BAB II

R U A N G U K U R A N

2.1. σ-ALJABAR.

Semesta Pembicaraan adalah Himpunan sebarang X dan $X \neq \emptyset$.

2.1.1. Definisi.

Suatu keluarga S yang anggota-anggotanya merupakan himpunan-himpunan bagian dari X ($S \subset 2^X$ dimana 2^X adalah himpunan semua himpunan bagian dari X) disebut σ-aljabar untuk X atau pada X bila dan hanya bila memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. $\emptyset \in S$.
2. $X \in S$.
3. Jika himpunan $E \in S$, maka himpunan $E^c = X - E \in S$.
4. Jika barisan himpunan-himpunan $\langle E_n \rangle \in S, \forall n \in N$, maka $\sqcup E_n \in S$.

Catatan :

Perhatikan Aturan De Morgan :

$(\sqcup E_n)^c = \sqcap (E_n)^c, \forall n \in N.$

$(\sqcap E_n)^c = \sqcup (E_n)^c, \forall n \in N.$

Sehingga dengan menggunakan Aturan De Morgan diperoleh Irisan dari himpunan-himpunan anggota σ-aljabar S merupakan anggota σ-aljabar S.

Contoh 1.

Misalkan $X = \{ a,b,c \}$.

Sehingga $2^X = \{ \emptyset , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} , \{a,b,c\} \}$.

Jika $S = \{ \emptyset , \{a\} , \{b,c\} , \{a,b,c\} \}$ maka S adalah σ-aljabar pada X.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 2.

Misalkan $X = \{a,b,c\}$.

Jika $S_1 = \{\{a\}, \{b,c\}, X\}$ maka S_1 bukan σ-aljabar pada X, sebab $\emptyset \notin S_1$, sehingga aksioma (1) dari σ-aljabar tidak dipenuhi.

Jika $S_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}\}$ maka S_2 bukan σ-aljabar pada X, sebab $X \notin S_2$, sehingga aksioma (2) dari σ-aljabar tidak dipenuhi.

Jika $S_3 = \{\emptyset, \{b,c\}, X\}$ maka S_3 bukan σ-aljabar pada X, sebab apabila diambil $E = \{b,c\} \in S_3$ maka $E^c = \{a\} \notin S_3$, sehingga aksioma (3) dari σ-aljabar tidak dipenuhi.

Jika $S_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ maka S_4 bukan σ-aljabar pada X, sebab gabungan dari dua anggota S_4 yaitu : $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin S_4$, sehingga aksioma (4) dari σ-aljabar tidak dipenuhi.

Contoh 3.

Misalkan $X = \{1,2,3, \ldots\}$.

Jika $S = \{\emptyset, \{1,3,5, \ldots\}, \{2,4,6, \ldots\}, X\}$.

Akan diperlihatkan bahwa S adalah σ-aljabar pada X.

Aksioma (1) dari σ-aljabar dipenuhi, sebab $\emptyset \in S$.

Aksioma (2) dari σ-aljabar dipenuhi, sebab $X \in S$.

Aksioma (3) dari σ-aljabar dipenuhi, sebab :

Ambil $E = \{1,3,5, \ldots\} \in S$.

$$
\begin{aligned}
\text{maka } E^c &= X - E \\
&= \{1,2,3, \ldots\} - \{1,3,5, \ldots\} \\
&= \{1,2,3, \ldots\} \cap \{1,3,5, \ldots\}^c \\
&= \{1,2,3, \ldots\} \cap \{2,4,6, \ldots\} \\
&= \{2,4,6, \ldots\} \in S.
\end{aligned}
$$

Sehingga apabila $E \in S$, maka $E^c \in S$.

Aksioma (4) dari σ-aljabar dipenuhi, sebab :

Ambil $E_1 = \emptyset \in S$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Ambil $E_2 = \{1,3,5, \ldots\} \in S.$

$E_3 = \{2,4,6, \ldots\} \in S.$

$E_4 = X \in S.$

maka $\bigcup_{n=1}^{4} E_n = \emptyset \cup \{1,3,5,\ldots\} \cup \{2,4,6,\ldots\} \cup X$

$= \{1,2,3,4,5,\ldots\} \in S.$

Sehingga $\langle E_n \rangle \in S,\ \forall\, n \in N$, maka $\bigcup E_n \in S.$

Contoh 4.

Jika S_1 dan S_2 masing-masing merupakan σ-aljabar pada X, maka $S_1 \cap S_2$ adalah σ-aljabar pada X.

