BAB II

TEOREMA PENDUKUNG

II.1. TEOREMA EULER

Bila garis-garis kelengkungan sebuah permukaan dinyatakan dalam kurva parametrik, maka persamaan differensial garis kelengkungan :

$$(EM-LF)du^2 + (EN-LG)dudv + (FN-GM)dv^2 = 0 \quad \ldots.(2.1)$$

menjadi identik dengan persamaan kurva parametrik :

$$dudv = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.2)$$

sehingga didapat :

$$EM - FL = 0 \quad , \quad FN - GM = 0 \quad \ldots.. (2.3)$$

dan $EN - GL \neq 0$ ....(2.4)

dari (2.4) didapat :

$$\left.\begin{array}{l}(EN - GL)\, M = 0 \\ (EN - GL)\, N = 0\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.5)$$

Karena koeffisien F dan M tidak hilang maka

$$F = 0 \quad \text{dan} \quad M = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(2.6).$$

Ini merupakan syarat perlu dan cukup untuk kurva parametrik menjadi garis kelengkungan.

Syarat F = o menyatakan sifat orthogonal dipenuhi oleh semua garis-garis kelengkungan.

Sedangkan syarat M = 0 menyatakan bahwa kurva parametrik menyatakan sistem persekawanan.

Sekarang akan dibuktikan Teorema Euler yang menyatakan bahwa :

$$Kn = k_a \cos^2 \psi + k_b \sin^2 \psi$$

Bukti :

Misalkan garis -garis kelengkungan merupakan kurva parametrik sehingga $F = M = 0$.
Kelengkungan pertama k_a merupakan kelengkungan normal untuk arah $dv = 0$. Dengan persamaan kelengkungan :

$$Kn = \frac{L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2} \qquad \text{........(2.7).}$$

maka didapat :

$$k_a = \frac{L}{E}$$

begitu pula hubungan kelengkungan utama untuk yang arah $du = 0$ adalah

$$k_b = \frac{N}{G}$$

Misalkan sebuah normal bagian permukaan yang mempunyai arah du dan dv , membuat sudut dengan arah utama $dv = 0$.
Maka persamaan arah

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds} \right)$$

$$\sin\psi = \frac{H}{\sqrt{E}} \left|\frac{dv}{ds}\right|$$

dimana $H = \sqrt{EG - F^2}$
dan $F = 0$, maka didapat :

$$\cos\psi = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds}$$

$$\sin\psi = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}$$

Sehingga kelengkungan Kn pada bagian normal ini dengan persamaan (2.7) didapat :

$$Kn = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$= \frac{L}{E}\cos^2\psi + \frac{N}{G}\sin^2\psi$$

sehingga

$$Kn = k_a \cos^2\psi + k_b \sin^2\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.8).$$

Maka terbuktilah teorema Euler pada kelengkungan normal. Akibat langsung yang penting dari teorema ini adalah teorema Dupin , yang menyatakan bahwa jumlah kelengkungan normal dalam dua arah pada sudut siku-siku adalah konstan dan sama dengan jumlah kelengkungan utamanya.

II.2. FORMULA GAUSS UNTUK $\bar{r}_{11}$, $\bar{r}_{12}$, $\bar{r}_{22}$.

Turunan ke dua dari $\bar{r}$ pada parameter dapat dinyatakan dalam bentuk $\bar{n}$, $\bar{r}_1$ dan $\bar{r}_2$ sebagai berikut :

