BAB III

LANDASAN TEORI

## III.1. MODEL UNTUK SATU ITEM.

Jika akan diselesaikan masalah inventory control pada sebuah lokasi tunggal dengan asumsi bahwa jumlah permintaan untuk setiap item tertentu dan merupakan suatu konstanta X unit pertahun yang independent terhadap waktu. Masalah dasar dari sistem ini seperti juga pada sistem inventory sebarang ialah untuk menentukan kapan sebuah order harus ditempatkan dan berapa jumlah harus diorder. Misalkan seluruh jumlah yang diorder dikirim dalam kemasan tunggal, berarti sebuah order datang tepat bersama - sama. Kemudian dimisalkan pula bahwa item dapat diinventorykan secara tak terbatas, berarti tak pernah penuh. Selanjutnya perlu untuk mengasumsikan pula sistem akan berjalan kontinyu untuk sepanjang waktu. Karena X konstan dan tertentu, jelaslah bahwa bila sistem dioperasikan secara optimal, maka jumlah order yang ditempatkan setiap waktu besarnya sama.

Sekarang akan ditinjau sebuah kasus dengan sistem persediaan tak pernah kurang bila sebuah permintaan timbul. Pembatasan ini diambil karena permintaan dinyatakan tertentu. Karena sistem tak pernah kekurangan persediaan bila permintaan timbul dan X konstan, maka penerimaan pertahun dari penjualan item juga konstan dan independent terhadap cara penyelesaian, sehingga peminimalan biaya akan melalui cara penyelesaian yang sama seperti memaksimalkan keuntungan. Disini akan ditentukan cara penyelesaian optimal dengan peminimalan biaya rata -

rata pertahun. Biaya - biaya yang termasuk dalam model ini adalah biaya pembelian unit, biaya tetap pelaksanaan sebuah order ( biaya pengorderan ) dan biaya pelaksanaan inventory.

Menghitung biaya rata - rata pertahun harus dihitung dahulu biaya total untuk suatu periode waktu $\mathcal{J}$ kemudian dibagi dengan $\mathcal{J}$ didapat biaya rata - rata pertahun untuk periode waktu $\mathcal{J}$ dan akhirnya dengan mendekatkan $\mathcal{J} \rightarrow \infty$ didapat biaya rata - rata pertahun. Biaya sebenarnya dari pengoperasian sistem dapat beraneka dari tahun ke tahun karena jumlah order yang sebenarnya ditempatkan dapat beraneka pula. Hanya bila setahun merupakan pergandaan integral waktu antara penempatan order maka dapatlah biaya sistem sebenarnya menjadi sama setiap tahun.

Bila sejumlah Q unit diorder setiap siklus maka setelah Q permintaan sebuah order sebesar Q unit ditempatkan lagi. Jadi waktu penempatan order - order adalah :

$$T = \frac{Q}{X}$$

T juga merupakan waktu antara kedatangan order dan pengelolaan. Satu siklus operasi berlaku dalam jangka waktu antara penempatan dua order, secara umum dikatakan antara dua titik dalam waktu yang dipisahkan oleh sebuah interval T. Dalam setiap siklus sistem mengulangi runtutan peristiwa dari siklus - siklus sebelumnya. Jadi jangka waktu dalam satu siklus adalah T.

Misalkan v merupakan integer terbesar dengan

$$v \leq \frac{\mathcal{J}}{T}$$

maka dalam waktu $\psi$ terdapat v siklus lengkap. Karena tepat satu order ditempatkan persiklus, maka jumlah order yang ditempatkan selama $\psi$ akan sama dengan v atau $v + \varepsilon$ dengan $\varepsilon < 1$, bila termasuk sebagian dari sebuah siklus yang cukup besar.

Jumlah order yang ditempatkan dapat ditulis sebagai

$$\frac{\psi}{T} + \varepsilon \qquad \text{atau} \qquad \frac{X\psi}{Q} + \varepsilon$$

Bila A merupakan biaya pengorderan persiklus, maka biaya pengorderan selama $\psi$ adalah

$$\left( \frac{\psi}{T} + \varepsilon \right) A \qquad \text{atau} \qquad \left( \frac{X\psi}{Q} + \varepsilon \right) A$$

Biaya pembelian unit dalam waktu $\psi$ adalah

$$\left( \frac{X\psi}{Q} + \varepsilon \right) Q\,C$$

dengan C merupakan biaya unit item bila diorder sebesar Q unit.

