BAB II

PENGERTIAN PENGERTIAN

II.1. METODA NEWTON BACKWARD

Diketahui n+1 buah titik yang berlainan $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ yang merupakan himpunan bilangan riil pada interval I=[a,b] dengan titik-titik diatas termuat didalamnya.

$$P_n(x) = a_0+a_1+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n \;,\; a_n \neq 0$$

adalah suatu polynomial berderajat n yang mana harga pendekatan f(x) terletak pada titik $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ sedemikian hingga berlaku :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \;,\; i=0,1,2,3,\ldots\ldots,n$$

Misalkan diambil $P_{k-1}(x)$ polynomial berderajat k-1 yang mana harga pendekatan f(x) terletak pada titik $x_0, x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_{k-1}$.

Untuk mendapatkan $P_{k-1}(x)$ harus menghitung $P_k(x)$, dengan mengambil suatu fungsi h(x) yang mana

$$h(x) = P_k(x)-P_{k-1}(x)$$

dengan syarat : 1. h(x) polynomial berderajat k

2. $h(x_0)=h(x_1)=\ldots\ldots=h(x_{k-1})=0$.

Untuk $0 \leq i \leq k-1$ maka :

$$h(x) = P_k(x_k)-P_{k-1}(x_i) = f(x_i)-f(x_i) = 0.$$

Singkatnya h(x) suatu polynomial berderajat k mempunyai k titik nol pada $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_{k-1}$.

Dengan melihat bentuk polynomial diatas kita dapat menulis

$$h(x) = A_k(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots\ldots(x-x_{k-1});$$

dengan A_k konstan.

Untuk langkah selanjutnya, A_k merupakan differensi ke k dari f(x) pada titik-titik $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$, dan dapat ditulis sebagai

$f[x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n]$

Dari bentuk diatas kita dapat menulis

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + f[x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{k-1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ 2.1.1$$

Untuk P_{k-1} suatu polynomial berderajat k-1, dan $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1}) = x^k$ + polynomial berderajat $\leq k-1$

$$\ldots\ldots\ldots\ 2.1.2$$

Diketahui $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$

dengan $l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \dfrac{x-x_i}{x_k-x_i}$ maka untuk polynomial berderajat k dapat ditulis :

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{k} f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (x_i-x_j)} x^{k+1}$$

+ polynomial berderajat $\leq k$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2.1.3$$

Dari bentuk persamaan 2.1.2 dan 2.1.3 dapat diperoleh

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_k]$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots\ldots\ldots(x_i-x_{i-1})} \cdot$$

$$\frac{1}{(x_i-x_{i+1})\ldots\ldots(x_i-x_k)} \qquad 2.1.4$$

Untuk $k=0$ pada x_0

$$f[x_0] = f(x_0)$$

Untuk $k=1$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)} = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)}$$

Untuk $k=2$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+ \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} - \frac{f(x_1)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)}$$

$$+ \frac{f(x_2)}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)}$$

$$= \frac{f(x_0)(x_1-x_2)-f(x_1)(x_0-x_2)+f(x_2)(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)}$$

$$= \frac{f(x_0)(x_1-x_2)-f(x_1)x_0+f(x_1)x_2+f(x_1)x_1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)}$$

$$+ \frac{-f(x_1)x_1+f(x_2)(x_0-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)}$$

$$= \frac{f(x_0)(x_1-x_2)-f(x_1)(x_1-x_2)-f(x_1)(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)}$$

$$+ \frac{f(x_2)(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)}$$

$$= \frac{\{f(x_0)-f(x_1)\}(x_1-x_2)-\{f(x_1)-f(x_2)\}(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)}$$

$$= \frac{f(x_0)-f(x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)-f(x_2)}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}{x_0-x_2}$$

$$= \frac{f[x_0,x_1] - f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}$$

Untuk k>2 persamaan 2.1.4 sulit untuk dihitung.

Dengan persamaan 2.1.2 atau 2.1.4 dimasukkan dalam persamaan 2.1.1 pada derajat n, didapat

$$P_n(x) = f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f[x_0,x_1,\ldots,x_k](x-x_0)(x-x_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x-x_{k-1})$$

ini disebut bentuk Newton untuk harga pendekatan dari polynomial dan dapat ditulis dengan singkat

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j)$$

LEMMA 2.1

Untuk setiap $i \geq 0$

$$f[x_k,\ldots\ldots,x_{k+i}] = \frac{1}{i!h^i} \Delta^i f_k$$

Bukti dengan induksi lengkap

Untuk i=0

$$f[x_k] = f(x_k) = f_k = \Delta^0 f_k$$

Andaikan Lemma ini benar untuk i=n>0, dibutuhkan rumus benar untuk i=n+1

Untuk $i=n+1$

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots\ldots, x_{k+n+1}]$$

$$= \frac{f[x_{k+1}, \ldots, x_{k+n+1}] - f[x_k, \ldots, x_{k+n}]}{x_{k+n+1} - x_k}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta^n f_{k+1}}{n!\ h^n} - \dfrac{\Delta^n f_k}{n!\ h^n}}{x_{k+n+1} - x_k}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta^n f_{k+1} - \Delta^n f_k}{n!\ h^n}}{(n+1)h}$$

$$= \frac{\Delta^n f_{k+1} - \Delta^n f_k}{(n+1)!\ h^{n+1}}$$

$$= \frac{\Delta^{n+1} f_k}{(n+1)!\ h^{n+1}}$$

Untuk $P_n(x)$ polynomial berderajat n yang mana harga pendekatan $f(x)$ terletak pada titik $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-n}$, bentuk Newton yang terjadi berdasarkan Lemma 2.1 adalah

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_{k-i}, \ldots\ldots, x_k] \prod_{j=-i+1}^{0} (x - x_{k+j})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!\ h^i} \Delta^i f_k \prod_{j=-i+1}^{0} (x - x_{k+j}) \quad \ldots\ 2.1.5$$

Untuk $x = x_0 + sh$

$$s = s(x) = \frac{x - x_0}{h}$$

selanjutnya

$$\prod_{j=-i+1}^{0} (x - x_{k+j}) = \prod_{j=-i+1}^{0} x_0 + sh - \{x_0 + (k+j)h\}$$

$$= \prod_{j=-i+1}^{0} (s-k-j)h$$

$$= (-h)^i \prod_{j=0}^{i-1} (k-s-j) \qquad \ldots\ 2.1.6$$

Untuk y=k-s riil dan i bulat positif

$$\binom{y}{i} = \begin{cases} 1 & , \ i=0 \\ \displaystyle\prod_{j=0}^{i-1} \frac{y-j}{j+1} = \frac{y(y-1)\ldots\ldots(y-i+1)}{1.2.\ldots\ldots\ldots i} & , \ i>0 \end{cases} \qquad \ldots\ 2.1.7$$

Jadi dengan 2.1.6 dan 2.1.7 dimasukkan ke 2.1.5

$$P_n(x) = P_n(x_0+sh)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \ \Delta^i f_{k-i} \binom{k-s}{i}$$

$$= f_k - \binom{k-s}{1} \Delta f_{k-1} + \binom{k-s}{2} \Delta^2 f_{k-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots.+ (-1)^n \binom{k-s}{n} \Delta^n f_{k-n} \qquad \ldots\ldots 2.1.8$$

bentuk ini dinamakan bentuk differensi Newton Backward untuk polynomial $P_n(x)$ berderajat n yang mana harga pen dekatan f(x) terletak pada titik $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots\ldots\ldots \ldots, x_{k-n}$.