Akan diperlihatkan bahwa $S_1 \cap S_2$ adalah σ-aljabar pada X.

Aksioma (1) dan Aksioma (2) dari σ-aljabar dipenuhi, sebab S_1 dan S_2 masing-masing σ-aljabar, sehingga :

$$\left.\begin{array}{l} \emptyset,\ X \in S_1 \\ \\ \emptyset,\ X \in S_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \emptyset,\ X \in (S_1 \cap S_2)$$

Aksioma (3) dari σ-aljabar dipenuhi, sebab :

Ambil $E \in (S_1 \cap S_2)$, akan diperlihatkan bahwa $E^c \in (S_1 \cap S_2)$

$E \in (S_1 \cap S_2)$ berarti :

$$\left.\begin{array}{l} E \in S_1 \Longrightarrow E^c \in S_1 \\ \text{dan} \\ E \in S_2 \Longrightarrow E^c \in S_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow E^c \in (S_1 \cap S_2)$$

Aksioma (4) dari σ-aljabar dipenuhi, sebab :

Jika $\langle E_n \rangle \in (S_1 \cap S_2),\ \forall\, n \in N$, akan diperlihatkan bahwa $\bigcup E_n \in (S_1 \cap S_2)$.

$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n \in (S_1 \cap S_2)$ berarti :

$$\left.\begin{array}{l} \langle E_n \rangle \in S_1 \Longrightarrow (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \in S_1 \\ \text{dan} \\ \langle E_n \rangle \in S_2 \Longrightarrow (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \in S_2 \end{array}\right\} \ldots(1).$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dari persamaan (1), maka :

$(\sqcup E_n) \in (S_1 \sqcap S_2)$.

Akhirnya terbukti bahwa ($S_1 \sqcap S_2$) adalah σ-aljabar pada X.

Catatan :

1. Jika σ-aljabar S telah ditentukan, maka himpunan sebarang dalam X disebut himpunan dapat ukur terhadap S.
2. Suatu ruang dapat ukur (Measurable Space) ditulis dengan (X,S) adalah suatu himpunan X dan suatu σ-aljabar S yang memuat himpunan-himpunan bagian dari X dengan sifat bahwa gabungan himpunan-himpunan semua anggota σ-aljabar S adalah himpunan X.

2.2. FUNGSI BERNILAI RIIL.

Semesta pembicaraan adalah ruang dapat ukur (X,S).

2.2.1. Definisi.

Suatu fungsi $f : X \longrightarrow R$ dikatakan dapat ukur terhadap S (sederhana dapat ukur), jika untuk setiap bilangan riil α maka $\{ x \in X \,/\, f(x) > \alpha \} \in S$.

2.2.2. Lemma.

Suatu fungsi $f : X \longrightarrow R$ adalah dapat ukur terhadap S, maka ke empat pernyataan pernyataan berikut ini ekuivalen.

(a). $\forall \alpha \in R$, $A_\alpha = \{ x \in X \,/\, f(x) > \alpha \} \in S$.

(b). $\forall \alpha \in R$, $B_\alpha = \{ x \in X \,/\, f(x) \leq \alpha \} \in S$.

(c). $\forall \alpha \in R$, $C_\alpha = \{ x \in X \,/\, f(x) \geq \alpha \} \in S$.

(d). $\forall \alpha \in R$, $D_\alpha = \{ x \in X \,/\, f(x) < \alpha \} \in S$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Bukti :

(a) ekuivalen (b), sebab $B_\alpha = (A_\alpha)^c \in S$,

sehingga suatu himpunan anggota S bila dan hanya bila komplemen himpunan anggota S.

(c) ekuivalen (d), sebab $C_\alpha = (D_\alpha)^c \in S$,

sehingga suatu himpunan anggota S bila dan hanya bila komplemen himpunan anggota S.

Tinggal membuktikan (a) ekuivalen (c).

($\Longrightarrow$)

Akan dibuktikan (a) $\Longrightarrow$ (c).

Diketahui $A_\alpha = \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha \} \in S$.

Diberikan $\{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \frac{1}{n} \} \in S, \ \forall \ n \in N$.

Sehingga :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{n} \} = \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - 1 \} \cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{2} \} \cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{3} \} \cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{4} \} \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Akan diperlihatkan bahwa Irisan dari himpunan-himpunan anggota σ-aljabar S adalah anggota σ-aljabar S dengan menggunakan Induksi Matematika.