Misalkan S merupakan inventory ditangan dalam sistem ketika kedatangan sebuah order. Besar inventory ditangan sekarang adalah $S + Q$.

Sehingga biaya pelaksanaan inventory persiklus adalah

$$I\,C \int_0^T ( Q + S - X\,t )\,dt = I\,C \left[ ( Q + S )\,t - \tfrac{1}{2} X\,t^2 \right]_0^T$$

$$= I\,C \left[ ( Q + S )\,T - \tfrac{1}{2} X\,T^2 \right]$$

$$= I\,C\,T\,( Q + S - \tfrac{1}{2} X\,T )$$

$$= I\,C\,T\,( Q + S - \tfrac{1}{2} Q )$$

$$= I\,C\,T\,( Q/2 + S ) \quad \ldots\ldots \quad (3\text{-}1)$$



dengan I merupakan prosentase biaya penginventorian

Hal ini berlaku karena untuk waktu t dari permulaan siklus yang diambil dengan acuan waktu kedatangan sebuah order, inventory ditangan adalah $Q + S - X\,t$, dan biaya yang timbul antara t dan dt adalah

$I\,C\,(\,Q + S - X\,t\,)\,dt.$

Bila dalam waktu $\psi$ terdapat

$$v = \frac{\psi}{T} - \beta \quad , \quad 0 \leq \beta < 1$$

siklus penuh. Jadi biaya pelaksanaan inventory untuk periode waktu $\psi$ adalah

$$I\,C\,T\,\left(\frac{\psi}{T} - \beta\right)\left(\,Q/2 + S\,\right) + \eta$$

dengan $\eta$ merupakan biaya pelaksanaan inventory untuk bagian $\psi - v\,T$.

Maka biaya variabel total untuk periode waktu $\psi$ adalah

$$\left(\frac{X}{Q}\,\psi + \varepsilon\right) Q\,C + \left(\frac{X}{Q}\,\psi + \varepsilon\right) A$$

$$+ \,I\,C\,T\,\left(\frac{\psi}{T} - \beta\right)\left(\,Q/2 + S\,\right) + \eta \qquad \ldots\ldots \;(3\text{-}2)$$

Biaya variabel rata - rata pertahun untuk periode waktu $\psi$ adalah

$$K_{\psi} = X\,C + \frac{\varepsilon\,Q\,C}{\psi} + \frac{X}{Q}\,A + \frac{\varepsilon\,A}{\psi} + I\,C\,(\,Q/2 + S\,)$$

$$- \frac{\beta}{\psi}\,I\,C\,T\,(\,Q/2 + S\,) + \frac{\eta}{\psi}$$

Sehingga biaya variabel rata - rata pertahun adalah

$$K = X\,C + \frac{X}{Q}\,A + I\,C\,(\,Q/2 + S\,) \qquad \ldots\ldots \;(3\text{-}3)$$

Rumus untuk K juga dapat dicari dengan menggu-

nakan argumen sederhana sebagai berikut :
Karena terdapat X permintaan pertahun dan semua permintaan dipenuhi maka rata - rata X unit pertahun harus dibayar X C. Begitu pula bila jumlah order Q unit maka jumlah order yang dilaksanakan pertahun mempunyai rata - rata X/Q, dan biaya pengorderan pertahun mempunyai rata - rata X A/Q pertahun. Selanjutnya dengan asumsi biaya pelaksanaan inventory perunit sebanding dengan panjang waktu yang berlaku dalam inventory, maka besarnya biaya pelaksanaan inventory pertahun adalah I C kali inventory rata - rata. Besar inventory rata - rata adalah setengah jumlah inventory maksimal yaitu Q + S ditambah inventory minimal yaitu S, jadi besarnya inventory rata - rata adalah ( Q/2 ) + S. Penjumlahan ketiga suku ini akan menghasilkan persamaan (2-3).