Untuk k=0 maka 2.1.8 menjadi

$$P_n(x+sh) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \ \Delta^i f_{-i} \binom{-s}{i}$$

catatan : differensi $\Delta^i f_{-i}$ berbentuk

x_0 --> f_0, Δf_{-1}, $\Delta^2 f_{-2}$, $\Delta^3 f_{-3}$, $\Delta^4 f_{-4}$

contoh soal

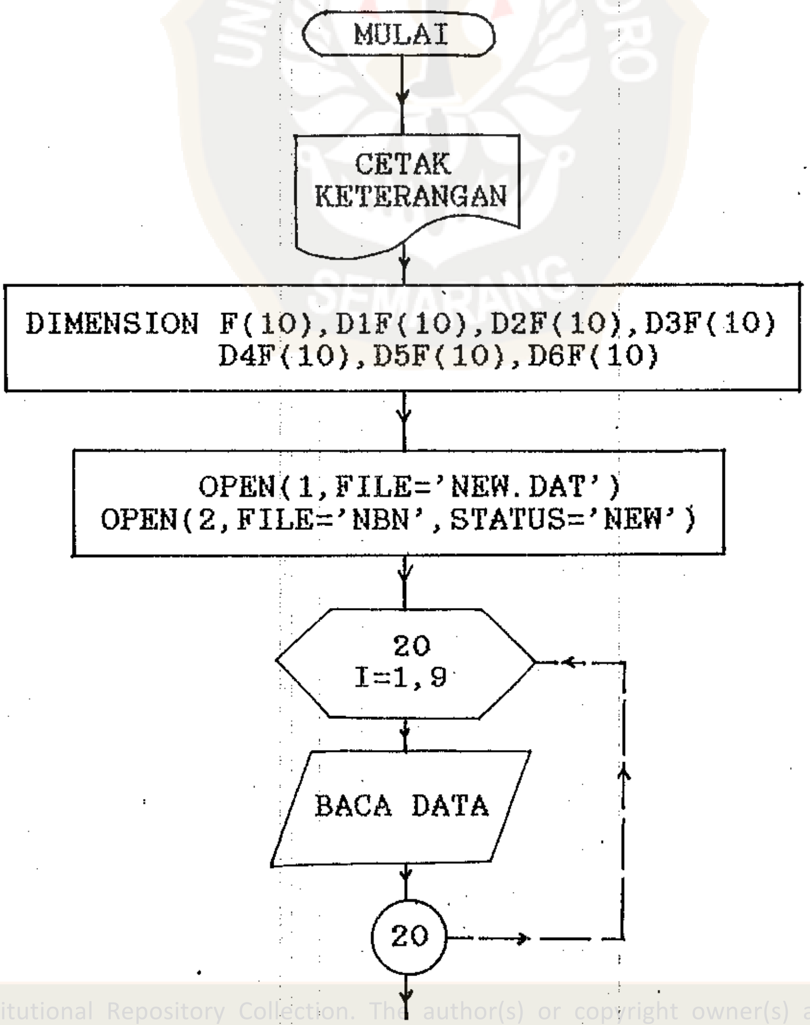
Dari tabel

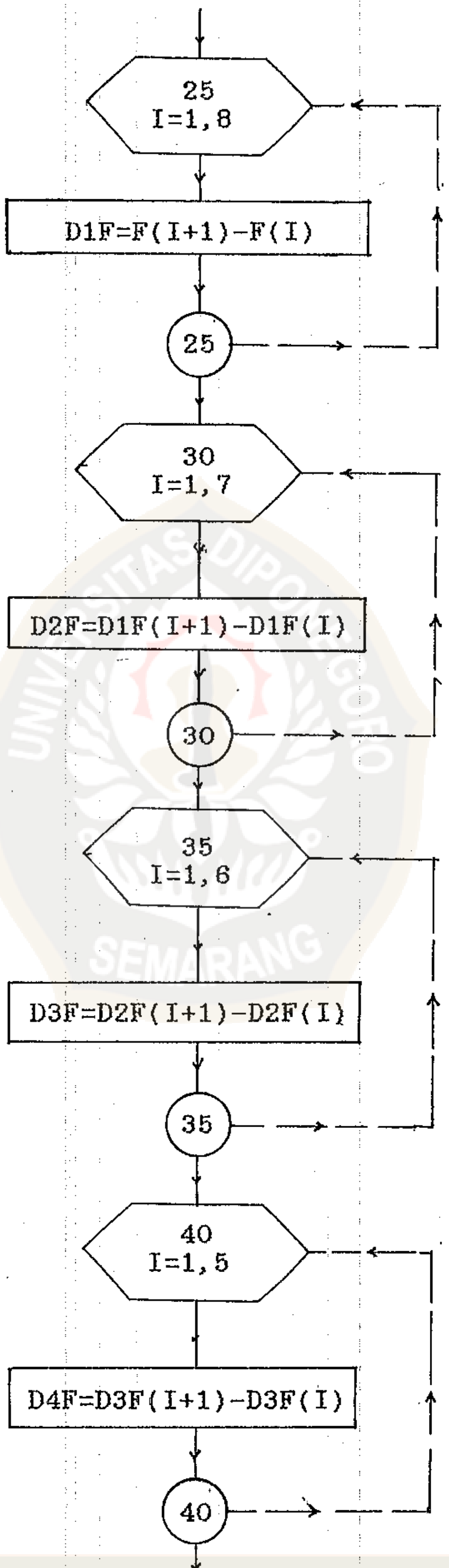
x	f(x)
1.0	1.5709
2.0	1.5713
3.0	1.5719
4.0	1.5727
5.0	1.5738
6.0	1.5751
7.0	1.5767
8.0	1.5785
9.0	1.5805

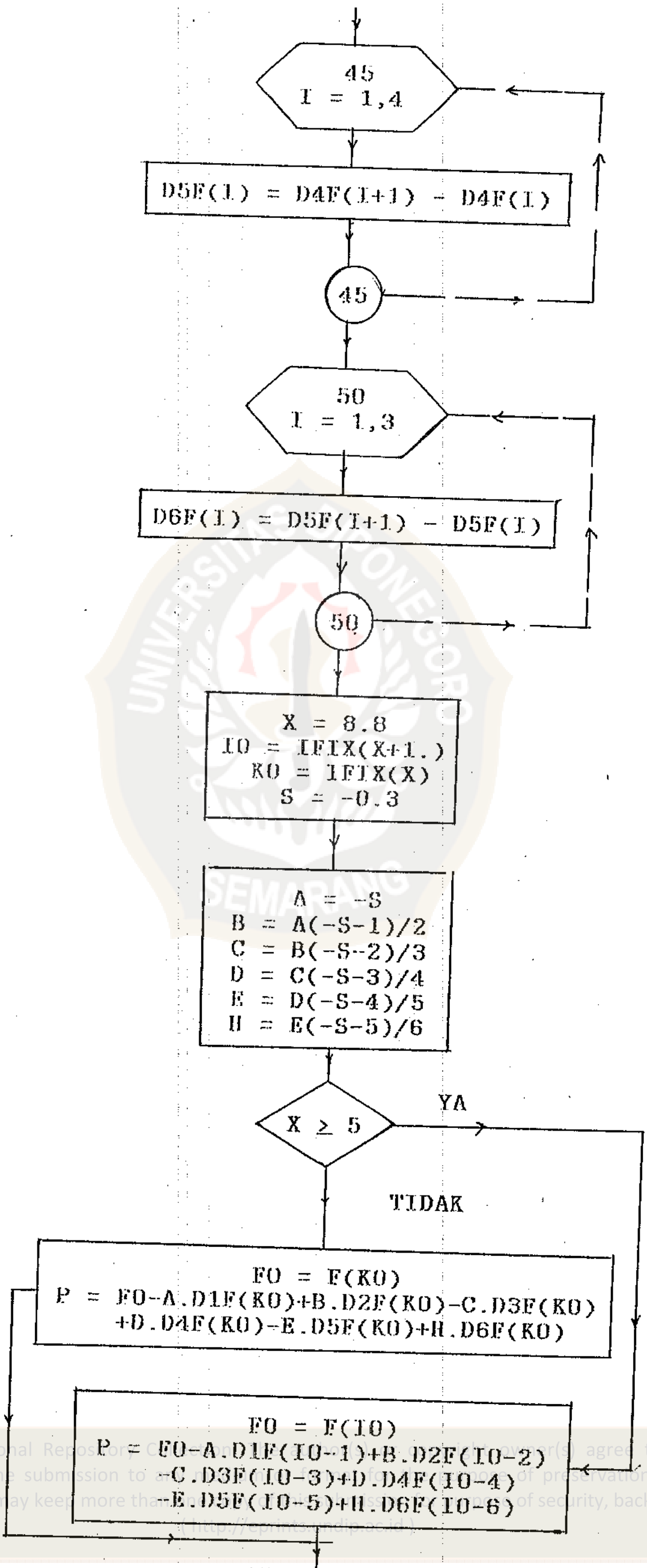
cari harga pendekatan dititik x = 8.8

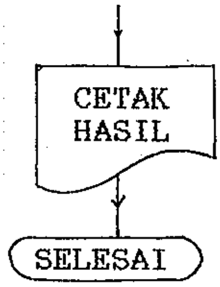
Penyelesaian

Diagram alur




25
I=1,8
D1F=F(I+1)-F(I)
25
30
I=1,7
D2F=D1F(I+1)-D1F(I)
30
35
I=1,6
D3F=D2F(I+1)-D2F(I)
35
40
I=1,5
D4F=D3F(I+1)-D3F(I)
40


