BAB II

TEORI GRAPH

G adalah suatu graph jika :

G = (V,E)

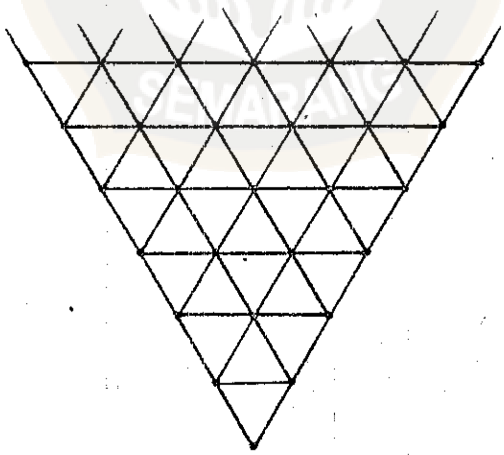
V = ($v_1,v_2,v_3,\ldots\ldots\ldots$) adalah himpunan titik-titik dan $V \neq \emptyset$.

E = ($e_1,e_2,e_3,\ldots\ldots\ldots$) adalah himpunan garis-garis.

Catatan : setiap ujung-ujung garis pasti terdapat titik, tetapi adanya titik belum tentu ada garis.

Graph G adalah graph tidak berhingga (infinite graph) jika : 1. V tidak berhingga.
2. E boleh berhingga.

Contoh dari graph tidak berhingga diberikan pada gambar di bawah ini.



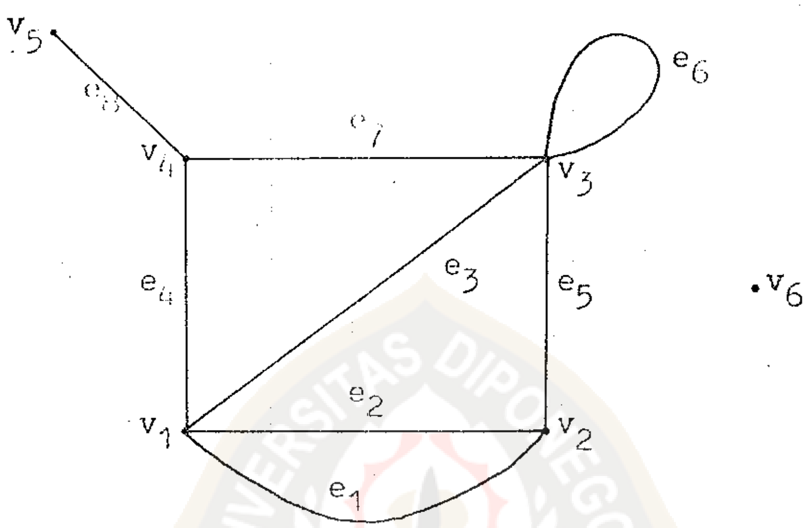
Gambar 2.1. Graph tidak berhingga.

Graph G adalah graph berhingga (finite graph) jika :

1. V berhingga dan $V \neq \emptyset$.
2. E berhingga.

Contoh dari graph berhingga diberikan pada gambar 2.2.

Untuk selanjutnya yang dibahas disini hanya graph berhingga saja. Karena pokok pembahasannya adalah menyelesaikan permasalahan dari teori graph dengan bantuan komputer. Komputer akan dapat membantu menyelesaikan jika permasalahannya terbatas (berhingga).



Gambar 2.2. Graph berhingga.

2.1. GRAPH TIDAK BERARAH (UNDIRECTED GRAPH)

Yaitu ·tu graph yang setiap garis-garisnya tidak menentukan titik asal (source) dan titik tujuan (target).

Berikut ini diberikan beberapa definisi untuk graph tidak berarah.

Loop :

Suatu garis yang kedua ujungnya berakhir pada satu titik yang sama.

Sebagai contoh pada gambar 2.2. adalah garis e_6.

Garis paralel (parallel edge) :

Garis-garis yang bersama-sama menghubungkan sepasang titik yang sama.

Sebagai contoh pada gambar 2.2. yaitu garis e_1, e_2.

Derajat (degree/valency) :

Banyaknya ujung garis yang berada pada suatu titik. Simbol dari derajat adalah $d(v_i)$.

Pada gambar 2.2.

$d(v_1) = 4$ $\quad d(v_2) = d(v_4) = 3$ $\quad d(v_3) = 5$

$d(v_5) = 1$ $\quad d(v_6) = 0$.

Karena setiap garis disangga oleh dua titik, maka setiap garis menyumbangkan dua derajat, yaitu sumbangan pertama pada titik disuatu ujung, dan sumbangan kedua pada titik diujung yang lain. Sehingga, jika dalam suatu graph terdapat e garis, maka jumlah derajat dalam graph tersebut adalah 2 x e.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e.$$

Gambar 2.2. adalah graph dengan 6 titik dan 8 garis sehingga jumlah derajatnya adalah :

$$\sum_{i=1}^{6} d(v_i) = d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)+d(v_4)+d(v_5)+d(v_6).$$

$$= 4 + 3 + 5 + 3 + 1 + 0$$

$$= 16.(2 \times e).$$

Adjacent :

Dua titik yang dihubungkan langsung oleh sedikitnya satu garis.

Pada gambar 2.2.

v_1 adjacent dengan v_2, v_3 dan v_4.

v_1 tidak adjacent dengan titik v_5

v_6 tidak adjacent dengan titik manapun.

Titik terasing (isolated vertex) :

Titik yang berderajat nol.

Pada gambar 2.2. adalah titik v_6.

Titik akhir (end vertex) :

Titik yang berderajat satu.

Pada gambar 2.2. adalah titik v_5.

Graph nol (null graph) :

Graph yang semua titiknya berderajat nol, atau graph yang tidak mempunyai garis.

Contohnya seperti pada gambar 2.3.(a).

Graph sederhana (simple graph) :

Suatu graph yang tidak mempunyai loop dan garis paralel.

Apabila dalam graph sederhana terdapat n titik, maka akan dapat ditemukan n(n-1) pasangan titik. Dan ternyata pasangan titik v_i, v_j dan pasangan titik v_j, v_i, dihubungkan oleh satu garis. Jadi setiap dua pasang titik dihubungkan oleh satu garis. Sedang dalam setiap pasangan titik belum tentu dihubungkan oleh suatu garis, maka dalam graph sederhana tersebut maksimal terdapat n(n-1)/2 garis.