* Irisan dari dua himpunan anggota σ-aljabar S adalah anggota σ-aljabar S.

$$\bigcap_{n=1}^{2} \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{n} \} = \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - 1 \} \cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{2} \} = \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{2} \} \in S.$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

* Dianggap benar untuk n=k.

$$\bigcap_{n=1}^{k} \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{n} \} = \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - 1 \}$$

$$\cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{2} \}$$
$$\cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{3} \}$$
$$\cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{4} \}$$
$$\cap \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{k} \}$$
$$= \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{k} \} \in S.$$

* Akan dibuktikan untuk $n = k + 1$.

$$\bigcap_{n=1}^{k+1} \{x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{n}\} = \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - 1 \}$$
$$\cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{2} \}$$
$$\cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{3} \}$$
$$\cap \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{k} \}$$
$$\cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{k+1} \}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{k} \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{n} \}$$
$$\cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{k+1} \}$$
$$= \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{k} \}$$
$$\cap \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{k+1} \}$$
$$= \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{k+1} \} \in S.$$

Sehingga $\forall\, n \in N$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{n} \} = \{ x \in X \ / \ f(x) \geq \alpha \} \in S.$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} = C_\alpha \in S.$$

Akhirnya terbukti bahwa (a) $\Longrightarrow$ (c)..............(I)

($\Longleftarrow$)

Akan dibuktikan (c) $\Longrightarrow$ (a).

Diketahui $C_\alpha = \{ x \in X \ / \ f(x) \geq \alpha \} \in S$,

maka $\{ x \in X \ / \ f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n} \} \in S, \ \forall\, n \in N$.

Sehingga :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X \ / \ f(x) \geq \alpha + \tfrac{1}{n}\} = \{ x \in X \ / \ f(x) \geq \alpha + 1 \}$$
$$\cup \{ x \in X \ / \ f(x) \geq \alpha + \tfrac{1}{2} \}$$
$$\cup \{ x \in X \ / \ f(x) \geq \alpha + \tfrac{1}{3} \}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$\sqcup \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Akan diperlihatkan bahwa gabungan dari himpunan-himpunan anggota σ-aljabar S adalah anggota σ-aljabar S dengan menggunakan Induksi Matematika.

* Gabungan dari dua himpunan anggota σ-aljabar S adalah anggota σ-aljabar S.

$$\begin{aligned}\bigsqcup_{n=1}^{2} \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{n}\} &= \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + 1\} \\ &\quad \sqcup \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{2}\} \\ &= \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{2}\} \in S.\end{aligned}$$

* Dianggap benar untuk n = k.

$$\begin{aligned}\bigsqcup_{n=1}^{k} \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{n}\} &= \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + 1\} \\ &\quad \sqcup \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{2}\} \\ &\quad \sqcup \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{3}\} \\ &\quad \sqcup \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad \sqcup \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{k}\} \\ &= \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{k}\} \in S.\end{aligned}$$

* Akan dibuktikan untuk n = k + 1.

$$\begin{aligned}\bigsqcup_{n=1}^{k+1} \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{n}\} &= \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + 1\} \\ &\quad \sqcup \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{2}\} \\ &\quad \sqcup \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{3}\} \\ &\quad \sqcup \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad \sqcup \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{k}\} \\ &\quad \sqcup \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{k+1}\} \\ &= \bigsqcup_{n=1}^{k} \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{n}\} \\ &\quad \sqcup \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{k+1}\} \\ &= \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{k}\} \\ &\quad \sqcup \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{k+1}\} \\ &= \{x \in X \,/\, f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{k+1}\} \in S.\end{aligned}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

Sehingga $\forall\ n \in N$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X \ / \ f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n} \} = \{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha \} \in S.$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} = A_\alpha \in S.$$

Akhirnya terbukti bahwa (c) $\Longrightarrow$ (a).............(II)

Dari persamaam (I) & (II), terbukti (a) ekuivalen (c).

Jadi terbukti bahwa ke empat pernyataan ekuivalen.

Contoh 1.

Fungsi konstan sebarang $f : X \longrightarrow R$ adalah dapat ukur.

Misalkan $f(x) = c$, $\forall\ x \in X$.

Jika $\alpha \geq 0$, maka $\{x \in X \ / \ f(x) > \alpha \} = \{x \in X \ / \ c > \alpha \} \in S$.

Ambil $c = 0$, maka $\{ x \in X \ / \ 0 > \alpha \} = \emptyset \in S$.

Ambil $c > 0$, maka $\{ x \in X \ / \ c > \alpha \} \in S$. (mnr Lemma 2.2.2.).