45
I = 1,4
D5F(I) = D4F(I+1) - D4F(I)
45
50
I = 1,3
D6F(I) = D5F(I+1) - D5F(I)
50
X = 8.8
IO = IFIX(X+1.)
KO = IFIX(X)
S = -0.3
A = -S
B = A(-S-1)/2
C = B(-S-2)/3
D = C(-S-3)/4
E = D(-S-4)/5
H = E(-S-5)/6
X ≥ 5
YA
TIDAK
FO = F(KO)
P = FO-A.D1F(KO)+B.D2F(KO)-C.D3F(KO)
+D.D4F(KO)-E.D5F(KO)+H.D6F(KO)
FO = F(IO)
P = FO-A.D1F(IO-1)+B.D2F(IO-2)
-C.D3F(IO-3)+D.D4F(IO-4)
-E.D5F(IO-5)+H.D6F(IO-6)



PROGRAM LISTING

```
      PROGRAM NEWB
C   MENGHITUNG HARGA PENDEKATAN DITITIK X
C     X     FX
C     1   1.5709
C     2   1.5713
C     3   1.5719
C     4   1.5727
C     5   1.5738
C     6   1.5751
C     7   1.5767
C     8   1.5785
C     9   1.5805
      DIMENSION F(10),D1F(10),D2F(10),D3F(10),D4F(10)
      DIMENSION D5F(10),D6F(10)
      OPEN(1,FILE='NEW.DAT')
      OPEN(2,FILE='NBN',STATUS='NEW')
      DO 20 I=1,9
   20 READ(1,22)F(I)
   22 FORMAT(F6.4)
      DO 25 I=1,8
   25 D1F(I)=F(I+1)-F(I)
      DO 30 I=1,7
   30 D2F(I)=D1F(I+1)-D1F(I)
      DO 35 I=1,6
   35 D3F(I)=D2F(I+1)-D2F(I)
      DO 40 I=1,5
   40 D4F(I)=D3F(I+1)-D3F(I)
      DO 45 I=1,4
   45 D5F(I)=D4F(I+1)-D4F(I)
      DO 50 I=1,3
   50 D6F(I)=D5F(I+1)-D5F(I)
      X1=8.8
      IO=IFIX(X1+1.)
      KO=IFIX(X1)
      S=-0.3
      A=-S
      B=A*(-S-1.)/2.
      C=B*(-S-2.)/3.
      D=C*(-S-3.)/4.
      E=D*(-S-4.)/5.
      H=E*(-S-5.)/6.
      IF (X1.GT.5.) GOTO 100
      FO=F(KO)
      P=FO-A*D1F(KO)+B*D2F(KO)-C*D3F(KO)+D*D4F(KO)-E*D5F(KO)
     1+H*D6F(KO)
      GOTO 150
```

```
  100 FO=F(IO)
      P=FO-A*D1F(IO-1)+B*D2F(IO-2)-C*D3F(IO-3)+D*D4F(IO-4)
     2-E*D5F(IO-5)+H*D6F(IO-6)
  150 WRITE(2,160)
  160 FORMAT(1X,'P4(X+SH)=FO+S*D1F-S(-S-1)/2*D2F2',/,
     110X,'-S(-S-1)(-S-2)/6*D3F',/,
     210X,'-S(-S-1)(-S-2)(-S-3)/24*D4F',/,
     310X,'-S(-S-1)(-S-2)(-S-3)(-S-4)/120*D5F',/,
     410X,'-S(-S-1)(-S-2)(-S-3)(-S-4)(-S-5)/720*D6F',//)
      WRITE(2,170)P
  170 FORMAT(1X,'P(X+SH)=',F7.4)
      STOP
      END

Pass One      No Errors Detected
              59 Source Lines
```

DATA YANG DIGUNAKAN

```
1.5709
1.5713
1.5719
1.5727
1.5738
1.5751
1.5767
1.5785
1.5805
```

HASIL PERHITUNGAN

```
P4(X+SH)=FO+S*D1F-S(-S-1)/2*D2F2
         -S(-S-1)(-S-2)/6*D3F
         -S(-S-1)(-S-2)(-S-3)/24*D4F
         -S(-S-1)(-S-2)(-S-3)(-S-4)/120*D5F
         -S(-S-1)(-S-2)(-S-3)(-S-4)(-S-5)/720*D6F

P(X+SH)= 1.5798
```

II.2. METODA TAYLOR

$y=f(x)$ fungsi yang mempunyai sifat :

1. Dapat diturunkan ke n dengan kontinu pada interval tertutup [a,b]
2. Juga dapat diturunkan ke n+1 pada interval terbuka (a,b)

$f(x,y)$ fungsi berharga tunggal, untuk setiap harga x dan y.

Ambil x_0 salah satu titik pada [a,b], dengan $y(x_0) = y_0$ maka untuk setiap $x \in [a,b]$, expansi deret taylor pada titik (x_0,y_0) ialah :

$$f(x) = f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)$$

$$+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = y_0+\frac{x-x_0}{1!}y_0'+\frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0''+\frac{(x-x_0)^3}{3!}y_0'''+\ldots\ldots\ldots$$

dengan $y_0 = f(x_0) = y(x_0)$

$y_0' = f'(x_0) = y'(x_0)$

Diketahui $x_i = x_0+ih$, h jarak dua titik yang berurutan sepanjang sumbu x.

Harga pendekatan deret Taylor pada tiap-tiap titik :

$i=1$, $x_1 = x_0+h$

$$f(x_0+h) = f(x_0)+\frac{(x_0+h-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x_0+h-x_0)^2}{2!}f''(x_0)$$

$$+\frac{(x_0+h-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x_1) = y_1 = y_0+\frac{h}{1!}y_0'+\frac{h^2}{2!}y_0''+\frac{h^3}{3!}y_0'''+\ldots\ldots\ldots$$

$i=2$, $x_2 = x_0+2h$

$$f(x_0+2h) = f(x_0)+\frac{x_0+2h-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x_0+2h-x_0)^2}{2!}f''(x_0)$$

$$+\frac{(x_0+2h-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x_2) = y_2 = y_0+\frac{2h}{1!}y_0'+\frac{4h^2}{2!}y_0''+\frac{8h^3}{3!}y_0'''+\ldots\ldots\ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$i=k$, $x_k=x_0+kh$

$$f(x_0+kh) = f(x_0)+\frac{x_0+kh-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x_0+kh-x_0)^2}{2!}f''(x_0)$$

$$+\frac{(x_0+kh-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x_k) = y_k = y_0+\frac{kh}{1!}y_0'+\frac{k^2h^2}{2!}y_0''+\frac{k^3h^3}{3!}y_0'''+\ldots\ldots\ldots$$

Jika diketahui $x=x_k$, maka y_{k+1} dapat dihitung dengan rumus

$$y_{k+1} = y_k+\frac{h}{1!}y_k'+\frac{h^2}{2!}y_k''+\frac{h^3}{3!}y_k'''+\ldots\ldots\ldots$$

atau

$$y(x_k+1) = y(x_k)+\frac{x-x_k}{1!}y'(x_k)$$

$$+\frac{(x-x_k)^2}{2!}y''(x_k)+\frac{(x-x_k)^3}{3!}y'''(x_k)+\ldots\ldots\ldots$$

$$y(x_k+h) = y(x_k)+\frac{x-x_k}{1!}y'(x_k)$$

$$+\frac{(x-x_k)^2}{2!}y''(x_k)+\frac{(x-x_k)^3}{3!}y'''(x_k)+\ldots\ldots\ldots$$

$$y(x) = y(x_k) + \frac{x-x_k}{1!} y'(x_k) + \frac{(x-x_k)^2}{2!} y''(x_k)$$

$$+ \frac{(x-x_k)^3}{3!} y'''(x_k) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diketahui $y'=f(x,y)$

$$y'' = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + f(x,y) . \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

$$= f_x + f . f_y$$

dimana f_x dan f_y merupakan turunan parsiil terhadap x dan terhadap y.

$$y''' = f_{xx} + f_{xy} . f + f_{yy} . f^2 + f_{xy} . f + f_y . f_x + f_y^2 . f$$

$$= f_{xx} + 2f_{xy} . f + f_{yy} . f^2 + f_x . f_y + f_y^2 . f$$

Algorithma 2.2.1

Algorihma Taylor derajat k.

