dengan dim V = $\infty$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

Catatan :

Jika V = 0 maka dim V = 0 , oleh sebab itu $\emptyset$ yaitu himpunan kosong adalah basis untuk 0 .

## 3.2. MODULE

Definisi 3.2.1.

Apabila R suatu ring sebarang dan misalkan $(M,+)$ suatu group abelian , maka M disebut :

i. R-module kiri M ( atau module kiri dari R )

Jika terdapatlah suatu pemetaan $f : R \times M \dashrightarrow M$ dengan $(r,m) \mapsto f(r,m) = rm$ dan pemetaan $g : M \times M \dashrightarrow M$ dengan $(m_1,m_2) \mapsto g(m_1,m_2) = m_1 + m_2$ , sedemikian hingga $\forall\, r_1,r_2 \in R$ dan $\forall\, m_1,m_2 \in M$ memenuhi syarat berikut :

(1). $(r_1+r_2).m_1 = r_1.m_1 + r_2.m_1$

(2). $r_1.(m_1+m_2) = r_1.m_1 + r_1.m_2$

(3). $(r_1r_2).m_1 = r_1.(r_2m_1)$

Apabila ring R nya mempunyai elemen satuan 1 dan $1.m_1 = m_1$ maka M disebut R-module unit kiri ( a unital left R-module ).

ii. R-module kanan M ( atau module kanan dari R )

Jika terdapatlah suatu pemetaan $f : M \times R \dashrightarrow M$ dengan $(m,r) \mapsto f(m,r) = mr$ dan pemetaan $g : M \times M \dashrightarrow M$ dengan $(m_1,m_2) \mapsto g(m_1,m_2) = m_1 + m_2$ , sedemikian hingga $\forall\, m_1,m_2 \in M$ dan $\forall\, r_1,r_2 \in R$ memenuhi syarat berikut :

(1). $m_1.(r_1+r_2) = m_1.r_1 + m_1.r_2$

(2). $(m_1+m_2).r_1 = m_1.r_1 + m_2.r_1$

(3). $m_1.(r_1r_2) = (m_1r_1).r_2$

Apabila ring R nya mempunyai elemen satuan 1 dan $m_1.1 = m_1$ maka M disebut R-module unit kanan ( a unital right R-module ).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: ( http://eprints.undip.ac.id )

iii. R-module M ( atau module dari R )

Jika ring R nya komutatif maka R-module kiri sama bilangan bulat positip dan nol yaitu :

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\; a,b,c,d \geq 0 \right\}$$

dipandang suatu himpunan K yaitu :

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \;\; a,b,c \geq 0 \right\}$$

dengan didefinisikan :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

ambil $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in K$

- $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ , sifat tertutup terpenuhi

- $$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots (1).$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots (2).$$

dari (1). dan (2). tampak bahwa sifat assosiatif dipenuhi

- $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

sehingga K mempunyai matriks satuan yaitu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \implies Y = -\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$$

sehingga setiap matriks dalam K mempunyai matriks invers , misalkan $\begin{pmatrix}a & b\\c & 0\end{pmatrix}$ inversnya $-\begin{pmatrix}a & b\\c & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7 & 4\\3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 4\\3 & 0\end{pmatrix}$$

sehingga sifat komutatif dipenuhi

oleh karena semua sifat dari suatu group abelian terhadap penjumlahan dipenuhi oleh K, maka K group abelian.

Selanjutnya ambil : $\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 1\end{pmatrix} \in R$

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \left\{\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 1\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5 & 7\\4 & 5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}23 & 31\\5 & 7\end{pmatrix} \notin K$$

karena $f : K \times R \not\longrightarrow K$ , maka K bukan suatu R-module K.

<u>Catatan :</u>

Sebagai hal khusus dari suatu R-module adalah :

Apabila R suatu ring , maka R tersebut dapat dipandang sebagai R-module dari R sendiri.

<u>Bukti :</u>

Misalkan M suatu ideal kiri/kanan dari ring R

Ambil $r, r_1, r_2 \in R$ dan $m, m_1, m_2 \in M$.