Graph komplit (complete graph) :

Graph sederhana yang setiap titiknya adjacent dengan semua titik yang lain.

Karena graph komplit merupakan graph sederhana yang semua pasangan titiknya dihubungkan oleh suatu garis maka merupakan graph sederhana dengan jumlah garis yang maksimal, yaitu n(n-1)/2 garis.

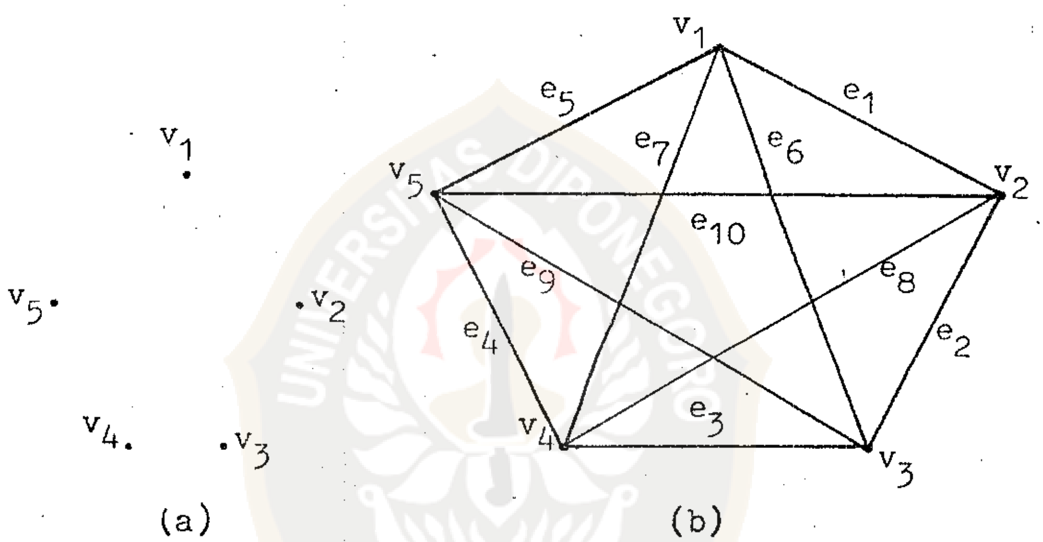
Contohnya diberikan pada gambar 2.3(b).

Subgraph

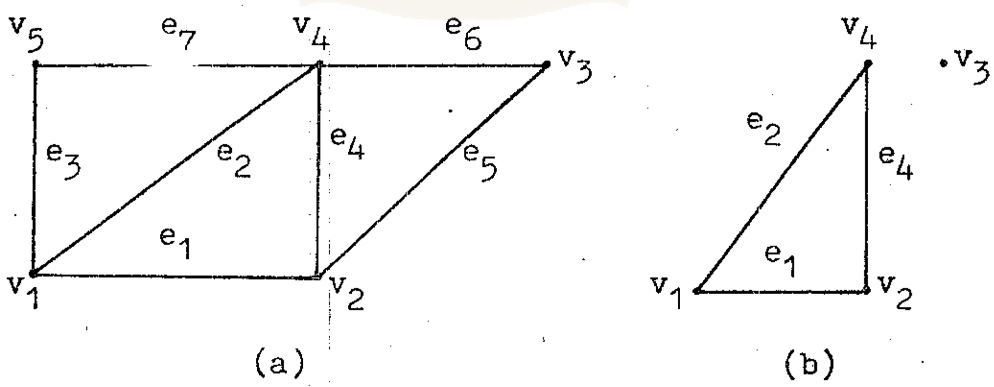
Graph g adalah subgraph dari graph G jika semua titik dan semua garis dari graph g berada dalam graph G. Dalam subgraph, susunan titik-titik dan garis-garis dari graph semula tidak boleh ditukar atau dipin dahkan, juga tidak boleh menambah titik atau garis baru.

Pengertian subgraph sama halnya dengan subset dalam teori himpunan, demikian juga untuk simbolnya.

Pada gambar 2.4.(a) adalah graph G, gambar 2.4.(b) adalah graph g sebagai subgraph dari G.



Gambar 2.3. Graph nol dan graph komplit.



Gambar 2.4. Graph dan subgraphnya.

Lintasan (path) :

Rute perjalanan dari suatu titik ke titik yang lain dalam suatu graph, yang ditunjukkan oleh barisan dari titik dan garis, yang diawali dan diakhiri oleh titik. Setiap anggota barisan berupa garis, selalu menghubungkan dua titik yang dituliskan sebelum dan sesudahnya. Penulisan titik dan garis tidak boleh diulang.

Pada gambar 2.4.(a) misalnya lintasan dari v_1 ke v_3 adalah :

v_1, e_1, v_2, e_5, v_3 atau,

v_1, e_2, v_4, e_6, v_3 atau,

$v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_6, v_3$ dan sebagainya.

Sirkuit (circuit/cycle) :

Suatu lintasan yang titik awal dan titik akhirnya sama, disebut juga lintasan tertutup.

Pada gambar 2.4.(a) terdapat beberapa sirkuit antara lain :

$v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_2, v_1$.

$v_2, e_4, v_4, e_7, v_5, e_3, v_1, e_1, v_2$.

$v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5, e_3, v_1$. dan sebagainya.

2.1.1. Komponen Dan Keterhubungan

Graph G disebut graph terhubung (connected graph) jika :

setiap pasangan titik-titiknya terdapat paling sedikit satu lintasan.

Graph G disebut graph tidak terhubung (disconnected graph) jika :

Sedikitnya terdapat sepasang titik yang tidak dihubungkan oleh suatu lintasan.