Untuk mendapatkan solusi pendekatan dari persamaan differensial $y' = f(x,y)$

$y(a) = y_0$

pada interval [a,b]

1. ambil langkah $h = (b-a)/N$

   $x_0=a$, $x_n=a+nh$, $y(x_n)=y(a+nh)$, $x_N=b$

2. pendekatan umum y_n pada $y(x_n)$ dari pengulangan

   $y_{n+1} = y_n + h . T_k(x_n, y_n)$, $n=0,1,2,3,\ldots\ldots,N-1$

dimana

$$T_k(x,y) = f(x,y) + \frac{h}{2!} . f'(x,y) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^{k-1}}{k!} . f^{(k-1)}(x,y)$$

$k = 1,2,\ldots\ldots\ldots$

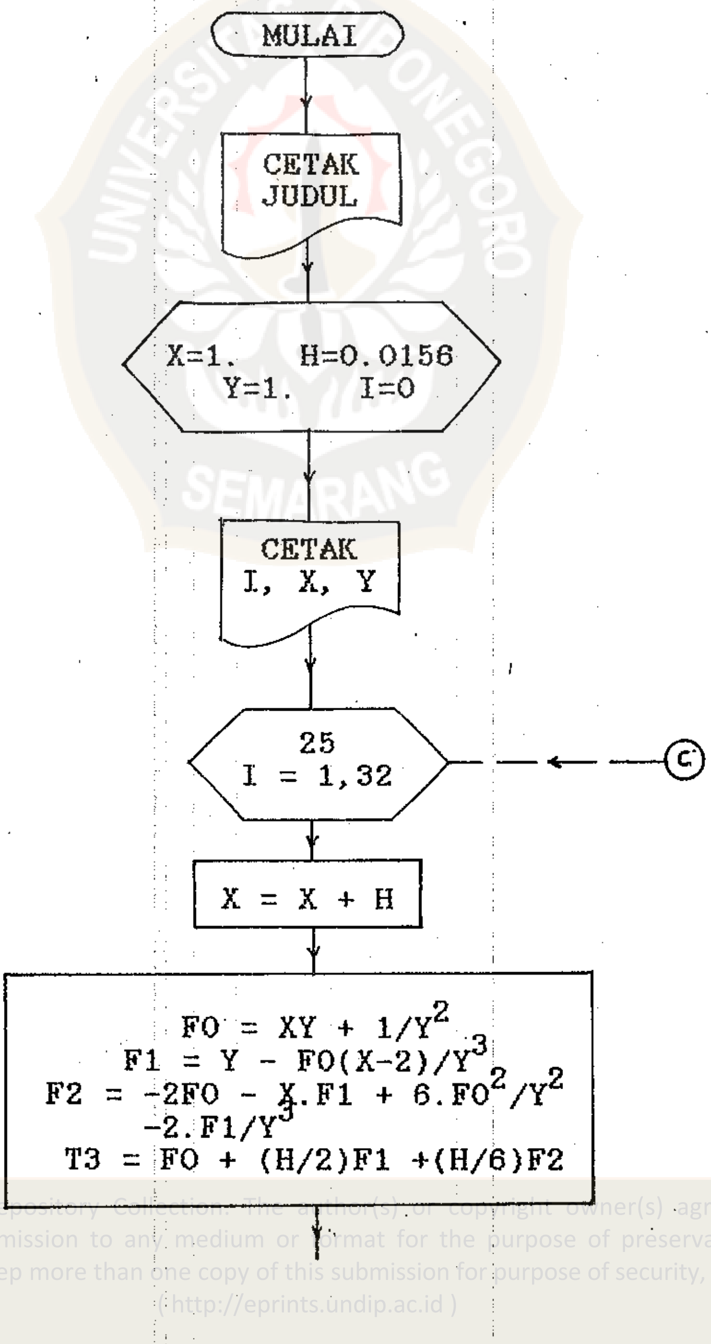
Contoh soal

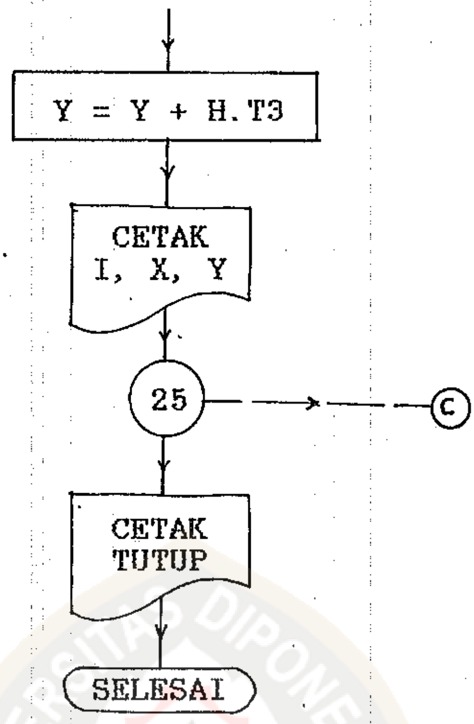
$$y' = -xy + \frac{1}{y^2} \qquad , \qquad y(1) = 1$$

Selesaikan persamaan differensial diatas dengan Algorithma Taylor tingkat 3 untuk mendapatkan harga pendekatan y dengan pengulangan pada x=2 dengan h=1/32 .

Penyelesaian

Diagram alur





PROGRAM LISTING

```
      PROGRAM TAY
      OPEN (1,FILE='TAY',STATUS='NEW')
      WRITE (1,5)
    5 FORMAT (25('='),/,3X,'K',6X,'X',9X,'Y',/,25('='))
      X=1.
      Y=1.
      H=0.0312
      I=0
      WRITE (1,10)I,X,Y
      DO 25 I=1,32
      F0=-X*Y+(1/(Y**2))
      F1=-Y-(F0*(X+2.)/(Y**3))
      AD=-(2.*F0)-(X*F1)
      BC=6.*(F0**2)/(Y**2)
      CD=-(2.*F1)/(Y**3)
      F2=AD+BC+CD
      T3=F0+(H/2)*F1+(H/6)*F2
      Y=Y+(H*T3)
      X=X+H
      WRITE (1,10)I,X,Y
   25 CONTINUE
   10 FORMAT (1X,I3,2F10.4)
      WRITE (1,30)
   30 FORMAT (25('='))
      STOP
      END

 Pass One     No Errors Detected
              26 Source Lines
```

HASIL PERHITUNGAN

K	X	Y
0	1.0000	1.0000
1	1.0312	1.0000
2	1.0624	0.9990
3	1.0936	0.9972
4	1.1248	0.9946
5	1.1560	0.9913
6	1.1872	0.9874
7	1.2184	0.9829
8	1.2496	0.9779
9	1.2808	0.9725
10	1.3120	0.9668
11	1.3432	0.9607
12	1.3744	0.9544
13	1.4056	0.9479
14	1.4368	0.9411
15	1.4680	0.9343
16	1.4992	0.9274
17	1.5304	0.9204
18	1.5616	0.9134
19	1.5928	0.9064
20	1.6240	0.8994
21	1.6552	0.8925
22	1.6864	0.8857
23	1.7176	0.8789
24	1.7488	0.8722
25	1.7800	0.8657
26	1.8112	0.8593
27	1.8424	0.8530
28	1.8736	0.8468
29	1.9048	0.8408
30	1.9360	0.8349
31	1.9672	0.8292
32	1.9984	0.8236

II.3.1. METODA EULER

$$y' = f(x,y)$$

Menurut definisi $\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Untuk Δx kecil, maka $\Delta y \simeq \frac{dy}{dx} \Delta x$

Akan ditentukan perubahan Δy pada y untuk setiap pertambahan x yang sesuai.

$\Delta x = h$, pertambahan x.