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_{11} &= L\bar{n} + \ell\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2. \\ \bar{r}_{12} &= M\bar{n} + m\bar{r}_1 + \mu\bar{r}_2. \\ \bar{r}_{22} &= N\bar{n} + n\bar{r}_1 + \nu\bar{r}_2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(2.9).$$

dimana L , M dan N merupakan besaran-besaran order kedua dan harga dari koeffisien-koeffisien ℓ, m, n, λ, μ dan ν yang dikenal dengan nama simbol-simbol christoffel dapat dicari dengan cara sebagai berikut :

$$\bar{r}_{11} = L\,\bar{n} + \ell\,\bar{r}_1 + \lambda\,\bar{r}_2$$

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_{11} = \ell E + \lambda F.$$

telah diketahui :

$$E = \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_1$$

$$E_1 = 2\,\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_{11}$$

sehingga didapat persamaan :

$$\ell E + \lambda F = \frac{1}{2} E_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.10)$$

$$\bar{r}_2 \cdot \bar{r}_{11} = \ell F + \lambda G$$

$$F = \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2$$

$$F_1 = \bar{r}_{11} \cdot \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_{21}$$

$$\bar{r}_2 \cdot \bar{r}_{11} = F_1 - \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_{21}$$

$$\bar{r}_2 \cdot \bar{r}_{11} = F_1 - \frac{1}{2} E_2$$

didapat persamaan :

$$\ell F + \lambda G = F_1 - \frac{1}{2} E_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.11)$$

Eliminasi persamaan (2.10),(2.11) didapat :

$$\ell = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} E_1 & F \\ F_1 - \frac{1}{2} E_2 & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{GE_1 - 2FF_1 + FE_2}{2 (EG - F^2)}$$

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} E & \frac{1}{2} E_1 \\ F & F_1 - \frac{1}{2} E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{2 EF_1 - EF_2 - FE_1}{2 (EG - F^2)}$$

Dari persamaan (2.9)

$$\bar{r}_{12} = M \bar{n} + m \bar{r}_1 + \mu \bar{r}_2$$

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_{12} = m E + \mu F$$

$$E = \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_1$$

$$E_2 = 2 \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_{12}$$

didapat persamaan :

$$E + \mu F = \frac{1}{2} E_2 \qquad \text{.....................} (2.12)$$

$$\bar{r}_2 \cdot \bar{r}_{12} = m F + \mu G$$

$$G = \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_2$$

$$G_1 = 2\, \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_{12}$$

didapat persamaan :

$$m\, F + \mu\, G = \frac{1}{2} G_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.13).$$

Eliminasi persamaan (2.12),(2.13) diperoleh :

$$m = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} E_2 & F \\ \frac{1}{2} G_1 & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{G E_2 - F G_1}{2\,(EG - F^2)}$$

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} E & \frac{1}{2} E_2 \\ F & \frac{1}{2} G_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{E G_1 - F E_2}{2\,(EG - F^2)}$$

Dari persamaan (2.9)

$$\bar{r}_{22} = N\, \bar{n} + n\, \bar{r}_1 + \nu\, \bar{r}_2$$

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_{22} = n\, E + \nu F$$

$$F = \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2$$

$$F_2 = \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_{22} + \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_{12}$$

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_{22} = F_2 - \tfrac{1}{2} G_1$$

didapat persamaan :

$$\eta E + \vartheta F = F_2 - \tfrac{1}{2} G_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.14)$$

$$\bar{r}_2 \cdot \bar{r}_{22} = \eta F + \vartheta G$$

$$G = \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_2$$

$$G_2 = 2\, \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_{22}$$

didapat persamaan :

$$F + \vartheta G = \tfrac{1}{2} G_2 \qquad \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots (2.15)$$

Eliminasi persamaan (2.14),(2.15) diperoleh :

$$\eta = \frac{\begin{vmatrix} F_2 - \frac{1}{2} G_1 & F \\ \frac{1}{2} G_2 & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{2\, GF_2 - GG_1 - FG_2}{2\,(EG - F^2)}$$

$$\vartheta = \frac{\begin{vmatrix} E & F_2 - \frac{1}{2} G_1 \\ F & \frac{1}{2} G_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{EG_2 - 2FF_2 + FG_1}{2\,(EG - F^2)}$$

II.3. HUBUNGAN MINARDI - CODAZZI.