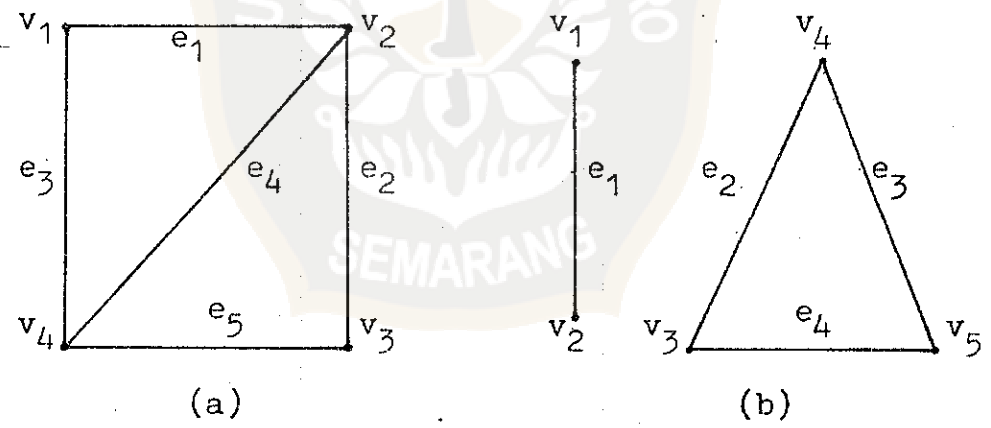
Komponen (component) :

Graph k disebut komponen dari graph G, jika diambil titik v_i yang berada dalam G, maka v_i dan semua titik dalam G yang terhubung dengan v_i, dan semua garis yang menghubungkannya, membentuk suatu subgraph yang disebut komponen.

Komponen dari graph terhubung adalah graph itu sendiri, jadi graph terhubung terdiri dari satu komponen. Dalam graph tidak terhubung, sedikitnya terdiri dari dua subgraph yang terhubung, dan setiap subgraph tersebut disebut komponen, jadi dalam graph tidak terhubung sedikitnya terdiri dari dua komponen.

Gambar 2.5.(a) adalah graph terhubung, juga merupakan suatu komponen.

Gambar 2.5.(b) adalah graph tidak terhubung dengan dua komponen.



Gambar 2.5. Graph terhubung & tidak terhubung.

Theorema 2.1.1.

Graph G adalah graph tidak terhubung jika dan hanya jika himpunan titik V dapat dipisahkan menjadi 2 himpunan titik yaitu V_1 dan V_2 yang masing-masing tidak kosong, dan tidak ada lintasan yang menghubungkan antara titik dalam V_1 dengan titik dalam V_2.

Graph G tidak terhubung $\Leftrightarrow$ tidak terdapat lintasan antara titik a dengan b, untuk $a \in V_1$, $b \in V_2$ dan $V_1 \cup V_2 = V$

Bukti :

($\Leftarrow$) Misalnya diambil titik a,b $\in$ G sedemikian sehingga a $\in V_1$, b $\in V_2$, dan tidak terdapat lintasan diantara titik a dengan b, sehingga terdapat sepasang titik yang tidak mempunyai lintasan, maka G adalah graph yang tidak terhubung.

($\Rightarrow$) Misalnya graph G tidak terhubung, maka bila diambil titik a $\in$ G, dapat ditemukan V_1, yaitu himpunan titik-titik yang tergabung dalam satu komponen dengan titik a. Karena graphnya tidak terhubung, maka masih terdapat titik-titik dalam G yang belum tergabung dengan V_1, misalnya dinamakan V_2. Jadi himpunan titik V dapat dipisahkan menjadi dua himpunan titik V_1 dan V_2, sedemikian hingga tidak ada titik-titik dalam V_1 yang terhubung dengan titik-titik dalam V_2. (terbukti).

Theorema 2.1.2.

Jika dalam G terdapat tepat dua titik yang berderajat ganjil, maka terdapat lintasan diantara dua titik tersebut.

Bukti :

Misalnya graph yang mempunyai tepat dua titik yang berderajat ganjil adalah graph terhubung, maka pasti terdapat lintasan diantara kedua titik tersebut, karena dalam graph terhubung setiap pasangan titiknya minimal terdapat satu lintasan. Untuk selanjutnya akan dibuktikan pada graph tidak terhubung.

Misalnya kedua titik yang berderajat ganjil tersebut adalah v_i dan v_j, karena jumlah derajat suatu komponen selalu genap (yaitu 2 x jumlah garis), maka v_i dan v_j pasti terdapat dalam satu komponen. Karena dalam suatu komponen se tiap pasangan titik-titiknya terdapat satu lintasan, jadi antara v_i dan v_j selalu terdapat suatu lintasan.

Theorema 2.1.3.

Dalam graph sederhana dengan n titik dan k komponen, maksimal terdapat (n-k)(n-k+1)/2 garis.

Bukti :

Bila diberikan graph sederhana G dengan n titik dan k komponen, dan misalnya banyaknya titik dalam setiap komponen adalah $n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots, n_k$. maka ;

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots + n_k = n \text{ dan}$$

$$n_i \geqslant 1, \text{ untuk } i = 1,2,3,\ldots\ldots,k.$$

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i-1) = n - k$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k} (n_i-1)\right]^2 = n^2 - 2nk + k^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-1)$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k} (n_i-1)\right]^2 = \left[(n_1-1) + (n_2-1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n_k-1)\right]^2$$

$$= (n_1-1)^2 + (n_2-1)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n_k-1)^2 + 2\Big[(n_1-1)(n_2-1) + \ldots\ldots\ldots + (n_1-1)(n_k-1) + (n_2-1)(n_3-1) + \qquad + (n_2-1)(n_k-1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (n_{k-1}-1)(n_k-1)\Big]$$

$$= n_1^2 + n_2^2 + \ldots\ldots + n_k^2 - 2(n_1+n_2+\ldots . n_k) + k + 2\Big[(n_1-1)(n_2-1) + \ldots\ldots\ldots (n_1-1)(n_k-1) + (n_2-1)(n_3-1) + \ldots\ldots\ldots (n_2-1)(n_k-1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (n_{k-1}-1)(n_k-1)\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} n_i^2 - 2n + k + C \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}2)$$

dengan $C \geqslant 0$, sebab $n_i - 1 \geqslant 0$, untuk $i = 1,2,3,\ldots\ldots,k$.