Rumus pendekatan yang terjadi :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

$$= y_n + \frac{dy}{dx} \Delta x_n$$

$$= y_n + f(x,y)\, \Delta x_n$$

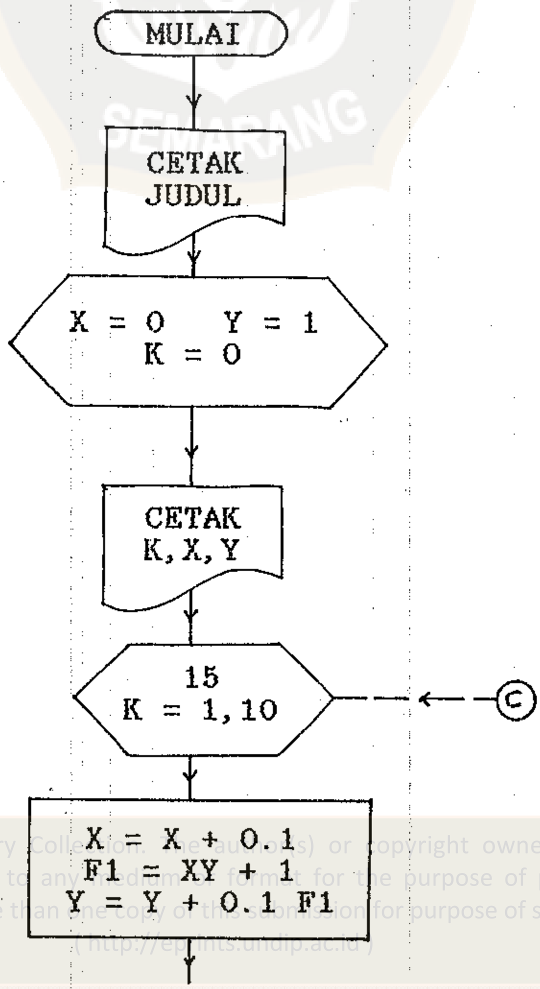
$$y_{n+1} = y_n + h\, f(x,y)$$

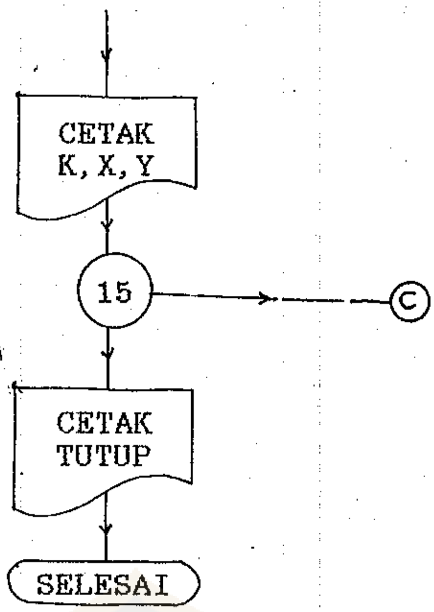
Contoh soal

Selesaikan persamaan $y' = xy + 1$, dengan syarat awal $x = 0$, $y = 1$ untuk mendapatkan harga pendekatan y pada $x = 1$ dengan $h = 0.1$.

Penyelesaian

Diagram alur





PROGRAM LISTING

```
      PROGRAM MEU
C     MENGHITUNG HARGA PENDEKATAN Y DARI PERSAMAAN
C     Y1=XY+1 MENGGUNAKAN METODA EULER DENGAN SYARAT
C     AWAL Y(0)=1 PADA INTERVAL X=0 SAMPAI X=1
C     DENGAN H=0.1
      OPEN (1,FILE='EUL',STATUS='NEW')
      WRITE (1,5)
      X=0.
      Y=1.
      K=0
      WRITE (1,10)K,X,Y
      DO 15 K=1,10
      X=X+0.1
      F1=X*Y+1.
      Y=Y+0.1*F1
      WRITE (1,10)K,X,Y
   15 CONTINUE
    5 FORMAT (' ============================ ',/,
     1        '   K      X          Y         ',/,
     2        ' ============================ ')
   10 FORMAT (1X,I3,2F10.6)
      WRITE (1,25)
   25 FORMAT (28('='))
      STOP
      END
```

Pass One   No Errors Detected
            24 Source Lines

HASIL PERHITUNGAN

K	X	Y
0	0.000000	1.000000
1	0.100000	1.110000
2	0.200000	1.232200
3	0.300000	1.369166
4	0.400000	1.523933
5	0.500000	1.700129
6	0.600000	1.902137
7	0.700000	2.135287
8	0.800000	2.406110
9	0.900000	2.722660
10	1.000000	3.094926

II.3.2. METODA EULER YANG DIMODIFIKASI

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x,y)$$

$$x_i = x_0 + ih$$

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad \text{diintegralkan dari } x_i \text{ sampai } x_{i+1}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{dx}\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'\, dx$$

dari aturan trpezoidal

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'\, dx = 1/2\ h\ (y_i' + y_{i+1}')$$

maka

$$y_{i+1} - y_i = 1/2\ h\ (y_i' + y_{i+1}')$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1}}{2} \cdot h$$

untuk i=0

$$y_1 = y_0 + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1}{2} \cdot h$$

ini merupakan pendekatan pertama dari y.

Untuk i=1

$$y_2 = y_1 + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2}{2} \cdot h$$

merupakan pendekatan kedua dari y.

dan seterusnya untuk setiap harga $i \geq 0$.

Karena $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1}$ tidak dapat dihitung sebelum didapatkan harga y_{i+1}, maka rumus diatas tidak bisa dipakai langsung untuk menentukan pendekatan dari y, tapi digunakan untuk mendapatkan harga pendekatan dari tiap-tiap pendekatan dari y. Seperti terlihat rumus dibawah ini.

Pendekatan I untuk y_1

$$y_1^{[1]} = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 h \quad , \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = x_0 + y_0$$

Pendekatan II untuk y_1

$$y_1^{[2]} = y_0 + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{[1]}}{2} \cdot h \quad ,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{[1]} = x_1 + y_1^{[1]}$$

Pendekatan III untuk y_1

$$y_1^{[3]} = y_0 + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{[2]}}{2} \cdot h$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{[2]} = x_1 + y_1^{[2]}$$

dan seterusnya, diambil harga y_1 sampai hasil perhitungan $y_1^{[n]} = y_1^{[n-1]}$ dengan batasan bilangan desimal tertentu.

Pendekatan I untuk y_2

$$y_2^{[1]} = y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 h \quad , \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = x_1 + y_1$$

Pendekatan II untuk y_2

$$y_2^{[2]} = y_1 + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2^{[1]}}{2} \cdot h \quad ,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2^{[1]} = x_1 + y_2^{[1]}$$

Pendekatan III untuk y_2

$$y_2^{[3]} = y_1 + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2^{[2]}}{2} \cdot h \quad ,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2^{[2]} = x_1 + y_2^{[2]}$$

dan seterusnya, diambil harga y_2 sampai hasil perhitungan $y_2^{[n]} = y_2^{[n-1]}$ dengan bilangan desimal tertentu.

Pendekatan I untuk y_3

$$y_3^{[1]} = y_2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 h \quad , \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = x_2 + y_2$$

Pendekatan II untuk y_3

$$y_3^{[2]} = y_2 + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_3^{[1]}}{2} \cdot h \quad ,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_3^{[1]} = x_2 + y_3^{[1]}$$

Pendekatan III untuk y_3

$$y_3^{[3]} = y_2 + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_3^{[2]}}{2} \cdot h \quad ,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_3^{[2]} = x_2 + y_3^{[2]}$$

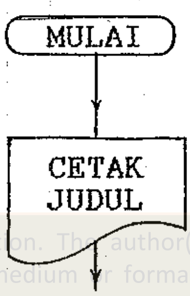
dan seterusnya, diambil harga y_1 sampai hasil perhitungan $y_3^{[n]} = y_3^{[n-1]}$ dengan batasan bilangan desimal tertentu.

