BAB II

DASAR - DASAR YANG MENUNJANG

II.1. HARGA EKSTRIM SUATU FUNGSI.

Misalkan $f: [a,b] \longrightarrow R$ suatu fungsi maka

1. $f(\overline{x})$ disebut minimal relatif fungsi f pada titik $\overline{x}$ bila ada suatu $h > 0$ sehingga $f(x) \geq f(\overline{x})$ untuk setiap $x \in (\overline{x}-h, \overline{x}+h)$.

2. $f(\overline{x})$ disebut minimal mutlak fungsi f pada titik $\overline{x}$ bila $f(x) \geq f(\overline{x})$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

3. $f(\overline{x})$ disebut maksimal relatif fungsi f pada titik x bila ada suatu $h > 0$ sehingga $f(x) \leq f(\overline{x})$ untuk setiap $x \in (\overline{x}-h, \overline{x}+h)$.

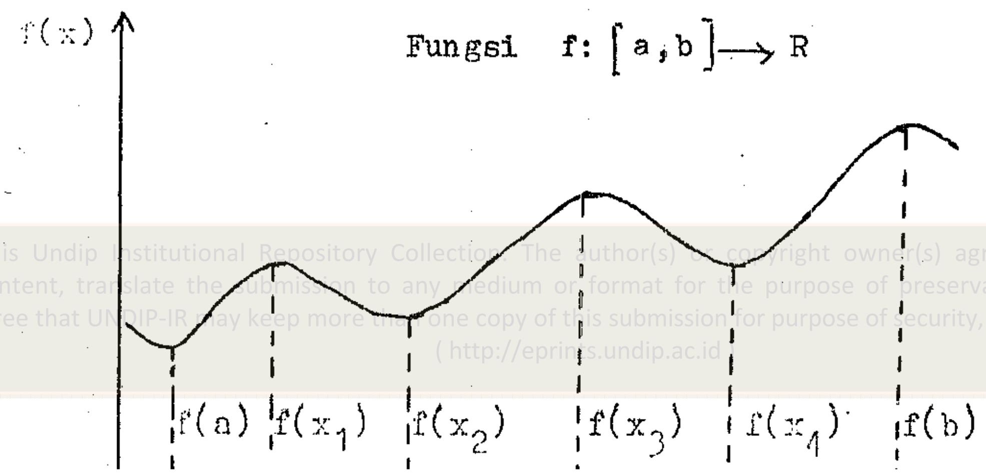
4. $f(\overline{x})$ disebut maksimal mutlak fungsi f pada titik $\overline{x}$ bila $f(x) \leq f(\overline{x})$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

Contoh.

Misalkan $f: [a,b] \longrightarrow R$ suatu fungsi tunggal yang mempunyai harga maksimal dan minimal dari nilai fungsinya.

Gambar : 1

Fungsi $f: [a,b] \longrightarrow R$



This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Titik - titik a, x_1, x_2, x_3, x_4 dan b merupakan titik ekstrim dari nilai fungsi $f(x)$ yang meliputi :

1. a, x_2, x_4 sebagai titik minimal.
2. x_1, x_3, b sebagai titik maksimal.

Harga fungsi $f(a)$ disebut minimal mutlak karena $f(a) = \min. \left\{ f(a), f(x_2), f(x_4) \right\}$, sedangkan $f(x_2)$ dan $f(x_4)$ disebut minimal relatif. Jadi minimal mutlak sekaligus merupakan minimal relatif.

Demikian pula untuk harga $f(b)$ disebut maksimal mutlak karena $f(b) = \text{maks.} \left\{ f(x_1), f(x_3), f(b) \right\}$, sedangkan $f(x_1)$ dan $f(x_3)$ merupakan maksimal relatif. Jadi maksimal mutlak sekaligus juga merupakan maksimal relatif.

II.2. SYARAT PERLU DAN CUKUP HARGA EKSTRIM SUATU FUNGSI DENGAN SATU VARIABEL.

Jika fungsi $f(x)$ dapat dideferensialkan dalam interval $a \leq x \leq b$, maka syarat perlu untuk mendapatkan harga ekstrim pada titik $x = c$ adalah $f'(c) = 0$.