Pandang situasi dimana biaya unit item independent dengan jumlah yang diorder, maka X C independent dengan Q dan aturan pengorderan kembali yang berarti tidak dimasukkan dalam biaya variabel. Sehingga dalam hal ini biaya variabel rata - rata pertahun yang merupakan jumlah pengorderan dan biaya pelaksanaan inventory adalah

$$K = \frac{X}{Q} A + I C ( Q/2 + S ) \qquad \ldots\ldots (3\text{-}4)$$

Dari persamaan (3-4) tampak bahwa hanya suku I C S yang tergantung pada aturan pengorderan kembali. Suku ini diminimalkan dengan memberikan nilai S = 0, berarti ketika order tiba persediaan ditangan kosong. Akan ditentukan nilai optimal Q. Tampak bahwa nilai optimal terdapat pada S = 0 untuk setiap Q. Jadi biaya rata - rata pertahun sebenarnya hanya tergantung pada satu variabel Q, sehingga dapat dituliskan :

$$K^{*} = \frac{X}{Q} A + I C \frac{Q}{2} \qquad \ldots\ldots (3\text{-}6)$$

Akan dicari harga $Q > 0$ yang meminimalkan persamaan (3-6). Mengingat bahwa permintaan dianggap sebagai variabel konstan maka Q dapat pula diperlakukan konstan. Dari perhitungan tampak Q optimal terletak dalam interval $0 < Q < \infty$, sehingga Q memenuhi $\frac{dK}{dQ} = 0$.

Sehingga

$$- \frac{X}{Q^2} A + \frac{I C}{2} = 0 \qquad \ldots\ldots (3\text{-}7)$$

$$I C Q^2 = 2 X A$$

$$Q^2 = \frac{2 X A}{I C}$$

Jadi didapat Q optimal

$$Q^{*} = \sqrt{\frac{2 X A}{I C}} \qquad \ldots\ldots (3\text{-}8)$$

Tampak bahwa $K^{*} = \infty$ bila $Q = 0$ atau $Q = \infty$ dan $K^{*}$ berhingga untuk harga $Q > 0$, yang berarti $K^{*}$ dapat dideferensialkan untuk semua $Q > 0$. Jadi Q optimal memenuhi persamaan (3-7), akibatnya memenuhi persamaan (3-8). Karena persamaan (3-7) hanya mempunyai solusi untuk $Q > 0$ maka persamaan (3-8) memberikan nilai Q yang menghasilkan $K^{*}$ yang minimal mutlak untuk $Q > 0$.

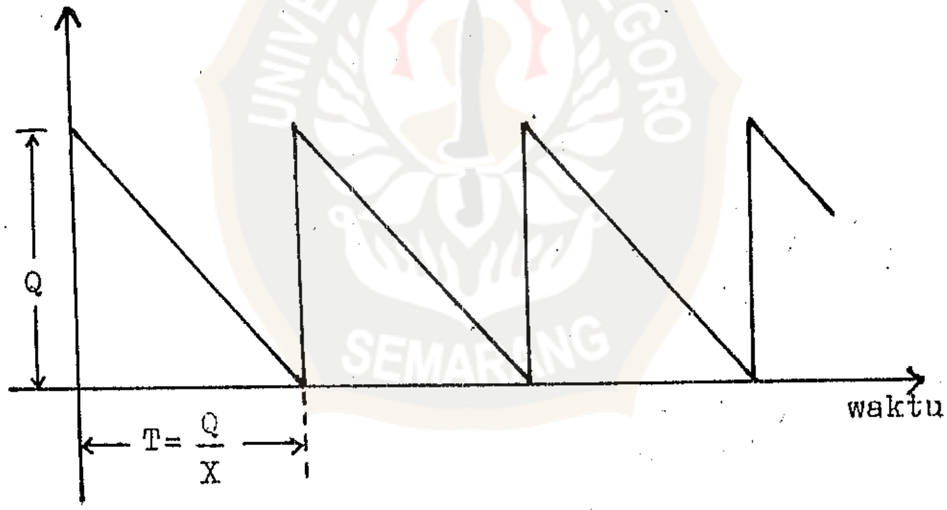
Hal diatas dapat dijelaskan secara lain yaitu sebagai berikut :

Bila Q memenuhi $\frac{dK}{dQ} = 0$ dan $\frac{d^2K}{dQ^2} > 0$, dievaluasi pada $Q^*$ maka $Q^*$ memberikan sebuah nilai K yang minimal relatif.