Dari persamaan (2-1) dan (2-2) didapat :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 - 2n + k + C = n^2 - 2nk + k^2$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 - 2n + k \leqslant n^2 - 2nk + k^2$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leqslant n^2 - 2nk + k^2 + 2n - k \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}3)$$

Karena banyaknya titik dalam komponen ke i adalah n_i, maka dalam komponen ke i maksimal terdapat $n_i(n_i-1)/2$ garis. Sehingga dalam graph G maksimal terdapat garis sebanyak :

$$\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} (n_i^2 - n_i)$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} n_i^2 - n/2$$

dengan memasukkan persamaan (2-3) didapat :

$$\leqslant \tfrac{1}{2}(n^2 - 2nk + k^2 + 2n - k) - n/2$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}(n^2 - 2nk + k^2 + n - k)$$

$$\leqslant (n-k)(n-k+1)/2 \quad \text{(terbukti).}$$

2.1.2. Tree

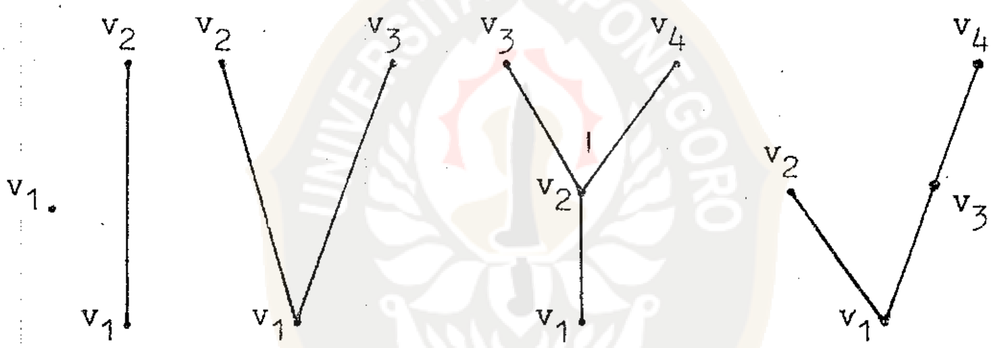
Adalah graph terhubung yang tidak mempunyai sirkuit. Pada gambar 2.6 adalah contoh untuk tree dengan 1,2,3 dan empat titik.

Theorema 2.1.4.

Dalam tree T hanya terdapat satu lintasan pada setiap pasangan titik-titiknya.

Bukti :

Karena tree T merupakan graph terhubung, maka setiap pasangan titik-titiknya paling sedikit terdapat satu lintasan. Andaikan dalam T terdapat titik a dan b yang dihubungkan oleh dua lintasan. Maka dalam T terdapat sirkuit, karena dua lintasan yang menghubungkan sepasang titik akan membentuk sirkuit, sedangkan dalam tree tidak boleh ada sirkuit. Jadi pengandaian salah, yang benar setiap pasangan titik-titiknya hanya mempunyai satu lintasan.



Gambar 2.6. Beberapa tree.

Theorema 2.1.5.

Jika dalam graph G hanya terdapat satu lintasan pada setiap pasangan titik-titiknya, maka G adalah suatu tree.

Bukti :

Jika setiap pasangan titik-titiknya dalam graph G terdapat lintasan, maka G adalah graph terhubung. Karena setiap pasangan titik-titiknya hanya dihubungkan oleh satu lintasan maka G pasti tidak mempunyai sirkuit. Graph yang terhubung dan tidak mempunyai sirkuit adalah suatu tree. Jadi G adalah suatu tree.

Theorema 2.1.6.

Suatu tree dengan n titik mempunyai n-1 garis.

Bukti :

Pada gambar 2.6 diberikan beberapa contoh untuk tree dengan 1,2,3 dan 4 titik, dan berturut-turut terdapat 0,1,2 dan 3 garis. Jadi theorema telah terbukti untuk tree sampai dengan 4 titik, dari asumsi tersebut akan dibuktikan untuk tree dengan n titik.

Andaikan diberikan tree T dengan n titik dan e garis, seperti pada gambar 2.7. Kemudian hapuskan garis e_k, yaitu garis yang menghubungkan titik v_i dengan v_j. menurut theorema 2.1.4 bahwa setiap pasangan titik-titik dalam tree hanya dihubungkan oleh satu lintasan, sehingga T menjadi dua tree, yaitu T_1 dan T_2. Misalnya pada T_1 terdapat n_1 titik dan e_1 garis, pada T_2 terdapat n_2 titik dan e_2 garis dan karena dalam T sudah dihapus satu garis maka :

$$e_1 + e_2 = e - 1 \quad \text{dan} \quad n_1 + n_2 = n$$

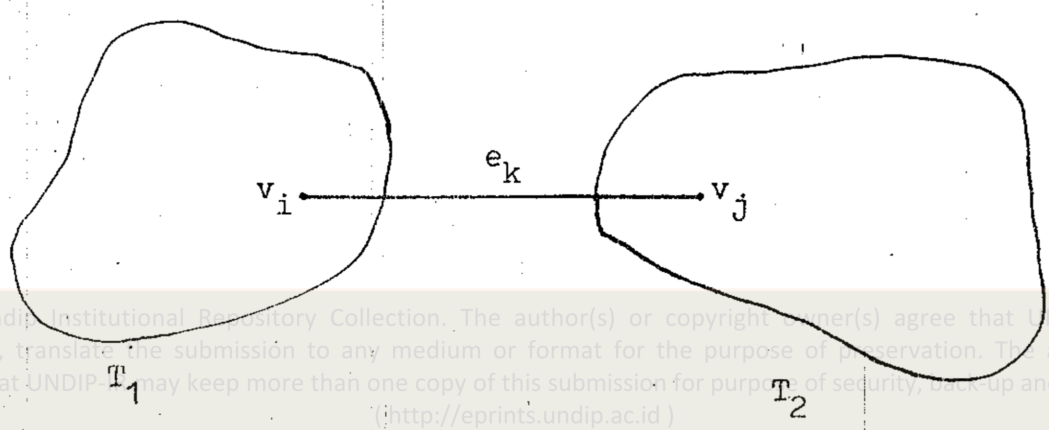
sehingga pada T_1 $\qquad e_1 = n_1 - 1$

pada T_2 $\qquad e_2 = n_2 - 1$ +

$$(e_1 + e_2) = (n_1 + n_2) - 2$$

$$e - 1 = n - 2$$

$$e = n - 1 \quad \text{(terbukti).}$$



Gambar 2.7. Tree T.

Theorema 2.1.7

Graph terhubung dengan n titik dan n-1 garis adalah tree.

Bukti :

Telah diketahui bahwa graph G terhubung, selanjutnya akan dibuktikan bahwa G dengan n titik dan n-1 garis tidak mempunyai sirkuit.