Jika fungsi $f(x)$ dapat dideferensialkan dua kali dalam interval $a \leq x \leq b$, maka syarat cukup untuk mendapatkan harga ekstrim pada titik $x = c$ adalah $f'(c)=0$ dan $f''(c) \neq 0$ disekitar titik c. Apabila $f''(c) > 0$ didapat harga minimal, sedang apabila $f''(c) < 0$ didapat harga maksimal.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Misalkan fungsi $f(x)$ dalam interval $a \leq x \leq b$ dapat dideferensialkan cukup banyak dan pada titik $x=c$ berlaku hubungan :

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) = 0, \quad \ldots\ldots \quad , \quad f^{(n-1)}(c) = 0$$

$$\text{akan tetapi} \quad f^{(n)}(c) \neq 0 \qquad \ldots\ldots (2-1)$$

Selanjutnya dimisalkan $f^{(n)}(x)$ kontinyu disekitar titik $x = c$, maka $f(x)$ dapat diuraikan menjadi suatu deret Taylor disekitar titik $x = c$ sebagai berikut :

$$f(c+h) = f(c) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c+\theta h), \; 0 < \theta < 1 \quad \ldots\ldots (2-2)$$

Sehingga

$$f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c+\theta h) \qquad \ldots\ldots (2-3)$$

Sehubungan dengan kekontinyuitasan $f^{(n)}(x)$, dapat ditentukan suatu interval disekitar titik $x = c$ sehingga dalam interval tersebut tanda $f^{(n)}(c+\theta h)$ sama dengan tanda $f^{(n)}(c)$. Bila n ganjil maka $f(c+h) - f(c)$ berubah, bila tanda h berubah sehubungan dengan persamaan (2-3) maka $f(c)$ tidak mempunyai harga ekstrim.

Bila n genap maka tanda $f(c+h) - f(c)$ sama dengan tanda $f^{(n)}(c)$ disebelah kiri maupun disebelah kanan titik $x = c$, maka $f(c)$ mempunyai harga ekstrim ialah suatu maksimal bila $f^{(n)}(c) < 0$ dan suatu minimal bila $f^{(n)}(c) > 0$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

Sehingga dapat dikatakan :

Jika $f(x)$ dalam interval $a \leq x \leq b$ dapat dideferensialkan n kali pada titik $x = c$, $f(x)$ memenuhi $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$, ..., $f^{(n-1)}(c) = 0$, $f^{(n)}(c) \neq 0$ disekitar $x = c$, maka $f(c)$ adalah harga ekstrim bila dan hanya bila n genap

- Bila $f^{(n)}(c) < 0$ maka $f(c)$ harga maksimal.
- Bila $f^{(n)}(c) > 0$ maka $f(c)$ harga minimal.

II.3. HARGA EKSTRIM PADA FUNGSI IMPLISIT.

Jika y suatu fungsi dari x, diketahui fungsi implisit

$$f(x,y) = 0 \qquad \text{.....} \ (2\text{-}4)$$

Misalkan $f(x,y)$ dapat dideferensialkan parsiel menurut x dan y maka

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{.....} \ (2\text{-}5)$$

Syarat perlu untuk suatu harga ekstrim adalah $\frac{dy}{dx} = 0$.

Jika pada titik dengan $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ tidak akan ditinjau, maka syarat perlu untuk mendapatkan harga ekstrim adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{.....} \ (2\text{-}6)$$

Sehingga koordinat titik ekstrim memenuhi persamaan (2-4) dan (2-6). Untuk memeriksa apakah harga ekstrim tersebut maksimal atau minimal, persamaan (2-5) dide-rensialkan parsiel menurut x dan y didapat :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \text{..... (2-7)}$$

Apabila f(x,y) mempunyai deferensial parsiel orde dua menurut x dan y yang kontinyu maka

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Sehingga persamaan (2-7) menjadi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \text{..... (2-8)}$$

Karena untuk titik ekstrim $\frac{dy}{dx} = 0$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ maka persamaan (2-8) menjadi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Sehingga

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{\partial^2 f / \partial x^2}{\partial f / \partial y} \qquad \text{..... (2-9)}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

Jika persamaan (2-9) > 0 maka didapat harga minimal dan bila persamaan (2-9) < 0 maka didapat harga maksimal.

II.4. HARGA EKSTRIM DENGAN SUATU SYARAT TAMBAHAN.