Bila $\frac{d^2K}{dQ^2} > 0$ untuk semua Q dalam daerah yang diinginkan maka $Q^*$ memberikan $K^*$ yang minimal mutlak dalam daerah yang diinginkan sehingga

$$\frac{d^2K}{dQ^2} = \frac{2\ X\ A}{Q^3} > 0$$

untuk semua $Q > 0$ dan akibatnya menentukan nilai minimal mutlak $K^*$ dari persamaan (3-7).




Gambar 2 :

Pola inventory secara grafis.

Contoh.

Misalkan sebuah sistem dengan ketentuan seperti yang telah diuraikan diatas, menginventory sebuah item berparameter seperti dibawah ini :

X = 600 unit / tahun.

A = Rp. 8,-

C = Rp. 0,30

I = 0,20



Sehingga dapat dihitung jumlah order optimal adalah

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\ X\ A}{I\ C}} = \sqrt{\frac{2\ (\ 600\ )\ 8}{0,20\ (\ 0,30\ )}} = 400$$

Panjang satu siklus adalah

$$T = \frac{Q}{X} = \frac{400}{600} = \frac{2}{3} \text{ tahun.}$$

Biaya unit pertahun adalah

$$X\ C = 600\ (\ 0,30\ ) = \text{Rp. } 18\ ,-$$

Biaya minimal rata - rata pertahun pengorderan dan penyimpanan inventory adalah

$$K = \frac{X}{Q}\ A + I\ C\ \frac{Q}{2}$$

$$= \frac{600}{400}\ 8 + 0,20\ (\ 0,30\ )\ \frac{400}{2}$$

$$= 12 + 12 = \text{Rp. } 24,-$$

Jadi biaya pengorderan dan penyimpanan merupakan sebagian dari biaya total dengan biaya unit termasuk didalamnya.

## III.2. MODEL UNTUK BANYAK ITEM.

Pada kenyataannya dalam dunia inventory sistem tidak hanya menyimpan satu **item saja,** tetapi banyak item. Prosedur yang sama dengan model untuk satu item didapat persamaan sebagai berikut :

Misalkan sejumlah $Q_i$ diorder untuk item i setiap siklus, $X_i$ merupakan jumlah permintaan pertahun dan $X_i$ diasumsikan tertentu, $A_i$ merupakan biaya tetap pengorderan, $C_i$ merupakan biaya perunit yang diasumsikan independent terhadap $Q_i$ dan $I_i$ merupakan biaya pelaksanaan inventory untuk item i. Maka biaya variabel rata - rata pertahun untuk semua item adalah

$$K = \sum \left[ \frac{X_i}{Q_i} A_i + I_i C_i \frac{Q_i}{2} \right] \qquad ..... (3\text{-}9)$$

dengan $i = 1, ..... ,n$

Akan dicari nilai $Q > 0$ yang meminimalkan persamaan (3-9) maka $Q$ harus memenuhi $\frac{dK}{dQ_i} = 0$.

Sehingga

$$- \frac{X_i}{Q_i^2} A_i + \frac{I_i C_i}{2} = 0 \qquad ..... (3\text{-}10)$$

$$I_i C_i Q_i^2 = 2 X_i A_i$$

$$Q_i^2 = \frac{2 X_i A_i}{I_i C_i}$$

Sihingga didapat $Q$ optimal

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2 X_i A_i}{I_i C_i}} \quad , \quad i = 1, ..... ,n \qquad ..... (3\text{-}11)$$

## III.3. MODEL DENGAN PEMBATAS.

Dalam kondisi banyak jenis item, selain hal - hal yang telah diuraikan diatas, maka ada satu segi yang sering terjadi ialah interaksi antar jenis item. Hal ini dapat berupa keterbatasan dana yang perlu diinvestasikan, keterbatasan ruang gudang dan sebagainya. Apabila interaksi antar jenis item ini terjadi, maka perlu ada kendala ( persamaan pembatas ). Namun bila tidak terjadi interaksi antar jenis itemnya, maka masih bisa dipelajari tiap item sendiri - sendiri.

Misalkan tiap satu jenis item mempunyai satuan kebutuhan tertentu, misalnya luas lantai ruang gudang, Jumlah uang yang diinvestasikan dan sebagainya sebanyak $\alpha_i$. Sehingga total kebutuhannya adalah :

$$\sum \alpha_i \; Q_i = \alpha_1 \; Q_1 + \ldots\ldots + \alpha_n \; Q_n \leqslant M \qquad \ldots\ldots (3\text{-}12)$$

Sedangkan biaya variabel rata - rata pertahun diberikan sama dengan persamaan (3-9).