Karena R suatu ring dan mengingat definisi suatu ideal ( lihat [illegible] definisi 2.5.1. ) , maka :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

$r \in R$ , $m \in M$ $\Longrightarrow$ $rm \in M$ dan $mr \in M$

Sehingga definisi suatu module dipenuhi yaitu :

$(r_1+r_2).m_1 = r_1.m_1 + r_2.m_1$

$r_1.(m_1+m_2) = r_1.m_1 + r_1.m_2$

$(r_1r_2).m_1 = r_1.(r_2.m_1)$

maka suatu ring R merupakan R-module kiri .dan

$m_1.(r_1+r_2) = m_1.r_1 + m_1.r_2$

$(m_1+m_2).r_1 = m_1.r_1 + m_2.r_1$

$m_1.(r_1r_2) = (m_1.r_1).r_2$

maka suatu ring R merupakan R-module kanan.

Sebagai contoh :

1). Z suatu ring dari himpunan bilangan - bilangan bulat dan dipandang suatu himpunan $M = \{0,\pm 3,\pm 6,\pm 9,\ldots\} = [3]$ $= \{3.r \mid \forall r \in Z\}$ yaitu suatu ideal kiri/kanan dari ring Z, maka M merupakan Z-module M . Sedangkan himpunan $N = \{\pm 1,\pm 5,\pm 9,\pm 13,\pm 17,\ldots\}$ bukan suatu group abelian sebab sifat tertutup terhadap penjumlahan tidak dipenuhi sehingga jelaslah bahwa N bukan suatu R-module N.

2). $Z_p$ suatu ring dari himpunan bilangan - bilangan bulat modulo p dan dipandang suatu himpunan $A = \{0,4,8,\ldots\}$ $= [4] = \{4.\bar{r} \mid \forall \bar{r} \in Z_p\}$ yaitu suatu ideal kiri/kanan dari ring $Z_p$ , maka A merupakan $Z_p$-module A . Sedangkan himpunan $B = \{\bar{0},\bar{1},\bar{3},\bar{5}\}$ bukan suatu group abelian terhadap penjumlahan sebab sifat tertutup terhadap penjumlahan tidak dipenuhi oleh B sehingga jelaslah bahwa B bukan suatu $Z_p$-module B.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 3.2.2.

Suatu himpunan bagian ( subset ) yang tidak kosong N dari R-module M disebut R-submodule dari M ( atau R-modu

i. $a - b \in N$ , untuk setiap $a, b \in N$.

ii. $ra \in N$ dan $ar \in N$ , untuk setiap $a \in N$ , $r \in R$

Module nol ( yang dinotasikan dengan $\{0\}$ ) dan modu le M itu sendiri merupakan R-submodule dan disebut dengan trivial submodule ( submodule tidak sejati ) , sedangkan bila ada submodule lain selain (0) dan M itu sendiri dari R-module M disebut submodule sejati.

Contoh :

1). Didalam R(x) suatu ring dari himpunan polynomial - polynomial berderajat 7 dalam variabel x atas ring R yang mana R(x) merupakan R-module ( lihat contoh 3.2.1. 1). ) dipandang P(x) suatu ring dari himpunan polynomial - polynomial berderajat 5 atas ring R maka P(x) merupakan suatu R-submodule dari R(x) sebab :

ambil $p(x), q(x) \in P(x)$ dan $3 \in R$

$$p(x) = 1 - x + 2x^2 + 3x^3 - x^4 + 2x^5$$

$$q(x) = 2x - x^2 - x^3 + 3x^4 - 3x^5$$

. $p(x) - q(x) = 1 - 3x + 3x^2 + 4x^3 - 4x^4 + 5x^5 \in P(x)$

. $3 \cdot p(x) = 3 \cdot (1 - x + 2x^2 + 3x^3 - x^4 + 2x^5)$

$= 3 - 3x + 6x^2 + 9x^3 - 3x^4 + 6x^5 \in P(x)$

karena semua syarat suatu R-submodule dipenuhi oleh P(x) maka P(x) merupakan suatu R-submodule dari R(x).