Ambil $c < 0$, maka $\{ x \in X \ / \ c > \alpha = \emptyset \in S$.

Jika $\alpha < 0$, maka $\{ x \in X \ / \ f(x) > \alpha \} = \{ x \in X \ / \ c > \alpha \} \in S$.

Ambil $c = 0$, maka $\{ x \in X \ / \ 0 > \alpha \} = X \in S$.

Ambil $c > 0$, maka $\{ x \in X \ / \ c > \alpha \} = X \in S$.

Ambil $c < 0$, maka $\{ x \in X \ / \ c > \alpha \} \in S$. (mnr Lemma 2.2.2.).

Contoh 2.

Fungsi Karakteristik $X_E : X \longrightarrow R$ adalah dapat ukur.

Misalkan $E \in S$ dan fungsi karakteristik X_E didefinisikan dengan : $X_E = 1$, $x \in E$.

$= 0$, $x \notin E$.

Akan diperlihatkan bahwa fungsi karakteristik dapat ukur.

Jika $\forall\ \alpha \in R$, maka $\{ x \in X \ / \ X_E(x) > \alpha \} \in S$.

Jika $\alpha \geq 0$, maka $\{ x \in X \ / \ X_E(x) > \alpha \} \in S$.

Ambil $X_E = 1$, maka $\{ x \in X \ / \ X_E(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X \ / \ 1 > \alpha \} = E \in S$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Ambil $X_E = 0$, maka $\{ x \in X / X_E(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X / 0 > \alpha \} = \emptyset \in S.$

Jika $\alpha < 0$, maka $\{ x \in X / X_E(x) > \alpha \} \in S.$

Ambil $X_E = 1$, maka $\{ x \in X / X_E(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X / 1 > \alpha \} = X \in S.$

Ambil $X_E = 0$, maka $\{ x \in X / X_E(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X / 0 > \alpha \} = X \in S.$

Contoh 3.

Jika X_E fungsi karakteristik dari bilangan-bilangan rasional pada $[0,1]$, maka :

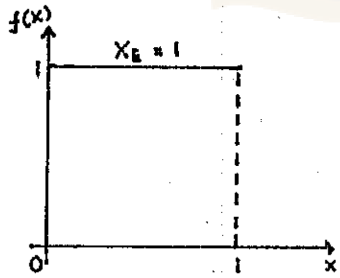
Jika $\alpha \geq 1$, maka $\{ x \in X / X_E > \alpha \} = \emptyset \in S.$

Jika $0 \leq \alpha < 1$, maka $\{ x \in X / X_E > \alpha \} \in S$ adalah himpunan bilangan-bilangan rasional pada $[0,1]$.

Jika $\alpha < 0$, maka $\{ x \in X / X_E > \alpha \} = [0,1] \in S.$

Sehingga jika $\forall \alpha \in R$, maka $\{ x \in X / X_E > \alpha \} \in S.$

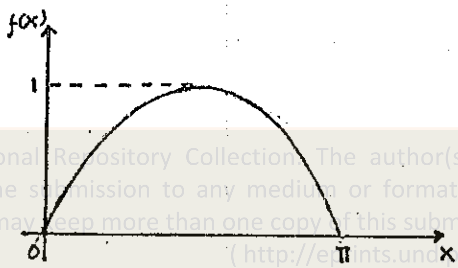
Jadi fungsi karakteristik X_E dapat ukur.



Contoh 4.

Misalkan $f(x) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$.

Akan diperlihatkan bahwa f(x) adalah dapat ukur.



This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jika $\alpha \geq 1$, maka $\{ x \in X \,/\, f(x) > \alpha \} = \emptyset \in S$.

Jika $0 \leq \alpha < 1$, maka $\{ x \in X \,/\, f(x) > \alpha \} \in S$ adalah himpunan-himpunan terbuka pada $[0,\pi]$ dan merupakan gabungan interval terbuka.

Jika $\alpha < 0$, maka $\{ x \in X \,/\, f(x) > \alpha \} = [0,\pi] \in S$.

Sehingga jika $\forall \alpha \in R$, maka $\{ x \in X \,/\, f(x) > \alpha \} \in S$.

Jadi fungsi $f(x) = \sin x$ dapat ukur.

<u>Contoh 5</u>.

Fungsi konstan sebarang $f : X \longrightarrow R$ adalah dapat ukur.

Misalkan $f(x) = c$, $\forall x \in X$.