Dalam hal diatas merupakan suatu permasalahan dengan sebuah **pembatas**. Dengan teknik pengganda Lagrange permasalahan ini dapat diselesaikan. Prosedurnya sebagai berikut :

Pertama - tama permasalahan diselesaikan dengan mengabaikan persamaan pembatas (3-12), yaitu dengan meminimalkan setiap $Q_i$ secara terpisah dengan menggunakan persamaan (3-11). Bila $Q_i$ yang dihasilkan dari persamaan (3-11) memenuhi persamaan (3-12), maka $Q_i$ optimal. Dalam hal ini berarti **pembatas** tidak aktif. Bila $Q_i$ yang dihasilkan dari persamaan (3-11) tidak memenuhi persamaan (3-12) maka **pembatas** aktif dan $Q_i$ tidak optimal. Untuk mendapatkan $Q_i$ optimal digunakan teknik pengganda Lagrange.

Dibentuk persamaan Lagrange



$$\mathcal{L} = \sum \left[ \frac{X_i}{Q_i} A_i + I_i \, C_i \frac{Q_i}{2} \right] + \lambda \left[ \sum \alpha_i \, Q_i - M \right] \qquad \ldots\ldots (3\text{-}13)$$

dengan $\lambda$ merupakan pengganda Lagrange.

Maka himpunan $Q_i$, $i = 1, \ldots ,n$ yang memberikan hasil persamaan (3-9) yang minimal mutlak dengan **pembatas** persamaan (3-12) merupakan himpunan penyelesaian persamaan - persamaan :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Sehingga

$$-\frac{X_i}{Q_i^2} A_i + \frac{I_i C_i}{2} + \lambda \alpha_i = 0 , \quad i = 1, \ldots ,n$$

..... (3-14)

dan

$$\sum \alpha_i Q_i - M = 0 , \quad i = 1, \ldots ,n$$

..... (3-15)

Dari persamaan (3-14) diperoleh

$$Q_i = \sqrt{\frac{2 X_i A_i}{I_i C_i + 2 \lambda^* \alpha_i}} , \quad i = 1, \ldots ,n$$

..... (3-16)

dengan $\lambda^*$ merupakan nilai $\lambda$ sedemikian hingga $Q_i$ dari persamaan (3-16) memenuhi persamaan (3-15).

Contoh.

Sebuah perusahaan membeli tiga jenis komponen. Management menginginkan investasi dalam inventory tidak boleh melebihi Rp.14 000. Permintaan untuk tiap - tiap item adalah konstan dan diasumsikan tertentu. Dalam hal ini backorder tidak diperbolehkan. Biaya penyimpanan masing

masing item adalah $I = 0,20$.

Tentukan berapa jumlah optimal masing - masing item yang dibeli, bila diberikan data - data sebagai berikut :

| | Item 1 | Item 2 | Item 3 |
|---|---|---|---|
| Permintaan per tahun ( $X_i$ ) | 1 000 | 500 | 2 000 |
| Biaya per unit ( $C_i$ ) | Rp. 20 | Rp. 100 | Rp. 50 |
| Biaya pengorderan ( $A_i$) | Rp. 50 | Rp. 75 | Rp. 100 |

Penyelesaian

Permasalahan yang dihadapi dalam soal diatas adalah

Minimalkan

$$K = \sum \left[ \frac{X_i}{Q_i} A_i + I_i C_i \frac{Q_i}{2} \right]$$

Dengan **pembatas**

$$\sum C_i Q_i \leq 14\ 000$$

Pertama - tama dicari $Q_i$ yang meminimalkan K dengan mengabaikan **pembatas.** Sehingga $Q_i$ memenuhi

$$\frac{\partial K}{\partial Q_i} = - \frac{X_i}{Q_i^2} A_i + \frac{I_i C_i}{2} = 0$$

$$Q_i^2 = \frac{2 X_i A_i}{I_i C_i}$$

didapat

$$Q_i = \sqrt{\frac{2 X_i A_i}{I_i C_i}}$$

Jadi

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2\ (\ 1\ 000\ )\ (\ 50\ )}{(\ 0{,}20\ )\ (\ 20\ )}} = 158{,}11 \approx 158$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2\ (\ 500\ )\ (\ 75\ )}{(\ 0{,}20\ )\ (\ 100\ )}} = 61{,}24 \approx 61$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{2\ (\ 2\ 000\ )\ (\ 100\ )}{(\ 0{,}20\ )\ (\ 50\ )}} = 200$$