Dengan memperluas teorema Gauss, didapat dua hubungan yang independent antara besaran-besaran dasar dan alternatifnya.
Hal ini dapat diperlihatkan sebagai berikut, jika pada persamaan identitas :

$$\frac{\partial}{\partial v}\bar{r}_{11} = \frac{\partial}{\partial u}\bar{r}_{12}$$

substitusi harga-harga $\bar{r}_{11}$ dan $\bar{r}_{12}$ dari persamaan (2.9) diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(L\bar{n} + \ell\,\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(M\bar{n} + m\,\bar{r}_1 + \mu\bar{r}_2 \right).$$

$$L_2\,\bar{n} + \bar{n}_2\,L + \ell_2\,\bar{r}_1 + \ell\,\bar{r}_{12} + \lambda_2\,\bar{r}_2 + \lambda\,\bar{r}_{22} =$$

$$M_1\,\bar{n} + \bar{n}_1\,M + m_1\,\bar{r}_1 + m\,\bar{r}_{11} + \mu_1\,\bar{r}_2 + \mu\,\bar{r}_{21} \quad ..(2.16)$$

Bila persamaan(2.16)digandakan dengan normal satuan $\bar{n}$, dimana $\bar{n}\perp\bar{r}_1$ dan $\bar{n}\perp\bar{r}_2$, didapat :

$$L_2 + \ell M + \lambda N = M_1 + m L + \mu M$$

$$L_2 - M_1 = m L - (\ell - \mu) M - \lambda N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.17)$$

Dengan cara yang sama, didapat untuk persamaan identitas :

$$\frac{\partial}{\partial v}\bar{r}_{12} = \frac{\partial}{\partial u}\bar{r}_{22}$$

substitusi harga-harga $\bar{r}_{12}$ dan $\bar{r}_{22}$ dari persamaan (2.9) diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(M\bar{n} + m\bar{r}_1 + \mu\,\bar{r}_2 \right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(N\bar{n} + n\bar{r}_1 + \nu\,\bar{r}_{22} \right)$$

$$M_2 \quad \bar{n} + \bar{n}_2 \quad M + m_2\,\bar{r}_1 + m \quad \bar{r}_{12} + \mu_2\,\bar{r}_2 + \mu \quad \bar{r}_{22} =$$

$$N_1\,\bar{n} + N\,\bar{n}_1 + n_1\,\bar{r}_1 + n\,\bar{r}_{11} + \nu_1\,r_2 + \nu\,\bar{r}_{12} \qquad ..(2.18)$$

Bila persamaan(2.18)digandakan dengan normal satuan $\bar{n}$, dimana $\bar{n}\perp\bar{r}_1$ dan $\bar{n}\perp\bar{r}_2$ maka didapat :

$$M_2 + m\,M + \mu\,N = N_1 + n\,L + \nu\,M$$

$$M_2 - N_1 = n\,L - (\,m - \nu\,)\,M - \mu\,N \qquad ....(2.19).$$

Persamaan (2.17)&(2.19) sering disebut persamaan Codazzi , tetapi Minardi telah menemukan hal yang sama 12 tahun lebih dahulu dari Codazzi.
Sehingga akhirnya persamaan (2.17)&(2,19) dikenal dengan hubungan Minardi - Codazzi.

II.4. TORSI GEODESIK.

Bila $\bar{r}$ sebuah titik pada geodesik , $\bar{r}'$ satuan tangen dan normal utama adalah normal unit $\bar{n}$ ke permukaan , maka unit binormal adalah :

$$\bar{b} = \bar{r}' \times \bar{n} \,.$$

Differensial terhadap panjang busur memberikan torsi geodesik :

$$-\tau\,\bar{n} = \bar{r}'' \times \bar{n} + \bar{r}' \times \bar{n}'$$

Suku pertama dalam ruas kedua sama dengan nol karena $\bar{r}''$ sejajar dengan $\bar{n}$ sehingga

$$\tau\bar{n} = \bar{n}' \times \bar{r}' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.20)$$

maka $$\tau = [\bar{n}, \bar{n}', \bar{r}'] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.21)$$

Geodesik yang menyinggung sebuah kurva pada titik sebarang disebut garis singgung geodesik pada titik tersebut.