Andaikan G mempunyai satu sirkuit, maka dapat ditemukan suatu garis (misalnya e_k), yang dapat dihapuskan dari G, sedemikian hingga $G-e_k$ adalah terhubung dan tidak mempunyai sirkuit (= tree) dengan n titik dan n-2 garis.

Hal demikian tidak benar menurut theorema 2.1.6. Seharusnya suatu tree dengan n titik mempunyai n-1 garis. Jadi pengandaian salah, yang benar G tidak mempunyai sirkuit sehingga G suatu tree.

Graph terhubung minimal (minimally connected graph) :

Suatu graph terhubung yang mempunyai jumlah garis minimal.

Theorema 2.1.8.

Graph G adalah suatu tree jika dan hanya jika G terhubung minimal.

Bukti :

($\Rightarrow$) Karena tree merupakan graph terhubung yang tidak mempunyai sirkuit, maka tree mempunyai jumlah garis minimal, maksudnya, bila salah satu garis dalam tree tersebut dihapuskan, mengakibatkan tree tersebut tidak terhubung lagi. Sehingga suatu tree merupakan graph terhubung minimal.

($\Leftarrow$) Agar suatu graph terhubung mempunyai jumlah garis minimal, maka graph tersebut harus tidak mempunyai sirkuit, graph terhubung yang tidak mempunyai sirkuit adalah suatu tree, jadi graph terhubung minimal suatu tree.

Theorema 2.1.9.

Graph G dengan n titik, n-1 garis dan tidak mempunyai sirkuit adalah terhubung.

Bukti :

Andaikan graph G dengan n titik, n-1 garis dan tidak mempunyai sirkuit adalah tidak terhubung, maka dalam G dapat ditemukan sedikitnya dua komponen, yang setiap komponennya tidak mempunyai sirkuit.
Misalnya dalam G terdapat dua komponen yaitu T_1 dan T_2, kemudian tambahkan garis e_k yang menghubungkan antara titik v_i dalam T_1 dan titik v_j dalam T_2 (seperti pada gambar 2.8). Karena sebelumnya tidak ada lintasan yang menghubungkan an... titik v_i dan v_j, maka setelah ditambah garis e_k, dalam G tetap tidak terdapat sirkuit. Sehingga $G+e_k$ adalah graph terhubung yang tidak mempunyai sirkuit (= tree) dengan n titik dan n garis.
Hal demikian tidak dibenarkan menurut theorema 2.1.6 seharusnya suatu tree dengan n titik mempunyai n-1 garis.
Jadi pengandaian salah, yang benar G terhubung.

Dari theorema 2.1.4 sampai dengan theorema 2.1.9 dapat disimpulkan bahwa graph G dengan n titik disebut tree jika :

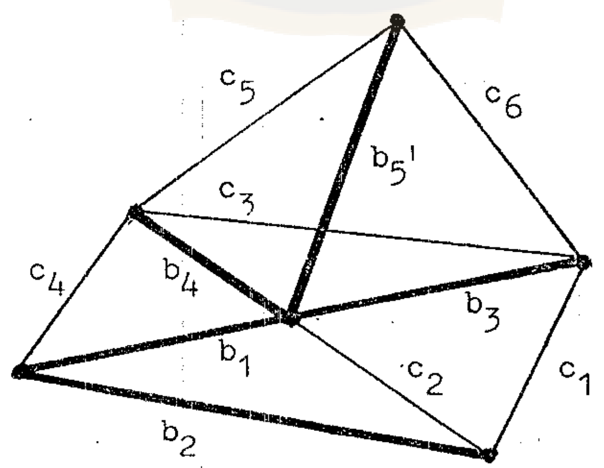
1. G terhubung dan tidak mempunyai sirkuit.
2. G terhubung dan hanya mempunyai n-1 garis.
3. G tidak mempunyai sirkuit dan hanya mempunyai n-1 garis.
4. Setiap pasangan titik dalam G hanya dihubungkan oleh satu lintasan.
5. G adalah graph terhubung minimal.

2.1.3. Spanning Tree Dan Rangkaian Dasar

Spanning tree :

Tree T disebut spanning tree dari graph terhubung G jika T adalah subgraph dari G dan T memuat semua titik dari graph G.

Sebagai contoh diberikan graph seperti pada gambar 2.8 dan spanning treenya ditunjukkan oleh garis yang tebal.



Gambar 2.8. Graph dan spanning treenya.

Suatu spanning tree selalu terhubung, maka dalam graph tidak terhubung dengan n titik, tidak dapat ditemukan spanning tree dengan n titik. Spanning tree dari graph tidak terhubung didapatkan dari setiap komponennya. Suatu komponen yang tidak mempunyai sirkuit merupakan suatu spanning tree. Suatu graph tidak terhubung dengan k komponen terdapat k spanning tree. Kumpulan dari spanning tree yang dihasilkan oleh graph tidak terhubung disebut spanning forest.

Cabang (branch) :

suatu garis dalam graph yang digunakan untuk membangun spanning tree.

Pada gambar 2.8.

garis-garis b_1, b_2, b_3, b_4 dan b_5 merupakan cabang-cabangnya.

Tali (chord) :

Suatu garis yang tidak digunakan untuk membangun spanning tree.

Pada gambar 2.8.

garis-garis c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 dan c_6 merupakan tali-talinya.

Theorema 2.1.10.

Dalam spanning tree dari graph terhubung (dengan n titik dan e garis) terdapat n-1 cabang dan e-n+1 tali.

Bukti :

Karena spanning tree juga suatu tree, maka sifat tree juga berlaku untuk spanning tree.

Dari theorema 2.1.6 dapat diturunkan sifat bahwa dalam spanning tree dari graph terhubung (dengan n titik dan e garis) terdapat n-1 garis sebagai cabang. Karena graph terhubung mempunyai e garis, dan telah digunakan untuk membangun spanning tree sebanyak n-1 garis, maka dalam graph tersebut tersisa sebanyak e-n+1 garis sebagai tali.

Rangkaian dasar (fundamental circuit) :

Suatu sirkuit dalam spanning tree yang dibentuk oleh suatu tali dan suatu lintasan dalam spanning tree. Untuk ..ih jelasnya dapat diterangkan sebagai berikut: Setiap dua titik dalam tree selalu dihubungkan oleh suatu lintasan, sehingga jika ditambahkan satu garis lagi diantara dua titik tersebut, maka lintasannya dan garis tersebut bersama-sama membentuk suatu sirkuit. Demikian juga untuk spanning tree T dari graph terhubung G, bila diantara 2 titik dalam T ditambah dengan satu talinya akan membentuk suatu sirkuit yang disebut rangkaian dasar.