2). Didalam suatu ring R dari himpunan matriks - matriks ber type 2x2 dan suatu himpunan matriks - matriks D yaitu :

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \geq 0 \right\}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

yang merupakan suatu R-module D ( sebab D suatu group abelian terhadap penjumlahan dan D juga memenuhi semua syarat suatu R-module dengan ring R nya adalah :

dipandang suatu himpunan E dari matriks - matriks didalam R-module D yaitu :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Sehingga :

| X - Y | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

Karena $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin E$

oleh karena itu E tidak memenuhi salah satu syarat dari suatu R-submodule , jadi E bukan merupakan suatu R-submodule dari D.

Definisi 3.2.3.

Suatu R-module M dikatakan dibangun secara berhingga ( finitely - generated ) jika terdapatlah elemen - elemen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in M$ sedemikian hingga untuk setiap $m \in M$ dan $r_i \in R$ dengan $1 \leq i \leq n$ , mempunyai bentuk :

$$m = r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_3 + r_4a_4 + \ldots + r_na_n$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: ( http://eprints.undip.ac.id )

Apabila perpotongan ( irisan / interseksi ) N dari semua submodule - submodule dalam M yang memuat subset S dari M, maka N juga merupakan submodule dari M yang memuat subset S dan disebut submodule dari M yang dibangun oleh S.

Apabila N = M maka M disebut dibangunoleh subset S dan jika S berhingga maka M adalah dibangun secara ber - hingga dan N adalah submodule yang dibangun secara berhingga pula.

Definisi 3.2.4.

Apabila M suatu R-module , maka N dikatakan memenuhi syarat rangkaian turun ( Descending Chain Condition - DCC ) pada submodule - submodule jika :

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq M_4 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$$

untuk submodule - submodule $M_i$ dari M , maka terdapatlah suatu bilangan bulat n sedemikian hingga $M_k = M_n$ untuk setiap $k \geq n$ .

Sedangkan definisi yang ekivalen dengan definisi di atas adalah :

Apabila M suatu R-module , maka N dikatakan memenuhi syarat rangkaian naik ( Ascending Chain Condition - ACC ) pada submodule - submodule jika :

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq M_4 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$$

untuk submodule - submodule $M_i$ dari M , maka terdapatlah suatu bilangan bulat n sedemikian hingga $M_k = M_n$ untuk setiap $k \geq n$ .

Definisi 3.2.5.

Apabila N submodule dari R-module M , maka himpunan $\{ m+N \mid \forall m \in M \}$ disebut kwoesen module dimana untuk setiap $r \in R$ dan $m, m_1, m_2 \in M$ memenuhi :

i. $(m+N).r = mr + N$

ii. $(m_1+N) + (m_2+N) = (m_1+m_2) + N$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: ( http://eprints.undip.ac.id )

Kwoesen module tersebut juga disebut dengan faktor module dan yang dinotasikan dengan $M/N$.

Contoh :

1). Didalam Z-module M dengan $M = \{0, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 28, \dots\}$ $= \{7r \mid \forall r \in Z\}$ dengan $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ dipandang suatu submodule $N = \{0, \pm 14, \pm 28, \pm 42, \pm 56, \dots\} = \{14r \mid \forall r \in Z\}$ sehingga untuk $m, m_1, m_2 \in M$ dan $r \in Z$

| + | 0 | ±7 | ±14 | ±21 | ±28 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | ±7 | ±14 | ±21 | ±28 | ... |
| ±7 | ±7 | ±14 | ±21 | ±28 | ±35 | ... |
| ±14 | ±14 | ±21 | ±28 | ±35 | ±42 | ... |
| ±21 | ±21 | ±28 | ±35 | ±42 | ±49 | ... |
| ±28 | ±28 | ±35 | ±42 | ±49 | ±56 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

| . | 0 | ±1 | ±2 | ±3 | ±4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| ±7 | 0 | ±7 | ±14 | ±21 | ±28 | ... |
| ±14 | 0 | ±14 | ±28 | ±42 | ±56 | ... |
| ±21 | 0 | ±21 | ±42 | ±63 | ±84 | ... |
| ±28 | 0 | ±28 | ±56 | ±84 | ±112 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

maka himpunan faktor module $M/N$ adalah :

$M/N = \{0+N, \pm 7+N, \pm 14+N, \pm 21+N, \pm 28+N, \dots\}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )