BAB III
I N T E G R A L

3.1. FUNGSI SEDERHANA DAN INTEGRALNYA.

Semesta pembicaraan adalah ruang ukuran (X,S,μ).

3.1.1. Definisi.

Suatu fungsi bernilai riil adalah sederhana, jika hanya mempunyai suatu nilai-nilai yang banyaknya berhingga.

Suatu fungsi sederhana dapat ukur , didefinisikan dengan : $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j X_{E_j}$ ......(3.1.1.).

dengan $a_j \in R$, $j = 1,2,3, \ldots n$

dan X_{E_j} merupakan fungsi karakteristik dari suatu himpunan E_j pada σ-aljabar S.

dengan $X_{E_j} = 1,\ x \in E_j,\ j = 1,2,3, \ldots n.$

$= 0,\ x \notin E_j,\ j = 1,2,3, \ldots n.$

Jika $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ adalah nilai-nilai dari φ yang berlainan dan jika $E_j = \{ x \in X / \varphi(x) = a_j \}$, $j = 1,2, \ldots n$ maka E_j adalah himpunan saling asing dan $X = \bigsqcup E_j$, $j = 1,2,3, \ldots n$.

Karena a_j berlainan dan E_j saling asing, $j = 1,2, \ldots n$ sehingga φ adalah suatu pernyataan Standard Karakteristik Tunggal.

3.1.2. Definisi.

Diberikan $\varphi \in M^+(X,S)$ adalah fungsi sederhana.

Dengan menggunakan pernyataan (3.1.1.), didefinisikan Integral φ terhadap μ adalah bilangan riil yang diperluas.

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \ \mu(E_j) \qquad \text{......(3.1.2.).}$$

dengan $a_j \geqslant 0$, $j = 1,2, \ldots n$

dan $\mu(E_j) \geqslant 0$, $j = 1,2, \ldots n$.

Dalam bentuk (3.1.2.) tercakup perjanjian bahwa $0\ (+\infty) = 0$.

Sehingga integral dari fungsi yang identik nol adalah sama dengan nol, tanpa memandang ruang mempunyai ukuran berhingga atau tak hingga.

Contoh 1.

Diketahui : $\varphi(x) \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1 \\ 3, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

Ditanyakan : $\int \varphi(x)\, d\mu(x)$.

Penyelesaian :
$$\begin{aligned} \int \varphi(x)\, d\mu(x) &= \sum_{j=1}^{2} a_j\ \mu(E_j). \\ &= a_1\ \mu(E_1) + a_2\ \mu(E_2) \\ &= 1\ (1 - 0) + 3\ (2 - 1) \\ &= 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ &= 1 + 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Contoh 2.

Diketahui : $\varphi(x) \begin{cases} 1, & 0 < x < 3 \\ 4, & 3 \leqslant x < 5 \end{cases}$

Ditanyakan : $\int \varphi(x)\, d\mu(x)$.

Penyelesaian :
$$\begin{aligned} \int \varphi(x)\, d\mu(x) &= \sum_{j=1}^{2} a_j\ \mu(E_j) \\ &= a_1\ \mu(E_1) + a_2\ \mu(E_2) \end{aligned}$$

$$= 1\,(3 - 0) + 4\,(5 - 3)$$
$$= 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2$$
$$= 3 + 8$$
$$= 11$$

Contoh 3.

Diketahui : $\varphi(x) \begin{cases} 2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3, & 2 < x \leqslant 4 \\ 1, & 4 < x \leqslant 5 \end{cases}$

Ditanyakan : $\int \varphi(x)\, d\mu(x)$.

Penyelesaian : $\int \varphi(x)\, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{3} a_j \ \mu(E_j)$

$$= a_1\, \mu(E_1) + a_2\, \mu(E_2) + a_3\, \mu(E_3)$$
$$= 2\,(1 - 0) + 3\,(4 - 2) + 1\,(5 - 4)$$
$$= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$
$$= 2 + 6 + 1$$
$$= 9$$

3.2. SIFAT-SIFAT DASAR DARI INTEGRAL.

Semesta Pembicaraan adalah ruang ukuran (X,S,μ).

3.2.1. Lemma.

Jika φ dan ψ masing-masing fungsi sederhana dalam $M^+(X,S)$ dan $c \geqslant 0$, maka :

a. $\int c\,\varphi \ d\mu = c \int \varphi \ d\mu$.

b. $\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \int \varphi \ d\mu + \int \psi \ d\mu$.

Bukti :

a. Diberikan φ fungsi sederhana dalam $M^+(X,S)$ dan $c \geqslant 0$.

Jika $c = 0$, maka $\int c\,\varphi\ d\mu = \int 0 \ d\mu = 0$

(mnr pernyataan 3,1.2.).

dan $c \int \varphi \, d\mu = 0 \int \varphi \, d\mu = 0$

Sehingga $\int c\varphi \, d\mu = 0 = c \int \varphi \, d\mu$.

Jika $c > 0$, dan jika φ merupakan pernyataan standard,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j X_{E_j}$$

maka $c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c \, a_j X_{E_j}$

$$\text{Sehingga } \int c\varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c \, a_j \, \mu(E_j)$$

$$= c \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mu(E_j)$$

$$= c \int \varphi \, d\mu.$$

(mnr pernyataan 3.1.2.).

Terbukti bahwa $\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu$.

b. Diberikan $E_j = \{ x \in X \,/\, \varphi(x) = a_j \}$, dengan $a_j \geq 0$, $j = 1,2,3, \dots n$, maka E_j himpunan-himpunan saling asing dan $X = \bigsqcup E_j$, $j = 1,2, \dots n$.

Dan $F_k = \{ x \in X \,/\, \psi(x) = b_k \}$, dengan $b_k \geq 0$, $k = 1,2,3, \dots n$, maka F_k himpunan-himpunan saling asing dan $X = \bigsqcup F_k$, $k = 1,2, \dots m$.

Misalkan $G_h = E_j \sqcap F_k$, $h = 1,2, \dots p$,

$j = 1,2, \dots n$, $k = 1,2, \dots m$.

Sehingga $X = \bigsqcup G_h$, $h = 1,2, \dots p$.

$= \bigsqcup \bigsqcup (E_j \sqcap F_k)$, $j = 1,2, \dots n$,

$k = 1,2, \dots m$.

Karena φ dan ψ masing-masing fungsi sederhana dalam $M^+(X,S)$, sehingga φ dan ψ masing-masing merupakan pernyataan standard,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j X_{E_j}, \qquad \psi = \sum_{k=1}^{m} b_k X_{F_k}$$

maka $\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} a_j X_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k X_{F_k}$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\, X_{E_j \cap F_k}$$

(mnr Lemma 2.2.3.c.)...(I).

Misalkan $a_j + b_k = c_h$ dan $E_j \cap F_k = G_h$, $h = 1,2, \ldots p$.

Karena persamaan (I) menjadi :

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{p} c_h\, X_{G_h}$$

Sehingga $\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{h=1}^{p} c_h\, \mu(G_h)$

$$= \sum_{h=1}^{p} \sum_{(h)} c_h\, \mu(G_h)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\, \mu(E_j \cap F_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j\, \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k\, \mu(E_j \cap F_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mu(E_j \cap (\bigcup_{k=1}^{m} F_k)) + \sum_{k=1}^{m} b_k\, \mu((\bigcup_{j=1}^{n} E_j) \cap F_k)$$

(mnr Definisi Ukuran 2.4.1.)

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mu(E_j \cap X) + \sum_{k=1}^{m} b_k\, \mu(X \cap F_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k\, \mu(F_k)$$

$$= \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu.$$

(mnr Definisi 3.1.2.).

Terbukti bahwa $\int(\varphi+\psi)\,d\mu = \int\varphi\,d\mu + \int\psi\,d\mu$.

3.3. INTEGRAL DARI FUNGSI SEBARANG.

Semesta pembicaraan adalah ruang ukuran (X,S,μ).

3.3.1. Definisi.

Jika $f \in M^+(X,S)$, maka didefinisikan

Integral f terhadap μ adalah bilangan riil yang diperluas.

$$\int f\,d\mu = \sup \int \varphi\,d\mu. \qquad \text{........(3.3.1.a.).}$$

dengan suprimum diperluas pada semua fungsi sederhana dalam $M^+(X,S)$ yang memenuhi $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$, $\forall\, x \in X$.

Jika $f \in M^+(X,S)$ dan $E \in S$, maka $X_E\, f \in M^+(X,S)$ dan didefinisikan Integral f pada E terhadap μ adalah bilangan riil yang diperluas.

$$\int_E f\,d\mu = \int X_E\, f\,d\mu. \qquad \text{........(3.3.1.b.).}$$

Contoh.

Diketahui : $\varphi(x) \begin{cases} 2, & x \in E_1\ [\,0,1\,) \\ 3, & x \in E_2\ [\,1,2\,] \end{cases}$

Ditanyakan : $\int f\,d\mu = \sup \int \varphi\,d\mu$.

Penyelesaian : $\int \varphi\,d\mu = \sum_{j=1}^{2} a_j\,\mu(E_j)$

$= a_1\,\mu(E_1) + a_2\,\mu(E_2)$

$= 2\,(1-0) + 3\,(2-1)$

$= 2\,.\,1 \quad + 3\,.\,1$

$= \quad 2 \quad + \quad 3$

$= 5$

$\sup \int \varphi\,d\mu = 5$

Jadi $\int f\,d\mu = \sup \int \varphi\,d\mu = 5$.

Contoh.

Diketahui : $f(x) = 1,\ x \in E\ [a,b]$

Ditanyakan : $\int_E f\,d\mu = \int X_E\, f\,d\mu$.

Penyelesaian : $\int X_E\, f\,d\mu = \int 1\ .\ 1\,d\mu$

$$= \int d\mu$$

$$= \mu(E)$$

$$= b - a$$

Jadi $\int_E f\,d\mu = \int X_E\, f\,d\mu = b - a$.

3.3.2. Lemma.

a. Jika f dan g masing-masing anggota $M^+(X,S)$ dan $f \leq g$ maka $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

b. Jika $f \in M^+(X,S)$, jika E,F masing-masing anggota σ-aljabar S dan jika $E \subseteq F$, $\int_E f\,d\mu \leq \int_F f\,d\mu$.

Bukti :

a. Diberikan f,g masing-masing anggota $M^+(X,S)$ dan $f \leq g$.

Jika $\varphi \in M^+(X,S)$ adalah fungsi sederhana sedemikian hingga $0 \leq \varphi \leq f$, maka $0 \leq \varphi \leq g$.

Jika $f \in M^+(X,S)$, maka $\int f\,d\mu = \sup \int \varphi\,d\mu$ dengan suprimum $\varphi \in M^+(X,S)$, $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, $\forall\, x \in X$.

(mnr Definisi 3.3.1.a.).

Jika $g \in M^+(X,S)$, maka $\int g\,d\mu = \sup \int \varphi\,d\mu$ dengan suprimum $\varphi \in M^+(X,S)$, $0 \leq \varphi(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in X$.

(mnr Definisi 3.3.1.a.).

Sehingga $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.

Padahal diketahui $f \leq g$, maka $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

Terbukti bahwa $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

b. Diberikan $f \in M^+(X,S)$ dan E,F masing-masing anggota σ-aljabar S dan $E \subseteq F$.

Jika $f \in M^+(X,S)$ dan $E \in S$, maka $X_E\ f \in M^+(X,S)$

dan $\int_E f\ d\mu = \int X_E\ f\ d\mu$. (mnr Definisi 3.3.1.b.).

Jika $f \in M^+(X,S)$ dan $F \in S$, maka $X_F\ f \in M^+(X,S)$

dan $\int_F f\ d\mu = \int X_F\ f\ d\mu$. (mnr Definisi 3.3.1.b.).

Karena $\int_E f\ d\mu = \int X_E\ f\ d\mu$, $\int_F f\ d\mu = \int X_F\ f\ d\mu$

dan $E \subseteq F$, sehingga $\int_E f\ d\mu \leq \int_F f\ d\mu$.

Terbukti bahwa $\int_E f\ d\mu \leq \int_F f\ d\mu$.

3.4. <u>SIFAT-SIFAT DASAR KONVERGENSI DARI INTEGRAL LEBESGUE</u>.

Semesta pembicaraan adalah ruang ukuran (X,S,μ).

3.4.1. <u>TEOREMA KONVERGENSI MONOTON</u>.

Jika $\langle f_n \rangle \in M^+(X,S)$, $\forall\ n \in N$ adalah suatu barisan fungsi-fungsi monoton naik yang konvergen ke f,

maka : $\int f\ d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int f_n\ d\mu$.

Akan diperlihatkan bahwa $\int f\ d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int f_n\ d\mu$.

<u>Bukti</u> :

($\Longrightarrow$)

Akan dibuktikan $\int f\ d\mu \geq \lim\limits_{n \to \infty} \int f_n\ d\mu$.

Diberikan $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots$

Dari Akibat (2.3.4.), yaitu jika $\langle f_n \rangle \in M(X,S)$, $\forall\ n \in N$ merupakan barisan yang konvergen ke f pada X,

maka $f \in M(X,S)$.

Karena $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots$

Sehingga $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, $\forall\ n \in N$.

diperoleh $\int f_n\ d\mu \leq \int f_{n+1}\ d\mu \leq \int f\ d\mu$.

(mnr Lemma 3.3.2.a.).

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n\ d\mu \leq \int f\ d\mu.$$

Terbukti bahwa $\int f \, d\mu \geqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$. ......(I).

($\Longleftarrow$)

Akan dibuktikan $\int f \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.

Diberikan bilangan riil α yang memenuhi $0 < \alpha < 1$

dan fungsi sederhana dapat ukur φ yang memenuhi $0 \leqslant \varphi \leqslant f$.

Jika $E_n = \{ x \in X \,/\, f_n(x) \geqslant \alpha \varphi(x) \}$ sedemikian

hingga $E_n \in S$, $E_n \subseteq E_{n+1}$ dan $X = \bigcup E_n$, $\forall n \in N$.

Dengan menggunakan Lemma 3.3.2. diperoleh :

$$\int_{E_n} \alpha \varphi \, d\mu \leqslant \int_{E_n} f_n \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu.$$

Karena $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots$

Sehingga $\int \varphi \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi \, d\mu$.

$$\alpha \int \varphi \, d\mu = \alpha \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi \, d\mu, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi \, d\mu$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f_n \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

diperoleh : $\alpha \int \varphi \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$, $\quad 0 < \alpha < 1$

$$\int \varphi \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

Karena φ merupakan fungsi sederhana sebarang dalam $M^+(X,S)$ yang memenuhi $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, sehingga :

$$\sup \int \varphi \, d\mu = \int f \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

Terbukti bahwa $\int f \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$. ....(II).

Dari persamaan (I) & (II) diperoleh :

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Contoh.

Diketahui : Suatu barisan $\langle f_n \rangle$ didefinisikan dengan :

$$f_n(x) \begin{cases} \sqrt{n}, & x \in (0,\frac{1}{n}) \\ 0, & x \in \{[\frac{1}{n},1] \text{ atau } x = 0\} \end{cases}$$

Buktikan : $\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.

Penyelesaian :

Diberikan $\langle f_n(x) \rangle$, $\forall\, n \in N$ merupakan suatu barisan fungsi-fungsi monoton naik yang konvergen ke f(x), berarti : $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall\, x \in X$.

* Karena $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in [0,1]$

maka $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$, $x \in [0,1]$

Sehingga $\int f \, d\mu = 0.$ ....(I).

$$* \quad \int f_n \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mu(E_j)$$

$$= \sqrt{n} \, (\tfrac{1}{n} - 0) + 0 \, (1 - \tfrac{1}{n}) + 0 \, . \, 0$$

$$= \sqrt{n} \, . \, \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = 0.$ ....(II).

Dari persamaan (I) & (II) dipenuhi :

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Contoh.

Diketahui : Suatu barisan $\langle f_n \rangle$, $\forall\, n \in N$ didefinisikan dengan :

$$f_n(x) \begin{cases} 2\sqrt{n}, & x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}) \\ 0, & x \in \{[0, \frac{1}{2n}] \cup [\frac{1}{n}, 1]\} \end{cases}$$

Buktikan : $\int f \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.

Penyelesaian :

Diberikan $\langle f_n \rangle$, $\forall n \in N$ merupakan suatu barisan fungsi-fungsi monoton naik yang konvergen ke f,

berarti : $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall x \in X$

* Karena $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in [0,1]$

maka $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$, $x \in [0,1]$

Sehingga $\int f \, d\mu = 0$. ....(I).

* $$\int f_n \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mu(E_j)$$

$$= 2\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) + 0 \left(\frac{1}{2n} - 0\right) + 0 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = 0$. ....(II).

Dari persamaan (I) & (II) dipenuhi :

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

3.4.2. <u>Akibat</u>.

a. Jika $f \in M^+(X,S)$ dan $c \geq 0$, maka $cf \in M^+(X,S)$ dan $\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$.

b. Jika $f,g \in M^+(X,S)$, maka $f+g \in M^+(X,S)$ dan $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

<u>Bukti</u> :

a. Diberikan $f \in M^+(X,S)$ dan $c \geq 0$, maka $cf \in M^+(X,S)$. (mnr Lemma 2.2.3.a.).

Jika $c = 0$, maka $\int cf\ d\mu = \int 0\ d\mu = 0$

dan $c \int f\ d\mu = 0 \int f\ d\mu = 0$.

Sehingga $\int cf\ d\mu = c \int f\ d\mu$.

Jika $c > 0$,

Diberikan $\langle \varphi_n \rangle$ merupakan barisan fungsi sederhana monoton naik dalam $M^+(X,S)$ yang konvergen ke f pada X, maka $\langle c\varphi_n \rangle$ adalah barisan monoton konvergen ke cf, sehingga :

$$\int cf\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int c\ \varphi_n\ d\mu. \quad \text{(mnr Teorema Konvergensi Monoton 3.4.1.).}$$

$$= c \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\ d\mu. \quad \text{(mnr Lemma 3.2.1.a).}$$

$$= c \int f\ d\mu. \quad \text{(mnr Teorema Konvergensi Monoton 3.4.1.).}$$

Terbukti bahwa $\int cf\ d\mu = c \int f\ d\mu$.

b. Diberikan $f,g \in M^+(X,S)$, maka $f+g \in M^+(X,S)$. (mnr Lemma 2.2.3.c.).

Jika $\langle \varphi_n \rangle$ dan $\langle \psi_n \rangle$ masing-masing merupakan barisan fungsi sederhana monoton naik yang konvergen ke f+g, $\forall\ n \in N$.

Sehingga :

$$\int (f+g)\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n + \psi_n)\ d\mu. \quad \text{(mnr Teorema Konvergensi Monoton).}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\ d\mu + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n\ d\mu. \quad \text{(mnr Lemma 3.2.1.b.).}$$

$$= \int f\ d\mu + \int g\ d\mu. \quad \text{(mnr Teorema Konvergensi Monoton).}$$

Terbukti bahwa $\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$.

3.4.3. Lemma FATOU.

Jika $\langle f_n \rangle \in M^+(X,S)$, $\forall\, n \in N$.

maka $\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$.

Bukti :

Diberikan $g_m = \inf \{ f_m, f_{m+1}, \ldots \}$

sedemikian hingga $g_m \leqslant f_n$, $\forall\, m \leqslant n$.

Karena itu $\int g_m\, d\mu \leqslant \int f_n\, d\mu$, $\forall\, m \leqslant n$.

(mnr Lemma 3.3.2.a.).

sehingga $\int g_m\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$, $\forall\, m \leqslant n$.

Karena $\langle g_m \rangle$ adalah barisan fungsi-fungsi monoton naik yang konvergen ke lim inf f_n, sehingga :

$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int g_m\, d\mu$. (mnr Teorema Konvergensi Monoton).

$\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$.

Terbukti bahwa $\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$.

Contoh.

Diketahui : $\langle f_n \rangle$ adalah barisan fungsi-fungsi didefinisikan pada $[0,1]$ sebagai berikut :

$f_n(x) = cn$, $x \in (0,\frac{1}{n})$, c konstanta $\neq 0$.

$= 0$, $x \in \{[\frac{1}{n},1]$ atau $x = 0\}$

Buktikan : $\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$.