Pada gambar 2.8.

Sebagai contoh rangkaian dasar adalah :

b_1, b_2, c_2.

b_3, b_1, b_2, c_1

tetapi contoh dibawah ini bukan rangkaian dasar yaitu :

c_1, c_2, b_3

b_5, b_1, b_2, c_1, c_6

karena dalam satu rangkaian terdapat lebih dari satu tali. Bila diberikan suatu graph terhubung,kemudian dibuat spanning tree, selanjutnya dapat dicari rangkaian dasarnya, dan kemungkinannya dari suatu tree - dapat ditemukan beberapa rangkaian dasar.

Semua rangkaian dasar yang dapat ditemukan dari suatu spanning tree disebut "himpun rangkaian dasar " (set of fundamental circuit). Banyaknya anggota himpunan rangkaian dasar dari suatu graph , sama dengan banyaknya tali setelah graph tersebut dibuat spanning tree.

Pada gambar 2.8 terdapat 6 tali, maka terdapat 6 rangkaian dasar yaitu :

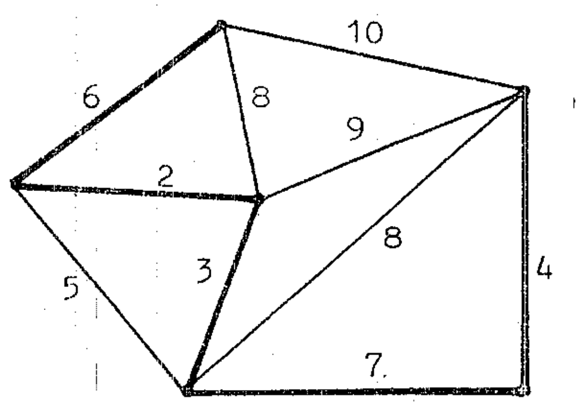
1. b_1, b_2, c_1, b_3
2. b_1, b_2, c_2
3. b_3, b_4, c_3
4. b_1, b_4, c_4
5. b_4, b_5, c_5
6. b_3, b_5, c_6

Spanning tree minimal (minimal spanningtree/shortest spanning tree) :

Jika graph G adalah graph bermuatan (weighted graph) (yaitu jika setiap garis dalam G diberi harga muatan atau jarak yang selalu berharga positip), maka bila dibuat spanning tree T dapat dihitung besarnya muatan dari T, yaitu dengan cara menjumlahkan semua muatan dari cabang-cabangnya.

Spanning tree dengan jumlah muatan minimal disebut spanning tree minimal.

Pada gambar 2.9 diberikan graph bermuatan dan spanning tree minimalnya yang ditunjukkan dengan garis tebal, dengan jumlah muatan 22.



Gambar 2.9. Graph bermuatan dan spanning tree minimalnya.

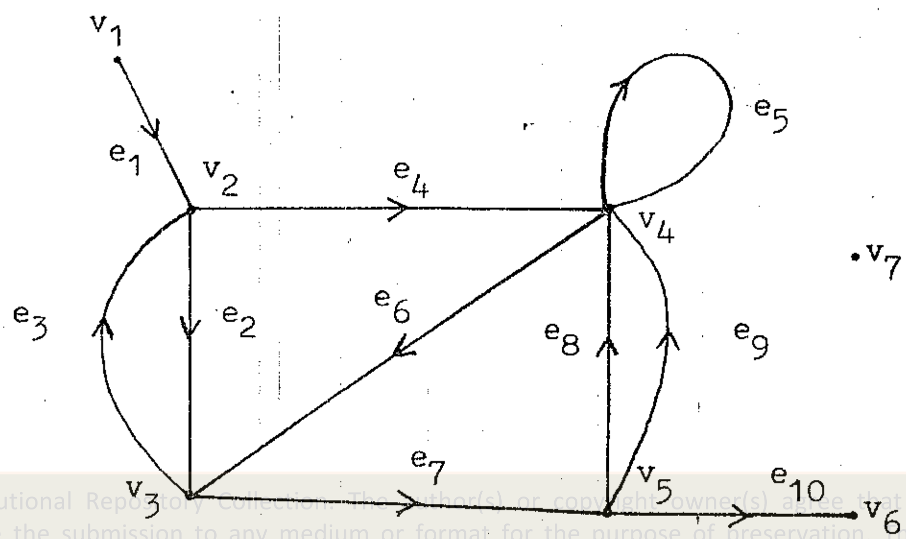
Ada beberapa cara untuk mendapatkan spanning tree minimal salah satu diantaranya adalah dengan cara algoritma Krus kal dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Tentukan garis e_1 yaitu yang bermuatan terkecil, jika ada lebih dari satu, pilih salah satu.
2. Tentukan garis e_2 yang bermuatan terkecil antara $G-e_1$ (yaitu garis yang belum dipilih).
3. Proses diulang sampai mendapatkan spanning tree, dengan syarat yang senantiasa dipenuhi, bahwa garis yang dipilih tidak boleh menghasilkan sirkuit, jika ada lewati garis itu.
4. Spanning tree yang didapatkan bermuatan minimal.

2.2. GRAPH BERARAH (DIRECTED GRAPH / DIGRAPH)

Adalah suatu graph yang setiap garisnya ditentukan arahnya, yaitu berasal dari titik asal (source /initial vertex) menuju titik tujuan (target/terminal vertex). Untuk menunjukkan arah suatu garis diberi tanda anak panah.

Pada gambar 2.10 adalah suatu graph berarah.



Gambar 2.10. Graph berarah.

Berikut ini diberikan beberapa definisi dari graph berarah.

Loop :

Suatu garis yang titik asal dan titik tujuannya sama.

Pada gambar 2.10 garis e_5.

Out degree :

Banyaknya garis yang meninggalkan titik tersebut diberi simbol $d^+(v_i)$.

Pada gambar 2.10.

$d^+(v_1)=1$ $d^+(v_2)=2$ $d^+(v_3)=2$ $d^+(v_4)=2$

$d^+(v_5)=3$ $d^+(v_6)=0$ $d^+(v_7)=0$

$\sum_{i=1}^{7} d^+(v_i)=10$ (= e yaitu banyaknya garis).