Jika $\alpha \geq 0$, maka $\{ x \in X \,/\, f(x) < \alpha \}$

$= \{ x \in X \,/\, c < \alpha \} \in S$.

Ambil $c = 0$, maka $\{ x \in X \,/\, 0 < \alpha \} = X \in S$.

Ambil $c > 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c < \alpha \} \in S$.

(mnr. Lemma 2.2.2.).

Ambil $c < 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c < \alpha \} = X \in S$.

Jika $\alpha < 0$, maka $\{ x \in X \,/\, f(x) < \alpha \}$

$= \{ x \in X \,/\, c < \alpha \} \in S$.

Ambil $c = 0$, maka $\{ x \in X \,/\, 0 < \alpha \} = \emptyset \in S$.

Ambil $c > 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c < \alpha \} = \emptyset \in S$.

Ambil $c < 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c < \alpha \} \in S$.

(mnr. Lemma 2.2.2.).

<u>Contoh 6</u>.

Diberikan E adalah himpunan tak dapat ukur pada $[0,1]$, maka $E^c = [0,1] - E$ adalah himpunan tak dapat ukur.

Jika fungsi f memetakan E ke $[0,\frac{1}{2})$ secara bijektif

dan memetakan E^c ke $[\frac{1}{2},1]$ secara bijektif.

Diberikan $\{ x \in X \,/\, f(x) = c \} = \emptyset$, jika $c \notin [0,1]$

dan $\{ x \in X \,/\, f(x) = c \}$ terdiri dari 1 titik,

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

jika $c \in [0,1]$.

Sehingga $\{ x \in X \,/\, f(x) = c \}$ adalah dapat ukur.

Karena $\{ x \in X \,/\, f(x) < \frac{1}{2} \} = E$ adalah himpunan tak dapat ukur, maka $f(x) \in [0,1]$ adalah fungsi tak dapat ukur.

2.2.3. <u>Lemma</u>.

Jika f dan g masing-masing fungsi bernilai riil dapat ukur dan jika c adalah suatu bilangan riil, maka:

(a). $c\, f : X \longrightarrow R$ adalah fungsi dapat ukur.

(b). $f.f : X \longrightarrow R$ adalah fungsi dapat ukur.

(c). $f+g : X \longrightarrow R$ adalah fungsi dapat ukur.

(d). $f.g : X \longrightarrow R$ adalah fungsi dapat ukur.

(e). $|f| : X \longrightarrow R$ adalah fungsi dapat ukur.

<u>Bukti</u>:

(a). Jika $f(x)$ dapat ukur dan c adalah suatu bilangan riil, maka $c\, f(x)$ dapat ukur.

Akan diperlihatkan bahwa $c\, f(x)$ dapat ukur.

Jika $\alpha \geqslant 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c\, f(x) > \alpha \} \in S$.

Ambil $c = 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c\, f(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X \,/\, 0 > \alpha \} = \emptyset \in S$.

Ambil $c > 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c\, f(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X \,/\, f(x) > \frac{\alpha}{c} \} \in S$.

(mnr. Lemma 2.2.2.).

Ambil $c < 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c\, f(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X \,/\, f(x) < \frac{\alpha}{c} \} \in S$.

(mnr. Lemma 2.2.2.).

Jika $\alpha < 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c\, f(x) > \alpha \} \in S$.

Ambil $c = 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c\, f(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X \,/\, 0 > \alpha \} = X \in S$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Ambil $c > 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c\, f(x) > \alpha \}$
$= \{ x \in X \,/\, f(x) > \frac{\alpha}{c} \} \in S.$
(mnr. Lemma 2.2.2.).

Ambil $c < 0$, maka $\{ x \in X \,/\, c\, f(x) > \alpha \}$
$= \{ x \in X \,/\, f(x) < \frac{\alpha}{c} \} \in S.$

(b). Diberikan $f(x)$ dapat ukur.

Akan diperlihatkan bahwa $\{f(x)\}^2$ adalah fungsi dapat ukur.

Jika $\forall\, \alpha \in R$, maka $\{ x \in X \,/\, \{f(x)\}^2 > \alpha \} \in S.$

Jika $\alpha < 0$, maka $\{ x \in X \,/\, \{f(x)\}^2 > \alpha \} = X \in S.$

Jika $\alpha \geq 0$, maka $\{ x \in X \,/\, \{f(x)\}^2 > \alpha \}$
$= \{ x \in X \,/ (f(x)+\sqrt{\alpha}\,)(f(x)-\sqrt{\alpha}\,) > 0 \}$
$= \{ x \in X \,/\, f(x) > \sqrt{\alpha} \}$
$\cup \{ x \in X \,/\, f(x) < -\sqrt{\alpha} \} \in S.$
(mnr. Lemma 2.2.2.).