Apabila harus menghitung harga ekstrim suatu fungsi $z = f(x,y)$ dari suatu variabel - variabel x dan y sedang antara x dan y masih terdapat hubungan

$$\varphi(x,y) = 0 \qquad \ldots\ldots(2\text{-}10)$$

Hubungan tersebut dinamakan syarat tambahan, maka jelaslah bahwa z menjadi suatu fungsi dari satu variabel (umpama dari x) karena hubungan persamaan (2-10). Bila dari persamaan (2-10) dapat dinyatakan y dengan x atau x dengan y, maka z dapat dikatakan langsung dalam x atau y. Sehingga harga ekstrimnya dapat dicari dengan jalan seperti yang telah diuraikan. Akan tetapi kerap kali tidak mungkin untuk menyatakan z sebagai suatu fungsi dari satu variabel, atau jika mungkin akan didapat suatu fungsi z yang bentuknya sangat sukar. Sehingga untuk mendapatkan harga ekstrim adalah sebagai berikut :

Dari $z = f(x,y)$ didapat

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

Jadi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} \qquad \ldots\ldots(2\text{-}11)$$

Syarat untuk mendapatkan harga ekstrim adalah $\frac{dz}{dx} = 0$, sehingga

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{..... (2-12)}$$

Dengan cara yang sama dari persamaan (2-10) didapat

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{..... (2-13)}$$

Dari persamaan (2-12) dan (2-13) dapat dihitung x dan y yang mungkin memberikan harga ekstrim, yang paling mudah ialah menghilangkan $\frac{dy}{dx} = 0$.

Persamaan (2-12) dan (2-13) hanya akan mempunyai suatu pendapat bila

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{..... (2-14)}$$

Maka kordinat - koordinat titik ekstrim didapat dari persamaan (2-14) dan (2-10).

Untuk memeriksa lebih lanjut titik - titik tersebut, harus menentukan tanda $\frac{d^2z}{dx^2}$ pada titik - titik tersebut.

Jelaslah bahwa

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

atau

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$\frac{dy}{dx}$ dapat dicari dari persamaan (2-12) dan (2-13) sedangkan $\frac{d^2y}{dx^2}$ dapat dicari dengan mendeferensialkan persamaan (2-13).

II.5. PENGGANDA - PENGGANDA LAGRANGE.

Sering digunakan pengganda - pengganda Lagrange untuk mendapatkan harga - harga ekstrim. Misalkan fungsi $z = f(x_1, \ldots ,x_n)$ yang merupakan fungsi kontinyu dan dapat dideferensialkan, dibatasi oleh **pembatas** $g(x_1, \ldots ,x_n) = \alpha$ dengan $g(x_1, \ldots ,x_n)$ juga merupakan fungsi kontinyu dan dapat dideferensialkan. Akan dicari harga minimalnya.

Dalam hal diatas merupakan suatu masalah dengan sebuah **pembatas** dan n variabel pilihan. Penyelesaiannya dengan metode Lagrange, yaitu mengubah keterikatan fungsi $f(x_1, \ldots ,x_n)$ dengan $g(x_1, \ldots ,x_n)$ dengan cara memasukkan pengganda Lagrange sedemikian sehingga diperoleh suatu fungsi bebas yang tidak terikat oleh suatu **pembatas** dan deferensial parsiel dari fungsi tersebut terhadap semua variabel - variabel pilihan dan pengganda Lagrange bernilai nol.

Untuk lebih jelasnya dapat diuraikan sebagai berikut :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dipilih variabel x_n sedemikian hingga

$$x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Sehingga bentuk umumnya berubah menjadi :

Dengan **pembatas**

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) = \alpha \qquad \ldots\ldots (2\text{-}15)$$

Minimalkan

$$z = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) \qquad \ldots\ldots (2\text{-}16)$$

Syarat perlu untuk mendapatkan harga ekstrim adalah $\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$ maka

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \text{ , } i = 1, \ldots (n-1) \qquad \ldots\ldots (2\text{-}17)$$

Sedang dari persamaan (2-15) didapat

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \text{ , } i = 1, \ldots\ldots, (n-1)$$

maka

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{\partial g / \partial x_i}{\partial g / \partial x_n} \text{ , } \frac{\partial g}{\partial x_n} \neq 0 \qquad \ldots\ldots (2\text{-}18)$$

Persamaan (2-18) disubstitusikan kedalam persamaan (2-17) didapat

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial g / \partial x_i}{\partial g / \partial x_n} = 0 \text{ ,}$$

$$i = 1, \ldots\ldots, (n-1)$$

atau

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f / \partial x_n}{\partial g / \partial x_n} \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 ,$$

$$i = 1, \ldots ,(n-1)$$

Jika $\lambda = - \dfrac{\partial f / \partial x_n}{\partial g / \partial x_n}$

maka

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

Sehingga dari fungsi diatas didapat suatu fungsi Lagrange sebagai berikut :

$$\mathcal{L} = f(x_1, \ldots ,x_n) + \lambda \left[g(x_1, \ldots ,x_n) - \alpha \right]$$

Dengan syarat perlu supaya x_i meminimalkan $\mathcal{L}$ adalah

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 , \; i = 1, \ldots ,n$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(x_1, \ldots ,x_n) - \alpha = 0$$

Permasalahan Untuk m Pembatas.