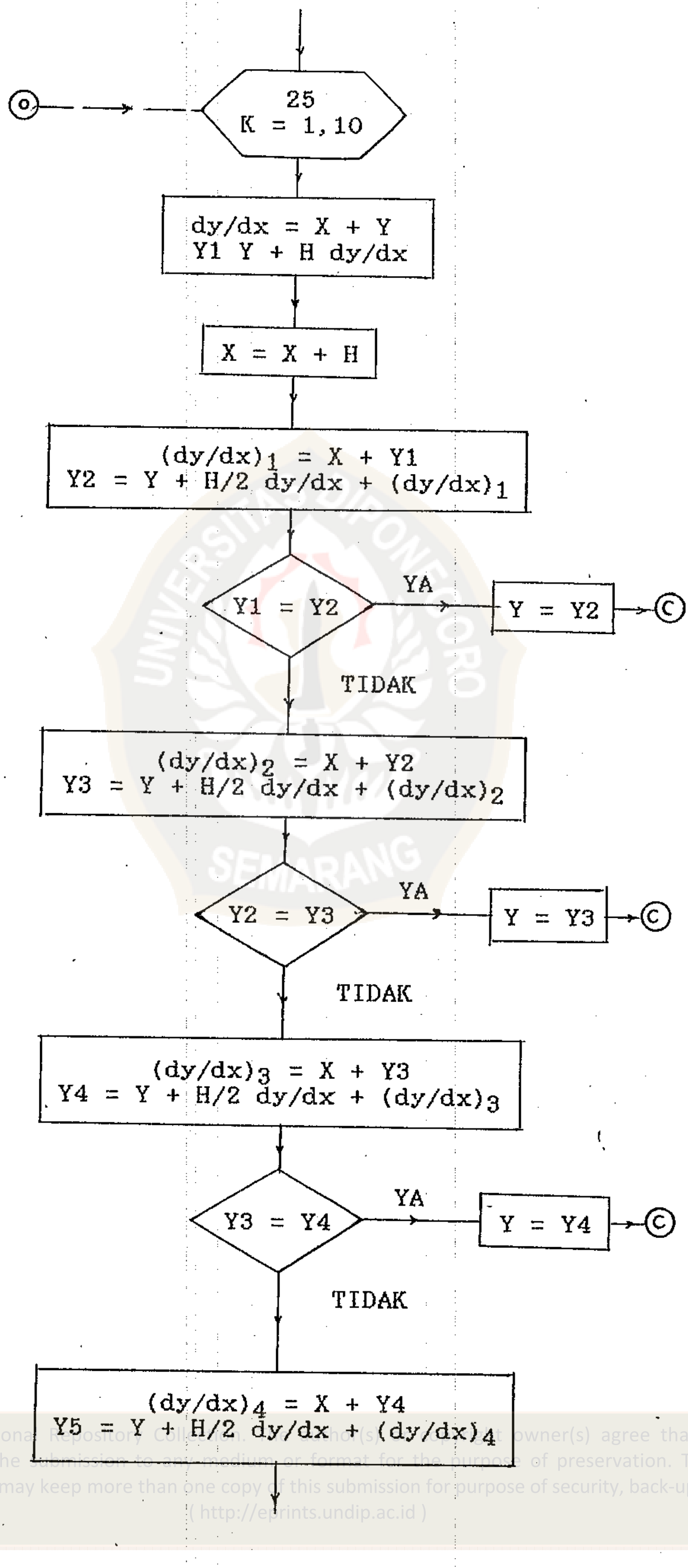
Contoh soal

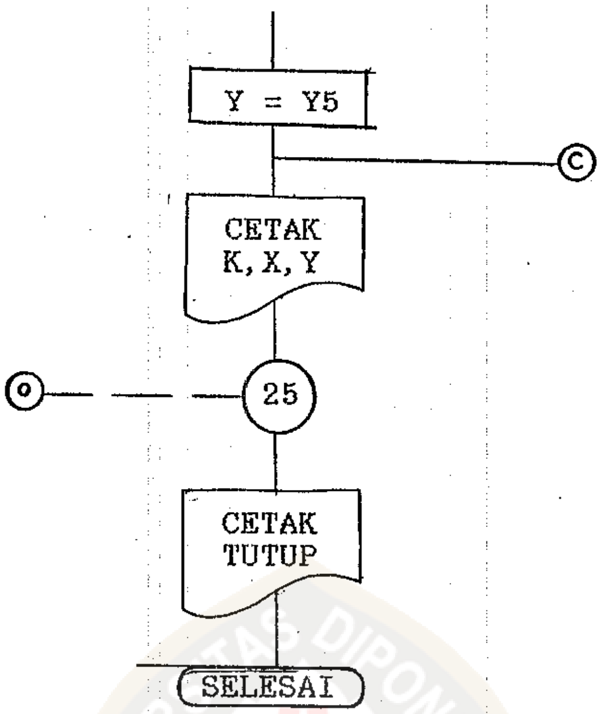
Selesaikan persamaan $y' = xy + 1$ untuk mendapatkan harga pendekatan y pada x=1 dengan syarat awal x=0 , y=1 dan h=0.1.

Penyelesaian

Diagram alur




25
K = 1,10
dy/dx = X + Y
Y1 Y + H dy/dx
X = X + H
(dy/dx)1 = X + Y1
Y2 = Y + H/2 dy/dx + (dy/dx)1
Y1 = Y2
YA
Y = Y2
TIDAK
(dy/dx)2 = X + Y2
Y3 = Y + H/2 dy/dx + (dy/dx)2
Y2 = Y3
YA
Y = Y3
TIDAK
(dy/dx)3 = X + Y3
Y4 = Y + H/2 dy/dx + (dy/dx)3
Y3 = Y4
YA
Y = Y4
TIDAK
(dy/dx)4 = X + Y4
Y5 = Y + H/2 dy/dx + (dy/dx)4



PROGRAM LISTING

```
      PROGRAM EUM
C     MENCARI HARGA PENDEKATAN Y PADA PERSAMAAN Y1=XY+1
C     MENGGUNAKAN METODA EULER YANG DIMODIFIKASI DENGAN
C     SYARAT AWAL Y(0)=1 PADA INTERVAL X=0 SAMPAI X=1
C     DENGAN H=0.1
      OPEN (1,FILE='ELMO',STATUS='NEW')
      WRITE (1,5)
      X=0.
      Y=1.
      H=0.1
      K=0
      WRITE (1,10)K,X,Y
      DO 25 K=1,10
      DYX=X+Y
      Y11=Y+H*DYX
      X=X+H
      DYX1=X+Y11
      Y12=Y+H*(DYX+DYX1)/2
      IF (Y11.EQ.Y12) GO TO 20
      DYX2=X+Y12
      Y13=Y+H*(DYX+DYX2)/2
      IF (Y12.EQ.Y13) GO TO 30
      DYX3=X+Y13
      Y14=Y+H*(DYX+DYX3)/2
      IF (Y13.EQ.Y14) GO TO 35
      DYX4=X+Y14
      Y15=Y+H*(DYX+DYX4)/2
      Y=Y15
      GO TO 100
   20 Y=Y12
      GO TO 100
   35 Y=Y14
      GO TO 100
   30 Y=Y13
```

```
      GO TO 100
  100 WRITE (1,10)K,X,Y
   25 CONTINUE
    5 FORMAT (' ============================ ',/,
     2         '   K         X          Y          ',/,
     4         ' ============================ ')
   10 FORMAT (1X,I3,2F10.6)
      WRITE (1,110)
  110 FORMAT (' ============================ ')
      STOP
      END
```

Pass One   No Errors Detected
            45 Source Lines

HASIL PERHITUNGAN

K	X	Y
0	0.000000	1.000000
1	0.100000	1.110526
2	0.200000	1.243213
3	0.300000	1.400393
4	0.400000	1.584645
5	0.500000	1.798818
6	0.600000	2.046062
7	0.700000	2.329858
8	0.800000	2.654053
9	0.900000	3.022901
10	1.000000	3.441101

II.4. METODA RUNGE KUTTA

Bentuk perderetan Taylor

$$y(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{1!} y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y_0'' + \frac{(x-x_0)^3}{3!} y_0''' + \ldots\ldots$$

dapat disingkat

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_0^{(i)}}{i!} (x-x_0)^i \quad , \text{ pada titik } (x_0, y_0)$$

Untuk menentukan harga pendekatan pada titik selanjutnya diberikan bentuk

$$y(x+) = y(x) + \int_0^h y'(x+t)\, dt \qquad 2.4.1$$

dengan melihat aturan trapezoidal

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'\, dx = 1/2\ h\ (y_i' + y_{i+1}')$$

maka persamaan diatas dapat ditulis

$$y(x+h) = y(x) + 1/2\ h\ [y'(x) + y'(x+h)] + O(h^3)$$

atau

$$y(x+h) = y(x) + 1/2\ h\ [f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y_{i+1})] + O(h^3) \qquad 2.4.2$$

dan dapat dinyatakan dengan persamaan yang sesuai

$$y_{i+1} = y_i + 1/2\ h\ [f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y_{i+1})] \qquad 2.4.3$$

Ditentukan

$$y^* = y(x+h) + O(h^2) \qquad 2.4.4$$

maka persamaan 2.4.2 dapat ditulis

$$y(x+h) = y(x) + 1/2\ h\ [f(x,y(x)) + f(x_{i+1},y^*)] + O(h^3)$$

Persamaan 2.4.4 merupakan hasil perhitungan yang baik dari rumus perhitungan EULER, dapat ditunjukkan dengan :

$$y^* = y(x) + h\ f(x,y(x))$$

dapat dinyatakan dengan persamaan yang sesuai

$$y_{i+1}^* = y_i + h\ f(x_i,y_i)$$

maka persamaan 2.4.3 dapat ditulis

$$y_{i+1} = y_i + 1/2\ h\ [f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y_{i+1}^*)] + O(h^3) \qquad 2.4.5$$

Dari sini dapat dinyatakan bentuk umum pesamaan dari Runge Kutta, dengan bilangan-bilangan nyata

$a_2,\ldots\ldots,a_q$; $p_1,\ldots\ldots.,p_q$; β_{ij} , $0<j<i\leq q$

yang tidak dapat dipindah-pindahkan dalam perhitungan.