Sebab gabungan dari himpunan-himpunan anggota σ-aljabar S adalah anggota σ-aljabar S, sehingga $\{f(x)\}^2$ adalah fungsi dapat ukur.

(c). Diberikan $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing fungsi dapat ukur.

Akan diperlihatkan bahwa $f(x) + g(x)$ adalah fungsi dapat ukur.

Jika $\forall\, \alpha \in R$,
maka $\{ x \in X \,/\, f(x) + g(x) > \alpha \} \in S.$

Dengan hypotesa, jika r bilangan rasional, maka:

$S_r = \{ x \in X \,/\, f(x) > r \}$
$\cap \{ x \in X \,/\, g(x) > \alpha - r \} \in S.$

Sehingga $\{ x \in X \,/\, (f+g)(x) > \alpha \}$
$= \cup \{ S_r \,/\, r \text{ bilangan rasional} \} \in S.$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

(d). Diberikan $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing fungsi dapat ukur.

Akan diperlihatkan bahwa $f(x)\ g(x)$ adalah fungsi dapat ukur.

Dengan menggunakan sifat (c), akan didapatkan

$f(x)\ g(x) = \frac{1}{4}\left[\ \{f(x) + g(x)\}^2 - \{f(x) - g(x)\}^2\right]$.

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing fungsi dapat ukur, maka $f(x) - g(x)$ adalah fungsi dapat ukur.

Sebab $f(x) - g(x) = f(x) + (\ -\ g(x)\ )$.

Karena itu $\{f(x) + g(x)\}^2$ dan $\{f(x) - g(x)\}^2$ masing-masing fungsi dapat ukur, sehingga $f(x)\ g(x)$ adalah fungsi dapat ukur.

(e). Diberikan $f(x)$ fungsi dapat ukur.

Akan diperlihatkan bahwa $|\ f(x)\ |$ adalah fungsi dapat ukur.

Jika $\forall\ \alpha \in R$, maka $\{\ x \in X\ /\ |f(x)| > \alpha\ \} \in S$.

Jika $\alpha < 0$, maka $\{\ x \in X\ /\ |f(x)| > \alpha\ \} = X \in S$.

Jika $\alpha \geqslant 0$, maka $\{\ x \in X\ /\ |f(x)| > \alpha\ \}$

$$= \{\ x \in X\ /\ -\alpha > f(x) > \alpha\ \}$$

$$= \{\ x \in X\ /\ f(x) > \alpha\ \}$$

$$\sqcup \{x \in X\ /\ f(x) < -\alpha\ \} \in S.$$

(mnr Lemma 2.2.2.).

Sebab gabungan dari himpunan-himpunan anggota σ-aljabar S adalah anggota σ-aljabar S.

Sehingga $|f(x)|$ adalah fungsi dapat ukur.

2.2.4. <u>Definisi</u>.

Diberikan f^+ dan f^- merupakan fungsi-fungsi non negatif didefinisikan pada X, dengan :

$f^+(x) = \sup\ \{\ f(x), 0\ \}$ adalah bagian positif dari f.

$f^-(x) = \sup\ \{-f(x), 0\ \}$ adalah bagian negatif dari f.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Sehingga $f = f^+ - f^-$ dan $|f| = f^+ + f^-$.

Jika fungsi sebarang $f : X \longrightarrow R$ pemetaan adalah dapat ukur bila dan hanya bila f^+ dan f^- masing-masing fungsi dapat ukur.

Jika fungsi sebarang $f : [a,b] \longrightarrow R$ adalah dapat ukur dan misalkan $x \in [a,b]$,

maka :

Jika $f(x) > 0$, maka $f^+(x) = f(x)$ dan $f^-(x) = 0$.

Jika $f(x) < 0$, maka $f^+(x) = 0$ dan $f^-(x) = -f(x)$.

Jika $f(x) = 0$, maka $f^+(x) = f^-(x) = 0$.