Penyelesaian :

* $\int f_n\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mu(E_j)$

$$= cn\left(\tfrac{1}{n} - 0\right) + 0\left(1 - \tfrac{1}{n}\right) + 0.0$$

$$= cn \cdot \tfrac{1}{n} + 0 + 0$$

$$= c \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int f_n \, d\mu = c \neq 0. \qquad \text{.........(I).}$$

$$* \quad \lim_{n\to\infty} \inf f_n = 0$$

$$\int (\lim_{n\to\infty} \inf f_n) \, d\mu = 0. \qquad \text{.........(II).}$$

Dari persamaan (I) & (II) dipenuhi :

$$\int (\lim_{n\to\infty} \inf f_n) \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n \, d\mu.$$

<u>Contoh</u>.

Diberikan : $\langle f_n \rangle$, $\forall\ n \in N$ didefinisikan pada $[0,1]$ sebagai berikut :

$$f_n(x) = 2n, \quad x \in \left(\tfrac{1}{2n}, \tfrac{1}{n}\right)$$

$$= 0, \quad x \in \left\{\left[0, \tfrac{1}{2n}\right] \cup \left[\tfrac{1}{n}, 1\right]\right\}$$

Buktikan : $\int (\lim_{n\to\infty} \inf f_n) \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n \, d\mu.$

Penyelesaian :

$$* \quad \int f_n \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mu(E_j)$$

$$= 2n\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n}\right) + 0\left(\tfrac{1}{2n} - 0\right) + 0\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)$$

$$= 2n \cdot \tfrac{1}{2n} + \quad + 0 + 0$$

$$= 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int f_n \, d\mu = 1. \qquad \text{.........(I).}$$

$$* \quad \lim_{n\to\infty} \inf f_n = 0$$

$$\int (\lim_{n\to\infty} \inf f_n) \, d\mu = 0. \qquad \text{........(II).}$$

Dari persamaan (I) & (II) dipenuhi :

$$\int (\lim_{n\to\infty} \inf f_n) \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n \, d\mu.$$

3.4.4. Akibat.

Jika $f \in M^+(X,S)$ dan jika λ didefinisikan pada σ-aljabar S dengan $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$ maka λ adalah ukuran.

Bukti :

Aksioma (2) pada Definisi Ukuran 2.4.1. dipenuhi, sebab : $f \geq 0$, sehingga $\lambda(E) \geq 0$.

Aksioma (1) pada Definisi Ukuran 2.4.1. dipenuhi, sebab :

Jika $E = \emptyset$, maka $X_E f$ hilang dimana-mana sedemikian hingga $\lambda(\emptyset) = 0$.

Aksioma (3) pada Definisi Ukuran 2.4.1. dipenuhi, sebab :

Jika diberikan $\langle E_n \rangle$ merupakan barisan himpunan-himpunan saling asing pada σ-aljabar S, $E = \bigcup E_n$, $\forall n \in N$.

Dan jika diberikan f_n yang didefinisikan dengan :

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} X_{E_k} f$$

maka
$$\int f_n \, d\mu = \int \sum_{k=1}^{n} X_{E_k} f \, d\mu$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int X_{E_k} f \, d\mu. \quad \text{(mnr Akibat 3.4.2.b).}$$
$$= \int X_{E_1} f \, d\mu + \int X_{E_2} f \, d\mu + \ldots + \int X_{E_n} f \, d\mu.$$
$$= \int_{E_1} f \, d\mu + \int_{E_2} f \, d\mu + \ldots + \int_{E_n} f \, d\mu.$$

(mnr Definisi 3.3.1.b.).

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f \, d\mu.$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k). \quad \ldots\ldots\text{(I).}$$

Karena $\langle f_n \rangle \in M^+(X,S)$ adalah barisan fungsi-fungsi monoton naik yang konvergen ke X_E f, sehingga :

$\int X_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$. (mnr Teorema Konvergensi Monoton 3.4.1.).

Jika $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$,

maka $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$

$= \int X_E f \, d\mu$. (mnr Definisi 3.3.1.b.).

$= \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)$. (dari persamaan (I)).

$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$. ....(II).

Karena $E = \biguplus E_n$, $\forall n \in N$

sehingga $\lambda(E) = \lambda(\biguplus E_n)$, $\forall n \in N$.

$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$. (dari persamaan (II)).

Terbukti bahwa λ adalah penjumlahan yang countabel (countable additive).

Karena aksioma-aksioma pada Definisi Ukuran 2.4.1. dipenuhi, maka terbukti bahwa λ adalah ukuran.