Teknik pengganda Lagrange juga digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dengan m pembatas. Misalkan minimalkan $z = f(x_1, \ldots ,x_n)$ dengan pembatas $g_j(x_1, \ldots ,x_n) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots ,m$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Prosedur yang sama dengan permasalahan untuk satu pembatas didapat persamaan Lagrange sebagai **berikut :**

$$\mathcal{L} = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum \lambda_j \left[g_j(x_1, \ldots, x_n) - \alpha_j \right]$$

Syarat perlu supaya x_i meminimalkan $\mathcal{L}$ dengan batasan m **pembatas** adalah

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_j \left[\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right] = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_j} = g_j(x_1, \ldots, x_n) - \alpha_j = 0$$

dengan $i = 1, \ldots, n$

$j = 1, \ldots, m$

II.6. PEMBATAS PERTIDAKSAMAAN.

Teknik pengganda Lagrange juga berlaku pada **pembatas** pertidaksamaan. Misalkan akan ditentukan variabel - variabel $x_1, \ldots, x_n$ yang meminimalkan

$z = f(x_1, \ldots, x_n)$ dengan pembatas

$g(x_1, \ldots, x_n) \leq \alpha$

Dari **pembatas** dapat disimpulkan :

1. $g(x_1, \ldots, x_n) = \alpha$
2. $g(x_1, \ldots, x_n) < \alpha$

Bila (1) berlaku maka **pembatas** dikatakan aktif, suatu **pembatas** dikatakan aktif apabila berlaku sebagai persamaan yang tepat pada titik minimal.

Suatu **pembatas** dikatakan tidak aktif apabila berlaku sebagai pertidaksamaan yang tepat pada titik minimal. Jadi sebuah **pembatas** akan aktif atau tidak aktif. Apabila **pembatas** tidak aktif maka harga minimal yang dihasilkan akan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:

sama dengan harga minimal yang dihitung dengan menggunakan **pembatas** ataupun tidak. Sedang apabila **pembatas** aktif maka harga minimal yang dihasilkan akan sama dengan harga minimal yang dihitung dengan menggunakan **pembatas** yang berlaku sebagai sebuah persamaan yang tepat.

Cara untuk mendapatkan x_i, $i = 1, \ldots, n$ nonegatif yang meminimalkan

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) \qquad \ldots\ldots (2\text{-}19)$$

dengan **pembatas** pertidaksamaan

$$g(x_1, \ldots, x_n) \leq \alpha \qquad \ldots\ldots (2\text{-}20)$$

adalah sebagai berikut :

Pertama - tama dicari harga x_i nonegatif yang meminimalkan persamaan (2-19) dengan mengabaikan **pembatas** yang berarti menyelesaikan masalah tak ber**pembatas**. Sehingga x_i harus memenuhi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad \ldots\ldots (2\text{-}21)$$

Apabila x_i yang dihasilkan dari persamaan (2-21) memenuhi persamaan (2-20) maka x_i optimal. Dalam hal ini berarti **pembatas** tidak aktif.

Apabila x_i yang didapat dari persamaan (2-21) tidak memenuhi persamaan (2-20) berarti **pembatas** aktif dan x_i tidak optimal. Sehingga untuk mendapatkan x_i optimal diselesaikan dengan menggunakan **pembatas** $g(x_1, \ldots, x_n) = \alpha$, penyelesaiannya dengan teknik pengganda Lagrange sebagai berikut :

Dibentuk persamaan Lagrange

$$\mathcal{L} = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda \left[g(x_1, \ldots, x_n) - \alpha \right]$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dengan λ merupakan pengganda Lagrange.

Syarat x_i meminimalkan $\mathcal{L}$ adalah

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \text{ , } i = 1, \ldots\ldots ,n$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(x_1, \ldots\ldots ,x_n) - \alpha = 0$$

Bila **pembatas** merupakan pertidaksamaan maka lebih banyak usaha yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah dibanding dengan bila **pembatas** merupakan persamaan, karena pada **pembatas** berupa pertidaksamaan perlu menyelesaikan masalah dengan tanpa pembatas.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)