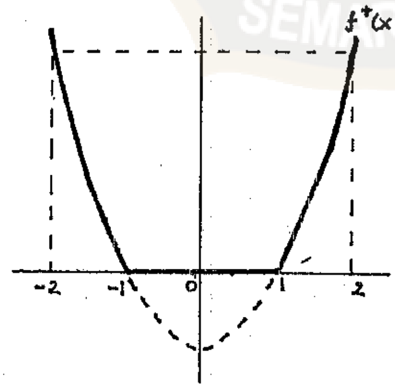
Contoh

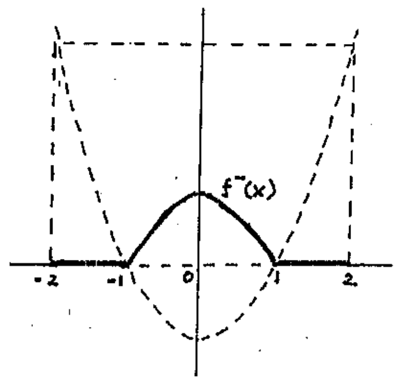
Jika $f(x) = x^2 - 1$ untuk $-2 \leq x \leq 2$

maka : $f^+(x) = f(x)$, $f^-(x) = 0$ untuk $-2 \leq x \leq -1$

$f^+(x) = 0$, $f^-(x) = -f(x)$ untuk $-1 < x < 1$

$f^+(x) = f(x)$, $f^-(x) = 0$ untuk $1 \leq x \leq 2$





Contoh

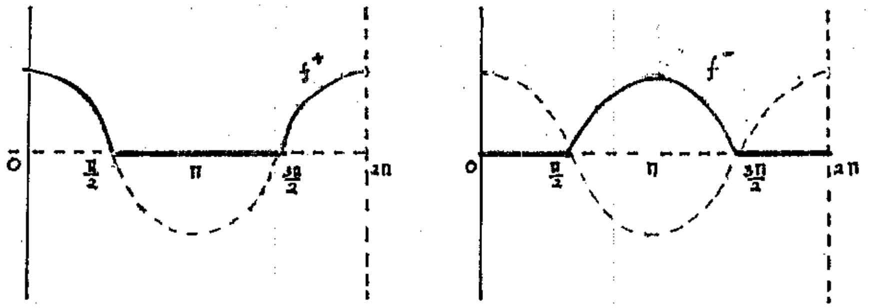
Jika $f(x) = \cos x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

maka : $f^+(x) = f(x)$, $f^-(x) = 0$ untuk $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$f^+(x) = 0$, $f^-(x) = -f(x)$ untuk $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

$f^+(x) = f(x)$, $f^-(x) = 0$ untuk $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)



2.3. FUNGSI BERNILAI RIIL YANG DIPERLUAS.

Semesta pembicaraan adalah ruang dapat ukur (X,S) dan $M(X,S)$ merupakan keluarga semua fungsi-fungsi dapat ukur terhadap S bernilai riil yang diperluas.

2.3.1. Definisi.

Suatu fungsi $f : X \longrightarrow R^*$ dikatakan dapat ukur terhadap S, jika untuk setiap bilangan riil α

maka : $\{ x \in X \;/\; f(x) > \alpha \} \in S.$

$$\{ x \in X \;/\; f(x) = \infty \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ x \in X \;/\; f(x) > n \} \in S.$$

$$\{ x \in X \;/\; f(x) = -\infty \} = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X \;/\; f(x) > -n \} \right]^c \in S.$$

2.3.2. Lemma.

Suatu fungsi $f : X \longrightarrow R^*$ adalah dapat ukur bila dan hanya bila suatu fungsi $f_1 : X \longrightarrow R$ adalah dapat ukur.

Dimana f didefinisikan dengan :

$$E_1 = \{ x \in X \;/\; f(x) = +\infty \} \in S.$$

$$E_2 = \{ x \in X \;/\; f(x) = -\infty \} \in S.$$

dan f_1 didefinisikan dengan :

$$f_1(x) = f(x), \text{ jika } x \notin E_1 \cup E_2.$$

$$f_1(x) = 0 \quad , \text{ jika } x \in E_1 \cup E_2.$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Bukti :

($\Longrightarrow$)

Diberikan suatu fungsi f adalah dapat ukur.

Akan dibuktikan bahwa f_1 adalah dapat ukur.

Jika $\forall \alpha \in R$, maka $\{ x \in X / f_1(x) > \alpha \} \in S$.

Jika $\alpha \geqslant 0$, maka $\{ x \in X / f_1(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X / f(x) > \alpha \} - E_1 \in S$.

Jika $\alpha < 0$, maka $\{ x \in X / f_1(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X / f(x) > \alpha \} \sqcup E_2 \in S$.

Terbukti bahwa f_1 adalah fungsi dapat ukur.