Selanjutnya bentuk $[\bar{n}, \bar{n}', \bar{r}']$ hilang , karena merupakan arah utama.

Akibatnya , torsi sebuah geodesik hilang bila menyinggung sebuah garis kelengkungan.

Dari $\tau = [\bar{n}, \bar{n}', \bar{r}']$ dapat diexpansikan dengan menuliskan :

$$\bar{n}' = \bar{n}_1 \cdot u' + \bar{n}_2 \cdot v'$$

$$\bar{r}' = \bar{r}_1 \cdot u' + \bar{r}_2 \cdot v'$$

Sehingga didapat :

$$[\bar{n},\bar{n}_1,\bar{r}_1]du^2 + \left\{[\bar{n},\bar{n}_1,\bar{r}_2] + [n,n_2,r_1]\right\}dudv + [n,n_2,r_2]dv^2=0$$

Dan persamaan torsi sebuah geodesik menjadi :

$$\tau = \frac{1}{H}\left\{(EM-FL)u'^2 + (EN-GL)u'v' + (FN-GM)v'^2\right\} \quad .(2.22).$$

Persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk inclinasi geodesik terhadap arah utama. Bila garis kelengkungan diambil sebagai kurva parameter maka :

$$F = M = 0$$

$$H^2 = EG$$

Dan persamaan (2.22) menjadi :

$$\tau = \sqrt{EG}\ u'\ v'\ \left(\frac{N}{G} - \frac{L}{E}\right).$$

Tetapi bila β merupakan inclinasi geodesik kelengku ngan ke $v = c$ maka,

$$\sqrt{E}\ u' = \cos\beta$$

$$\sqrt{G}\ v' = \sin\beta$$

Begitu pula kelengkungan utamanya adalah

$$k_a = \frac{L}{E} \qquad\qquad k_b = \frac{N}{G}$$

Sehingga persamaan torsi geodesik menjadi :

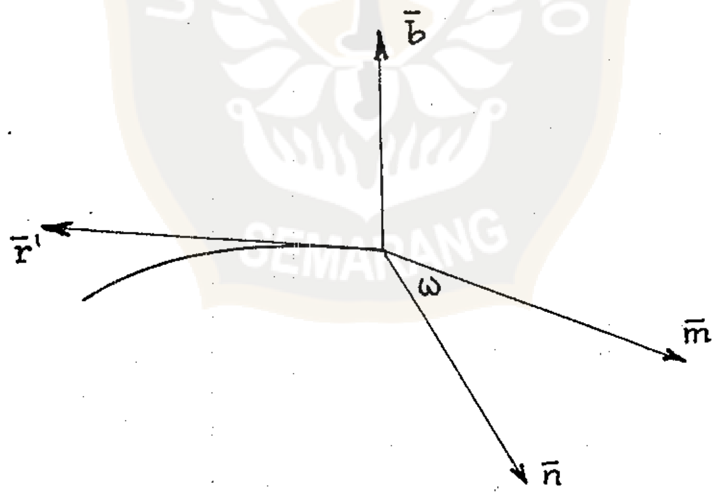
$$\tau = \cos\beta \cdot \sin\beta\ (k_b - k_a).$$

II.5. TEOREMA BONNET.

Misalkan C merupakan kurva sebarang pada permukaan , $\bar{r}'$ merupakan garis singgung satuan , $\bar{n}$ merupakan normal utama , τ merupakan torsi dan W merupakan torsi garis singgung geodesik pada titik yang diketahui .

Didefinisikan sudut normal ω sebagai sudut dari normal utama $\bar{n}$ ke normal permukaan $\bar{m}$.