Bentuk umum persamaan Runge Kutta

$$k_1(h) = h\ f(x,y)$$

$$k_2(h) = h\ f(x+a_2h, y+\beta_{21}k_1(h))$$

! !

! !

$$k_q(h) = h\ f(x+a_qh, y+\beta_{q1}k_1(h)+\beta_{q2}k_2(h)+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\beta_{q(q-1)}k_{q-1}(h))$$

dan

$$y(x+h) \simeq z(h) = y(x) + \sum_{i=0}^{q} p_ik_i(h)$$

Untuk mendapatkan niai dari parameter a_i, p_i, β_{ij} kita pandang persamaan

$$\emptyset(h) = y(x+h) - z(h) \qquad 2.4.6$$

Jika f(x,y) fungsi-fungsi kontinu dan $k_1(h), \ldots\ldots, k_q(h)$ serta Ø(h) merupakan fungsi dari h, maka dapat diambil

$$\emptyset(0) = \emptyset'(0) = \emptyset''(0) = \ldots\ldots\ldots = \emptyset^{(s)}(0) = 0$$

dan

$$\emptyset^{(s+1)}(0) \neq 0$$

Dengan rumus Taylor didapat

$$\emptyset(h) = \sum_{i=0}^{s} \frac{\emptyset^{(i)}(0)}{i!} + \frac{\emptyset^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}$$

$$= \frac{\emptyset^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1} \quad , \text{ dimana } 0<\theta<1$$

Untuk q=2 dari persamaan 2.4.6 didapat

$$\emptyset(h) = y(x+h) - y - p_1\ h\ f(x,y) - p_2\ h\ f(\bar{x},\bar{y})$$

dimana $\bar{x} = x + a_2\ h \quad , \quad \bar{y} = y + \beta_{21}\ h\ f(x,y)$

Derivative dari persamaan Ø(h) ialah :

$$\emptyset'(h) = y'(x+h)-p_1f(x,y)-p_2f(\bar{x},\bar{y})-p_2h[a_2f_x(\bar{x},\bar{y})$$

$$+\beta_{21}f_y(\bar{x},\bar{y})f(x,y)]$$

$$\varnothing''(h) = y''(x+h)-2p_2[a_2f_x(x,y)+\beta_{21}f_y(\bar{x},\bar{y})f(x,y)]$$
$$-p_2h\{a_2^2f_{xx}(\bar{x},\bar{y})+2a_2\beta_{21}f_{xy}(\bar{x},\bar{y})f(x,y)$$
$$+\beta_{21}^2f_{yy}(x,y)f(x,y)^2\}$$
$$\varnothing'''(h) = y'''(x+h)-3p_2\{a_2^2f_{xx}(x,y)+2a_2\beta_{21}f_{xy}(x,y)$$
$$.f(x,y)+\beta_{21}^2f_{yy}(x,y)f(x,y)^2\}+O(h)$$

dengan catatan

$$y'=f \;,\; y''=f_x+f_yf \;,\; y'''=f_{xx}+2f_{xy}f+f_{yy}f^2+f_yy''$$

Untuk h=0 didapat

$$\varnothing(0) = y-y = 0$$
$$\varnothing'(0) = (1-p_1-p_2)f(x,y)$$
$$\varnothing''(0) = (1-2p_2a_2)f_x(x,y)+(1-2p_2\beta_{21})f_y(x,y)f(x,y)$$
$$\varnothing'''(0) = (1-3p_2a_2^2)f_{xx}(x,y)+(2-6p_2a_2\beta_{21})f_{xy}(x,y).$$
$$f(x,y)+(1-3p_2\beta_{21}^2)f_{yy}(x,y)f(x,y)^2$$
$$+f_y(x,y)y''(x)$$

untuk setiap f ,

$\varnothing'(0)=0$ jika $1-p_1-p_2=0$,

$\varnothing''(0)=0$ jika $1-2p_2a_2=0$ dan $1-2p_2\beta_{21}=0$

terdapat tiga persamaan dengan empat parameter, maka diambil satu parameter sebarang.

Jika diambil $p_1=1/2$ maka $p_2=1/2$, $a_2=1$, $\beta_{21}=1$.

Jadi persamaan Runge Kutta untuk q=2 dapat ditulis

$$k_1 = h\ f(x,y)$$
$$k_2 = h\ f(x+h,y+k_1)$$
$$\Delta y = z(h) - y = 1/2\ (k_1 + k_2) \qquad 2.4.7$$

Jika $p_1=1/4$ maka $p_2=3/4$, $a_2=\beta_{21}=2/3$

Persamaan yang terjadi

$$k_1 = h\ f(x,y)$$
$$k_2 = h\ f(x+2/3.h,y+2/3.k_1)$$
$$\Delta y = z(h) - y = 1/4\ (k_1 - 3k_2) \qquad 2.4.8$$

Untuk q=3 dengan cara seperti diatas didapat

$a_2=\beta_{21}$, $a_3=\beta_{31}+\beta_{32}$, $a_3(a_3-a_2)-\beta_{32}a_2(2-3a_2)=0$

$p_1\beta_{32}a_2=1/6$, $p_2a_2+p_3a_3=1/2$, $p_1+p_2+p_3=1$

terdapat enam persamaan dengan delapan parameter, maka diambil dua parameter sebarang.

Jika diambil $a_2=1/2$ dan $a_3=1$, maka $\beta_{21}=1/2$, $\beta_{31}=-1$, $\beta_{32}=2$, $p_1=1/6$, $p_2=4/6$, $p_3=1/6$, maka didapat persamaan Runge Kutta untuk q=3

$k_1 = h\ f(x,y)$

$k_2 = h\ f(x+1/2\ h, y+1/2\ k_1)$

$k_3 = h\ f(x+h, y-k_1+k_2)$

$\Delta y = z(h) - y = 1/6\ (k_1 - 4k_2 + k_3)$ 2.4.9

Untuk q=4, dengan cara seperti diatas sulit dibentuk persamaan penyelesaian parameter yang ada.

Tapi dapat diberikan bentuk rums Runge Kutta dengan memberikan satu parameter :

$k_1 = h\ f(x,y)$

$k_2 = h\ f(x+1/2\ h, y+1/2\ k_1)$

$k_3 = h\ f(x+1/2\ h, y+(1/2 - 1/2t)k_1+1/2t\ k_2)$

$k_4 = h\ f(x+h, y+(1-t)k_2+tk_3)$

$\Delta y = z(h) - y = 1/6\ \{k_1 + (4-2t)k_2 + 2tk_3 + tk_4\}$

.... 2.4.10

Penggunaan rumus diatas secara meluas untuk t=1 ialah :

$k_1 = h\ f(x,y)$

$k_2 = h\ f(x+1/2\ h, y+1/2\ k_1)$

$k_3 = h\ f(x+1/2\ h, y+1/2\ k_2)$

$k_4 = h\ f(x+h, y+k_3)$

$\Delta y = z(h) - y = 1/6\ (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ 2.4.11