In degree :

Banyaknya garis yang menuju titik tersebut diberi simbol $d^-(v_i)$.

Pada gambar 2.10.

$d^-(v_1)=0$ $d^-(v_2)=2$ $d^-(v_3)=2$ $d^-(v_4)=4$

$d^-(v_5)=1$ $d^-(v_6)=1$ $d^-(v_7)=0$

$\sum_{i=1}^{7} d^-(v_i)= 10$ (= e)

untuk graph berarah dengan n titik dan e garis berlaku :

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(v_i) = e \ .$$

Titik terasing (isalated vertex) :

Suatu titik yang mempunyai outdegree = indegree =0. Pada gambar 2.10 adalah titik v_7.

Pendan :

Suatu titik yang mempunyai jumlah degree satu.

$$d^+(v) + d^-(v) = 1 .$$

Pada gambar 2.10 adalah titik v_1 dan v_6 .

Garis paralel (parallel edge) :

Dua garis atau lebih yang bersama-sama meninggalkan suatu titik dan bersama-sama menuju ke suatu titik yang lain.

Pada gambar 2.10.

Garis e_8 dan e_9 adalah garis paralel.

Garis e_2 dan e_3 bukan garis paralel.

Graph berarah sederhana (simple digraph) :

Graph berarah yang tidak mempunyai loop dan garis paralel.

Sebagai contoh ditunjukkan pada gambar 2.12.

Graph berarah simetris (symmetric digraph) :

Jika dalam graph berarah mempunyai garis (a,b) (yaitu garis dari titik a ke b), maka juga mempunyai garis (b,a).

Graph berarah asimetris (asymmetric digraph) :

Graph berarah yang setiap pasangan titiknya dihubungkan paling banyak oleh satu garis.

Graph berarah komplit simetris (complete symmetric digraph) :

Graph berarah simetris yang setiap titiknya dihubungkan dengan semua titik yang lain.

Dalam graph berarah komplit simetris dengan n titik, mempunyai n(n-1) garis.

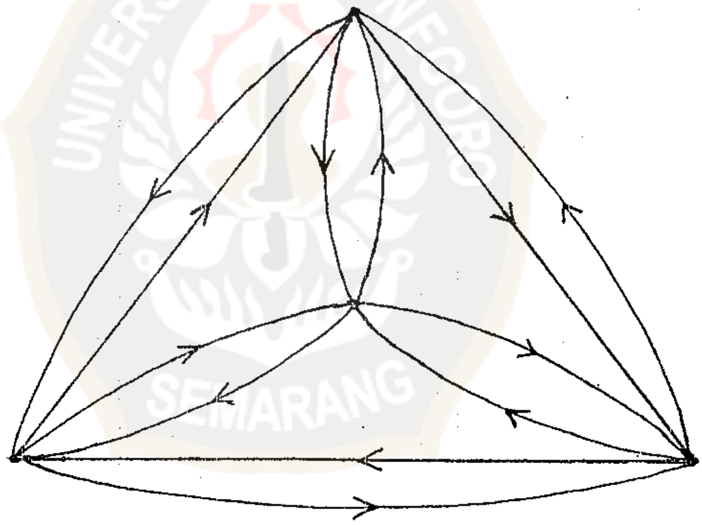
Sebagai contoh diberikan pada gambar 2.11.

Graph berarah komplit asimetris (Complete asymmetric-digraph).

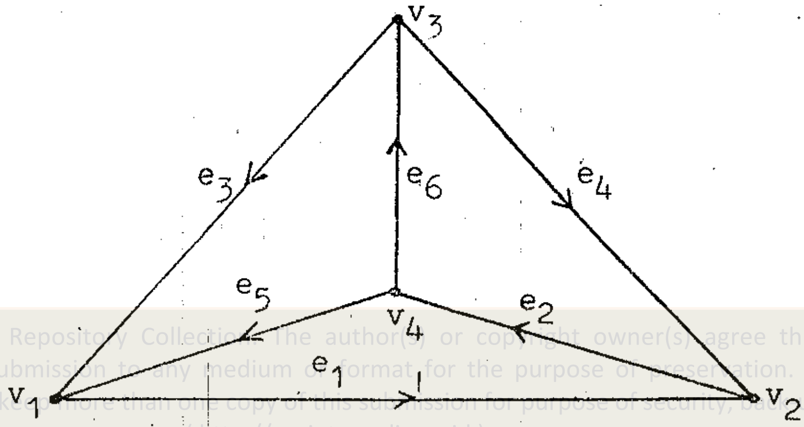
Graph berarah asimetris yang setiap titiknya dihubungkan dengan semua titik yang lain.

Dalam graph berarah komplit asimetris dengan n titik mempunyai n(n-1)/2 garis .

Sebagai contoh diberikan pada gambar 2.12.



Gambar 2.11. Graph berarah komplit simetris.



Gambar 2.12. Graph berarah komplit asimetris.

2.2.1. Lintasan Dan Keterhubungan

Lintasan dalam graph berarah pada dasarnya sama dengan lintasan dalam graph tidak berarah, karena dalam graph berarah setiap garisnya mempunyai arah, maka lintasannya dapat dibedakan menjadi dua macam yaitu lintasan searah (directed path) dan semi lintasan (semi path).

Lintasan searah (directed path) :

Suatu lintasan yang ditunjukkan sesuai dengan arah dari garis-garisnya.

Sebagai contoh pada gambar 2.10 misalnya lintasan searah dari titik v_1 ke v_6 adalah :

$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_5, e_{10}, v_6$

Semi lintasan (semi path) :

Suatu lintasan yang bukan lintasan searah.

Sebagai contoh pada gambar 2.10 misalnya semi lintasan dari titik v_1 ke titik v_6 adalah :

$v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_8, v_5, e_{10}, v_6$

Dengan adanya dua macam lintasan dalam graph berarah, akibatnya terdapat dua macam sirkuit dan dua macam graph terhubung berarah dan juga dua macam komponen, yaitu :

Sirkuit searah (directed circuit) :

Lintasan searah yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama.

Pada gambar 2.10.

lintasan $v_2, e_4, v_4, e_6, v_3, e_3, v_2$ adalah sirkuit searah

Semi sirkuit (semi circuit) :

Semi lintasan yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama.