ω positip bila sudut dihitung dengan pemutaran dari $\bar{n}$ ke $\bar{m}$ yaitu sama dengan dari $\bar{n}$ ke binormal $\bar{b}$ dan akan negatip bila dalam arah yang berlawanan.



Maka untuk setiap titik sebarang pada kurva , besaran besaran ini dihubungkan dengan persamaan ;

$$\frac{d\omega}{ds} + \tau = W \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.23)$$

Ini dapat dibuktikan sebagai berikut, dengan menggunakan persamaan(2.20) didapat :

$$W\,\bar{m} = \bar{m}' \times \bar{r}'$$

Satuan binormal ke satuan kurva adalah :

$$\bar{b} = \bar{r}' \times \bar{n}$$

dan $\cos \omega = \bar{n} \cdot \bar{m}$ ....(2.24)

$$\sin \omega = \bar{b} \cdot \bar{m} \qquad \text{............(2.25)}$$

Dengan mendefferensialkan(2.25)didapat :

$$\cos \omega \frac{d\omega}{ds} = \bar{b}' \cdot \bar{m} + \bar{b} \cdot \bar{m}'$$

$$= -\tau \bar{n} \cdot \bar{m} + \bar{r}' \times \bar{n} \cdot \bar{m}'$$

$$= -\tau \cos \omega + W \bar{m} \cdot \bar{n}$$

$$= (- \tau + W) \cos \omega$$

sehingga :

$$\frac{d\omega}{ds} + \tau = W.$$

Karena W merupakan torsi garis singgung geodesik maka dapat dikatakan bahwa $\left(\frac{d\omega}{ds} + \tau \right)$ mempunyai nilai sama untuk semua kurva yang menyinggung pada titik yang diketahui. Rumusan ini dikenal sebagai teorema Bonnet.

II.6. TEOREMA JOACHIMSTHAL.

a. Bila sebuah kurva pada sebuah permukaan mempunyai dua sifat dibawah ini , maka ia juga mempunyai sifat yang ketiga.

Sifat - sifat tersebut adalah :

i. Ia merupakan sebuah garis kelengkungan.

ii. Ia merupakan kurva bidang.

iii. Sudut normalnya konstan.

Bukti :

Bila sebuah kurva C pada permukaan merupakan sebuah kurva bidang dan sebuah garis kelengkungan , yang berarti $\tau = 0$ dan $W = 0$ maka dengan :

$$\frac{d\omega}{ds} + \tau = W \quad \text{didapat} \quad W' = 0$$

Akibatnya bidangnya memotong permukaan pada sebuah sudut tetap.

Sebaliknya bila sebuah bidang memotong pada sebuah sudut tetap, kurva perpotongannya mempunyai $\tau = 0$. Sehingga $\tau = 0$ dan $W' = 0$. Maka sesuai dengan persamaan (2.23) W hilang, yang menunjukkan bahwa kurva tersebut sebuah garis kelengkungan.

Begitu pula bila $W = C$ dan kurva merupakan sebuah garis kelengkungan maka τ hilang dan kurva merupakan sebuah bidang.

b. Bila kurva perpotongan dua permukaan sebuah garis kelengkungan pada satu sama lain , permukaan - permukaan memotong pada sudut tetap.

Bukti :

Misalkan ω dan ω_o adalah sudut normal kurva untuk kedua permukaan.

Karena torsi W merupakan torsi garis singgung geodesik, maka $W = 0$ pada kedua permukaan yang dapat dituliskan sebagai :

$$\frac{d\omega}{ds} + \tau = 0$$

$$\frac{d\omega_o}{ds} + \tau = 0$$

sehingga

$$\frac{d}{ds}\,(\omega - \omega_o) = 0$$

jadi $\omega - \omega_o =$ konstan.

c. Bila dua permukaan berpotongan dengan sebuah sudut tetap , dan kurva perpotongannya merupakan sebuah garis kelengkungan pada salah satu permukaan , maka ia merupakan garis kelengkungan pada kurva yang lain.