Bentuk lain persamaan Runge Kutta untuk q=4 diberikan

$$k_1 = h\ f(x,y)$$

$$k_2 = h\ f(x+1/3\ h, y+1/3\ k_1)$$

$$k_3 = h\ f(x+2/3\ h, y-1/3\ k_1+k_2)$$

$$k_4 = h\ f(x+h, y+k_1-k_2+k_3)$$

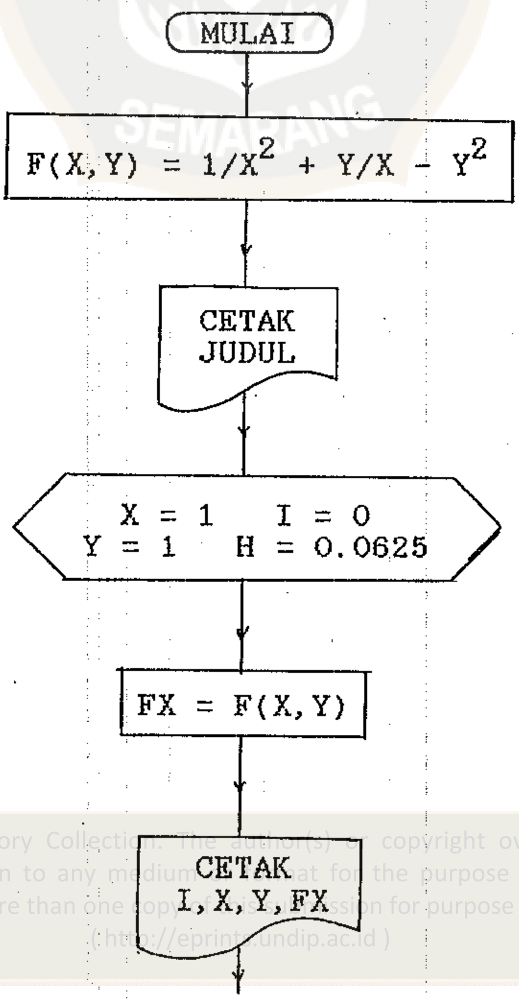
$$\Delta y = z(h) - y = 1/8\ (k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \qquad 2.4.11$$

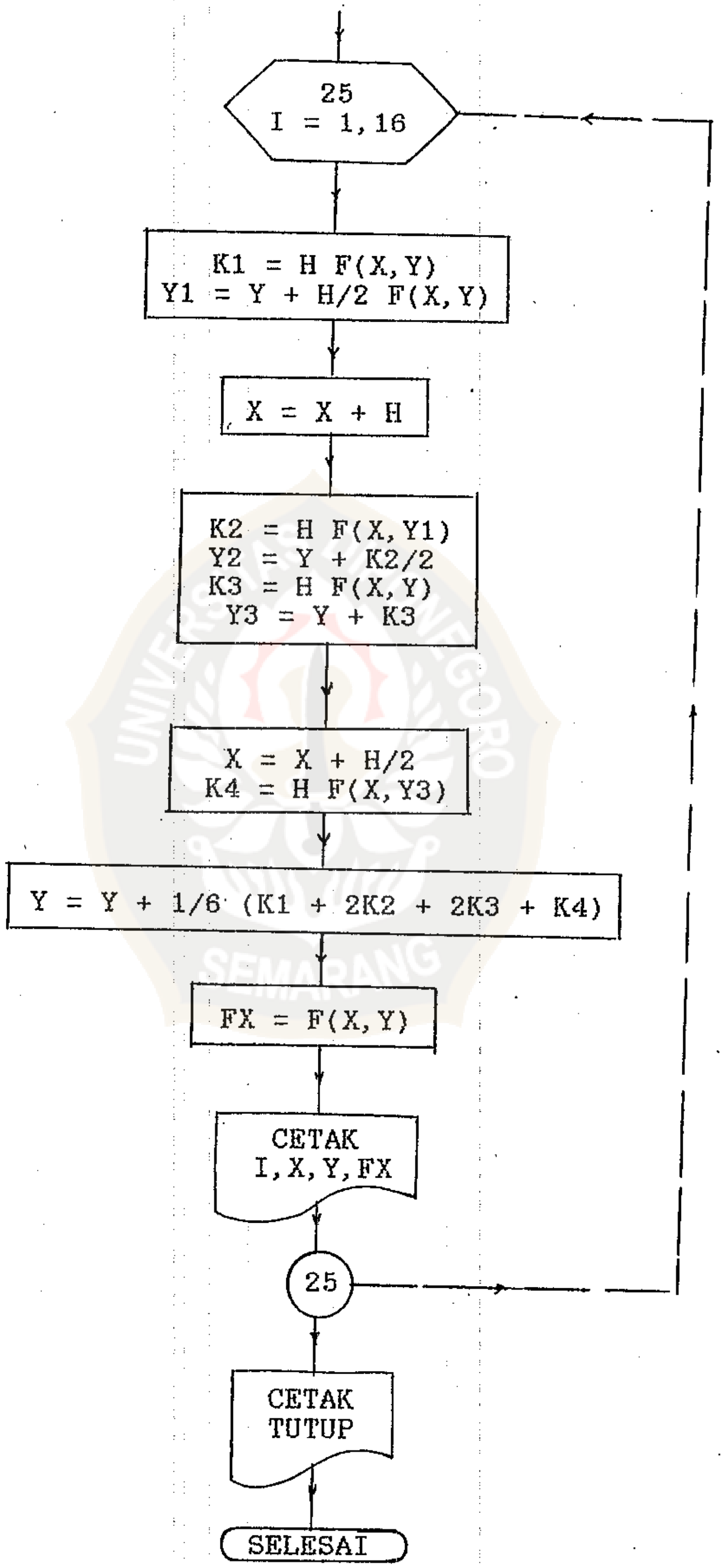
Contoh soal

Selesaikan persamaan $y' = 1/x^2 - y/x - y^2$ untuk mendapatkan harga pendekatan y pada x=2 dengan syarat awal y(1)=1 dan h=1/16.

Penyelesaian

Diagram alur




25
I = 1, 16
K1 = H F(X, Y)
Y1 = Y + H/2 F(X, Y)
X = X + H
K2 = H F(X, Y1)
Y2 = Y + K2/2
K3 = H F(X, Y)
Y3 = Y + K3
X = X + H/2
K4 = H F(X, Y3)
Y = Y + 1/6 (K1 + 2K2 + 2K3 + K4)
FX = F(X, Y)
CETAK
I, X, Y, FX
25
CETAK
TUTUP
SELESAI

PROGRAM LISTING

```
      PROGRAM RKUTTA
C     MENGHITUNG HARGA PENDEKATAN Y PADA PERSAMAAN
C     F(X,Y)=1/(X**2)-Y/X-Y**2 MENGGUNAKAN METODA
C     RUNGE KUTTA TINGKAT EMPAT. Y(X+H)=Y(X)+H/6(K1
C     +2K2+2K3+K4) ; K1=HF(X,Y) ; K2=HF(X+H/2,Y+K1/2);
C     K3=HF(X+H/2,Y+K2/2) ; K4=HF(X+H,Y+K3) ; DENGAN
C     SYARAT AWAL Y(1)=1 PADA INTERVAL X=1 SAMPAI X=2
C     DENGAN H=0.0625.
      F(X,Y)=1./(X**2)-Y/X-Y**2
      OPEN (1,FILE='KUTTA.TXT',STATUS='NEW')
      WRITE (1,10)
   10 FORMAT (45('='),/,3X,'I',7X,'X',12X,'Y',8X,
     1'F(X,Y)',/,45('='))
      X=1.
      Y=1.
      H=0.0625
      I=0
      FX=F(X,Y)
      WRITE (1,30)I,X,Y,FX
      DO 25 I=1,16
      A1=H*F(X,Y)
      Y1=Y+A1/2.
      X=X+H/2.
      A2=H*F(X,Y1)
      Y2=Y+A2/2.
      A3=H*F(X,Y2)
      Y3=Y+A3
      X=X+H/2.
      A4=H*F(X,Y3)
      Y=Y+(H/6.)*(A1+2.*A2+2.*A3+A4)
      FX=F(X,Y)
      WRITE (1,30)I,X,Y,FX
   25 CONTINUE
   30 FORMAT (1X,I3,3F12.6)
      WRITE (1,35)
   35 FORMAT (45('='))
      STOP
      END

Pass One     No Errors Detected
             37 Source Lines
```

HASIL PERHITUNGAN

I	X	Y	F(X,Y)
0	1.000000	1.000000	-1.000000
1	1.062500	0.996324	-1.044564
2	1.125000	0.992503	-1.077165
3	1.187500	0.988577	-1.100629
4	1.250000	0.984574	-1.117045
5	1.312500	0.980516	-1.127974
6	1.375000	0.976423	-1.134601
7	1.437500	0.972307	-1.137836
8	1.500000	0.968180	-1.138380
9	1.562500	0.964050	-1.136786
10	1.625000	0.959926	-1.133484
11	1.687500	0.955813	-1.128821
12	1.750000	0.951716	-1.123070
13	1.812500	0.947637	-1.116452
14	1.875000	0.943581	-1.109145
15	1.937500	0.939550	-1.101295
16	2.000000	0.935546	-1.093019