Pada gambar 2.10.

lintasan $v_2, e_4, v_4, e_6, v_3, e_2, v_2$ adalah semi sirkuit.

Terhubung kuat (strongly connected) :

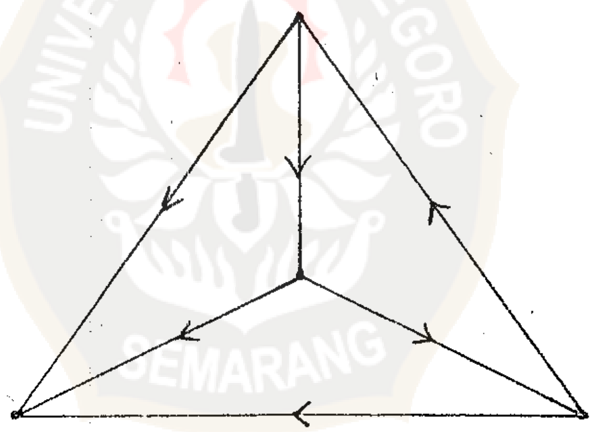
Jika sedikitnya terdapat satu lintasan searah dari setiap titik ke setiap titik yang lain.

Sebagai contoh diberikan pada gambar 2.12.

Terhubung lemah (weakly connected) :

Jika terhubung tetapi tidak terhubung kuat.

Sebagai contoh diberikan pada gambar 2.13.



Gambar 2.13. Graph berarah terhubung lemah.

Komponen kuat (strongly component) :

Subgraph terhubung kuat yang maksimal dari suatu graph berarah.

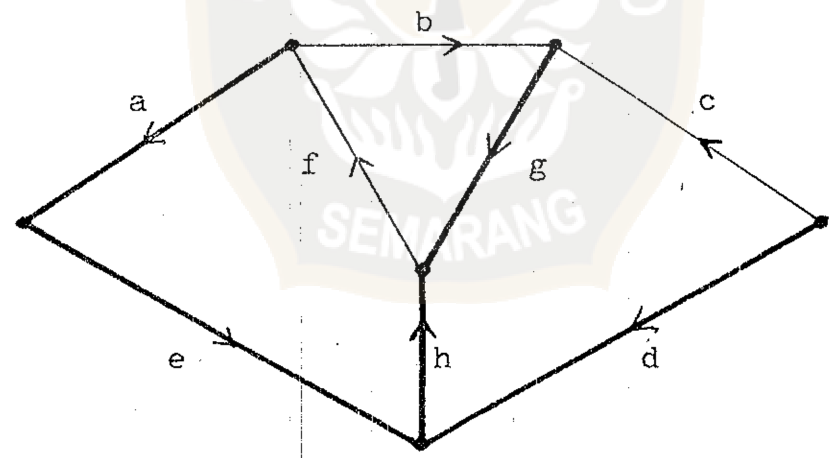
Komponen lemah (weakly component) :

Subgraph terhubung lemah yang maksimal dari suatu graph berarah.

2.2.2. Tree, Spanning Tree Dan Rangkaian Dasar

Tree dari graph berarah analog dengan tree dari graph tidak berarah, yaitu terhubung dan tidak mempunyai sirkuit, baik sirkuit searah maupun semi sirkuit. Demikian juga untuk sifat-sifat yang lainnya, misalnya dalam tree dari graph tidak berarah dengan n titik terdapat n-1 garis, maka dalam tree dari graph berarah juga demikian.

Persamaan sifat-sifat dalam tree tersebut, berlaku juga untuk spanning tree dan rangkaian dasar. Karena dalam graph berarah terdapat sirkuit searah dan semisirkuit maka anggauta dari himpunan rangkaian dasar yang dihasilkan kemungkinannya berbentuk dua macam sirkuit tersebut. Pada gambar 2.14 diberikan graph berarah dan spanning treenya ditunjukkan dengan garis yang tebal (a,e,d,h,g).



Gambar 2.14. Graph berarah & spanning treenya.

Himpunan rangkaian dasar dari graph berarah yang ditunjukkan pada gambar 2.14 adalah sebagai berikut :

a,e,h,f (sirkuit searah).

a,e,h,g,b (semi sirkuit).

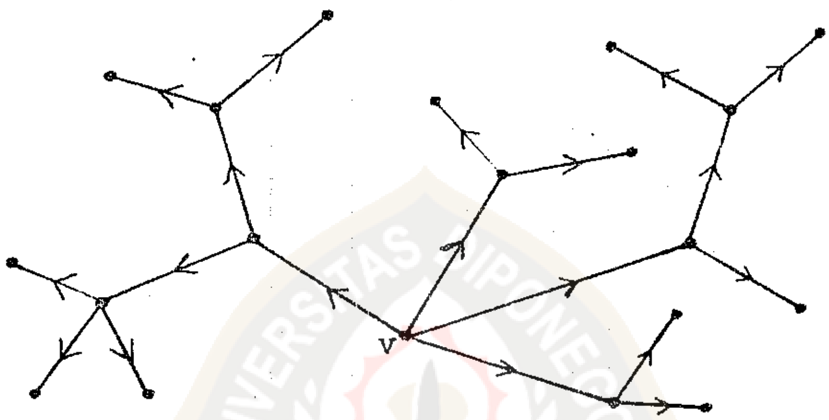
d,h,g,c (semi sirkuit).

Arborescence :

Graph G disebut arborescence jika :

1. G tidak mempunyai sirkuit.
2. Dalam G hanya terdapat satu titik (v) dengan indegree nol, titik v disebut titik akar (root).

Sebagai contoh diberikan pada gambar 2.15.



Gambar 2.15. Arborescence.

Theorema 2.2.1.

Suatu arborescence adalah suatu tree yang setiap titiknya kecuali titik akar mempunyai indegree tepat satu.

Bukti :

Arborescence G dengan n titik mempunyai n-1 garis karena kondisi satu dan dua, sehingga jumlah semua indegree dalam G adalah :

$$d^-(v_1) + d^-(v_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + d^-(v_n) = n-1$$

menurut kondisi dua, hanya ada satu titik dengan indegree nol dan semua titik yang lain (yaitu n-1 titik) dengan indegree positip dengan jumlah indegree n-1, jadi setiap titiknya mempunyai indegree tepat satu.

Karena G mempunyai n-1 garis dan tidak mempunyai sirkuit maka G terhubung, jadi G suatu tree.