Bukti :

$\omega - \omega_o =$ konstan

maka

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{d\omega_o}{ds}$$

Bila W dan W_o merupakan torsi dari garis singgung geodesik pada sebuah permukaan , maka dengan

$$\frac{d\omega}{ds} + \tau = W$$

didapat : $W - \tau = W_o - \tau$

sehingga : $W = W_o$

Bila $W = 0$, karena W merupakan torsi garis singgung geodesik , maka $W_o = 0$ pula .

Ini menunjukkan bahwa kurva merupakan sebuah garis kelengkungan pada kedua kurva permukaan.

II.7. KELENGKUNGAN GEODESIK.

Misalkan kurva sebarang C pada sebuah permukaan didefinisikan kelengkungan geodesik kurva pada sebuah titik P sebagai kelengkungan relatif terhadap geodesik yang menyinggung pada P .

Bila vektor kelengkungan kurva adalah $\bar{r}$, maka bagian $\bar{r}''$ yang searah dengan normal permukaan adalah

$$\bar{n} \cdot \bar{r}''$$

Sehingga kelengkungan vektor geodesik adalah normal permukaan dan besarnya kn .

Jadi kelengkungan geodesik adalah bagian normal kelengkungan vektor C .

Sehingga kelengkungan C relatif ke geodesik adalah bagian garis singgung ke permukaan. Sehingga kadang-kadang disebut sebagai kelengkungan garis singgung atau tangensial kelengkungan C . Tapi lebih umum disebut sebagai kelengkungan geodesik.

Sebagai sebuah vektor diberikan sebagai :

$$\bar{r}'' - \bar{n} \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{n} \text{ atau } \bar{r}'' - kn\,\bar{n} \qquad \ldots\ldots (2.26)$$

Besarannya harus dianggap positip bila deviasi C dari garis singgung geodesik adalah positip untuk putaran dari normal ke permukaan. Sehingga harus diambil arah satuan vektor

$$\bar{n} \times \bar{r}' \quad \text{untuk} \quad \bar{r}''$$

Sehingga besar kelengkungan geodesik adalah :

$$\bar{n} \times \bar{r}' \cdot \bar{r}''$$

yang dinyatakan dalam

$$k_g = \left[\bar{n} , \bar{r}' , \bar{r}'' \right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.27)$$

dapat pula ditulis

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_1 \times \bar{r}_2}{H}$$

maka

$$\left[\bar{n} , \bar{r}' , \bar{r}'' \right] = \frac{1}{H} (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2) \times \bar{r}' \cdot \bar{r}''$$

$$= \frac{1}{H} (\bar{r}_1 \cdot \bar{r}'\bar{r}_2 - \bar{r}_2 \cdot \bar{r}'\bar{r}_1) \bar{r}''$$

Sehingga :

$$k_g = \frac{1}{H} (\bar{r}_1 \cdot \bar{r}'\bar{r}_2 \cdot \bar{r}'' - \bar{r}_2 \cdot \bar{r}'\bar{r}_1 \cdot \bar{r}'') \quad \ldots(2.28)$$

Dari argumen diatas jelaslah bila k merupakan kelengkungan kurva C dan ω merupakan sudut normal sebarang.

$$k_g = k \sin \omega$$

$$k_n = k \cos \omega$$

akibatnya :

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2$$

$$k_g = k_n \ \mathrm{tg}\, \omega$$

Semua bentuk k_g hilang apabila C merupakan sebuah geodesik . Karena $\bar{r}''$ menjadi sejajar dengan $\bar{n}$ akibatnya tegaklurus dengan $\bar{r}_1$ dan $\bar{r}_2$ dan $\omega = 0$. Ini berarti bahwa kelengkungan sebuah geodesik relatif terhadap dirinya sendiri adalah nol.