Bila harga $Q_i$ diatas digunakan maka jumlah investasi yang dibutuhkan adalah

$$D = 20\ (\ 158\ ) + 100\ (\ 61\ ) + 200\ (\ 50\ ) = \text{Rp. } 19\ 260$$

Karena $D >$ Rp. 14 000 maka perlu dicari $Q_i$ yang mengoptimalkan K dengan menggunakan **pembatas**. Sehingga persamaannya menjadi :

Minimalkan

$$K = \sum \left[ \frac{X_i}{Q_i} A_i + I_i C_i \frac{Q_i}{2} \right]$$

Dengan **pembatas**

$$\sum C_i Q_i = 14\ 000$$

Dibentuk persamaan Lagrange

$$\mathcal{L} = \sum \frac{X_i}{Q_i} A_i + I_i C_i \frac{Q_i}{2} + \lambda \left[ \sum C_i Q_i - 14\ 000 \right]$$



Syarat $Q_i$ meminimalkan $\mathcal{L}$ adalah

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Maka

$$- \frac{X_i}{Q_i^2} A_i + \frac{I_i C_i}{2} + \lambda C_i = 0$$

$$Q_i^2 = \frac{2 X_i A_i}{C_i ( I_i + 2 \lambda )}$$

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2 X_i A_i}{C_i ( I_i + 2 \lambda^* )}}$$

dan

$$\sum C_i Q_i = 14000$$

$$\sum C_i \sqrt{\frac{2 X_i A_i}{C_i ( I_i + 2 \lambda^* )}} = 14000$$

$$\sum \sqrt{\frac{2 X_i A_i C_i}{I_i + 2 \lambda^*}} = 14000$$

$$\sqrt{\frac{2 (1000) (50) (20)}{(0,20) + 2 \lambda^*}} + \sqrt{\frac{2 (500) (75) (100)}{(0,20) + 2 \lambda^*}}$$

$$+ \sqrt{\frac{2 (2000) (100) (50)}{(0,20) + 2 \lambda^*}} = 14000$$

$$\sqrt{\frac{10^6}{(0,10) + \lambda^*}} + \sqrt{\frac{(3,75) (10^6)}{(0,010) + \lambda^*}}$$

$$+ \sqrt{\frac{10 (10^6)}{(0,10) + \lambda^*}} = 14000$$



$$\sqrt{0,10 + \lambda^*} = \frac{1}{14} \left[ 1 + 1,936 + 3,162 \right]$$

$$= \frac{6,098}{14} = 0,436$$

Jadi $\lambda^* = 0,09$

Sehingga didapat :

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2\ (1000)\ (50)}{20\ (0,20 + 2\ (0,09)\ )}} = 114,71 \approx 115$$

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2\ (500)\ (75)}{100\ (\ 0,20 + 2\ (0,09)\ )}} = 44,43 \approx 44$$

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2\ (2000)\ (100)}{50\ (\ 0,20 + 2\ (0,09)\ )}} = 145,09 \approx 145$$

Jumlah investasi yang diperlukan adalah

$$D^* = 115\ (20) + 44\ (100) + 145\ (50) = \text{Rp.}13\ 950$$

Biaya variabel rata - rata pertahun adalah

$$K = \frac{1000}{158}\ 50 + 0,20\ (20)\ \frac{158}{2} + \frac{500}{61}\ 75$$

$$+ 0,20\ (100)\ \frac{61}{2} + \frac{2000}{200}\ 100 + 0,20\ (50)\ \frac{200}{2}$$

$$= \text{Rp.}3857,21 \text{ pertahun.}$$

$$K^* = \frac{1000}{115}\ 50 + 0,20\ (20)\ \frac{115}{2} + \frac{500}{44}\ 75$$

$$= 0,20\ (100)\ \frac{44}{2} + \frac{2000}{145}\ 100 + 0,20\ (50)\ \frac{145}{2}$$



$$= \text{Rp.}4061,37 \text{ pertahun.}$$