($\Longleftarrow$)

Diberikan suatu fungsi f_1 adalah dapat ukur.

Akan dibuktikan bahwa f adalah dapat ukur.

Jika $\forall \alpha \in R$, maka $\{ x \in X / f(x) > \alpha \} \in S$.

Jika $\alpha \geqslant 0$, maka $\{ x \in X / f(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X / f_1(x) > \alpha \} \sqcup E_1 \in S$.

Jika $\alpha < 0$, maka $\{ x \in X / f(x) > \alpha \}$

$= \{ x \in X / f_1(x) > \alpha \} - E_2 \in S$.

Terbukti bahwa f adalah fungsi dapat ukur.

Contoh.

Jika f(x) dapat ukur, maka $\{ x \in X / f(x) = \infty \} \in S$.

dan $\{ x \in X / f(x) = -\infty \} \in S$.

Sebab $\{ x \in X / f(x) = \infty \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ x \in X / f(x) > n \} \in S$.

Sehingga Irisan dari himpunan-himpunan anggota σ-aljabar S adalah anggota σ-aljabar S, mengakibatkan :

$\{ x \in X / f(x) = -\infty \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ x \in X / f(x) < -n \} \in S$.

Contoh.

Diberikan f(x) dan g(x) masing-masing fungsi dapat ukur anggota M(X,S).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Akan diperlihatkan bahwa $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in M(X,S)$.

Misalkan $E_1 = \{ x \in X / f(x) = -\infty$ dan $g(x) = +\infty \} \in S$.

$E_2 = \{ x \in X / f(x) = +\infty$ dan $g(x) = -\infty \} \in S$.

Sehingga $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pada $E_1 \cup E_2 \in S$.

Jika didefinisikan $(f+g)(x) = 0$, maka :

$\{ x \in X / (f+g)(x) > \alpha \} = \{ x \in X / 0 > \alpha \} \in S$.

Sehingga $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in M(X,S)$.

2.3.3. Lemma.

Jika $\langle f_n \rangle \in M(X,S)$, $\forall n \in N$ adalah barisan fungsi-fungsi dapat ukur maka :

(a). $f(x) = \inf_{n \in N} f_n(x) \in M(X,S)$.

(b). $F(x) = \sup_{n \in N} f_n(x) \in M(X,S)$.

(c). $f^*(x) = \lim_{n \to \infty} \inf f_n(x) \in M(X,S)$.

(d). $F^*(x) = \lim_{n \to \infty} \sup f_n(x) \in M(X,S)$.

Bukti :

(a). Diberikan $\langle f_n(x) \rangle \in M(X,S)$, $\forall n \in N$.

Jika $\forall \alpha \in R$, maka $\{ x \in X / f_n(x) \geq \alpha \} \in S$.

Sehingga $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{ x \in X / f_n(x) \geq \alpha \} \in S$, sebab irisan dari himpunan-himpunan anggota σ-aljabar S adalah anggota σ-aljabar S.

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty} \{ x \in X / f_n(x) \geq \alpha \} &= \{ x \in X / f_1(x) \geq \alpha \} \\ &\cap \{ x \in X / f_2(x) \geq \alpha \} \\ &\cap \{ x \in X / f_3(x) \geq \alpha \} \\ &\cap \{ x \in X / f_4(x) \geq \alpha \} \\ &\cap \dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &= \{ x \in X / \inf_{n \in N} f_n(x) \geq \alpha \} \in S.\end{aligned}$$

Karena $\{ x \in X / \inf_{n \in N} f_n(x) \geq \alpha \} \in S$,

sehingga $f(x) = \inf_{n \in N} f_n(x) \in M(X,S)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(https://eprints.undip.ac.id)

(b). Diberikan $\langle f_n(x)\rangle \in M(X,S)$, $\forall\, n \in N$.

Jika $\forall\, \alpha \in R$, maka $\{ x \in X \,/\, f_n(x) > \alpha \} \in S$.

Sehingga $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X \,/\, f_n(x) > \alpha \} \in S$, sebab gabungan dari himpunan-himpunan anggota σ-aljabar S adalah anggota σ-aljabar S.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X \,/\, f_n(x) > \alpha \} = \{ x \in X \,/\, f_1(x) > \alpha \} \cup \{ x \in X \,/\, f_2(x) > \alpha \} \cup \{ x \in X \,/\, f_3(x) > \alpha \} \cup \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \{ x \in X \,/\, \sup_{n\in N} f_n(x) > \alpha \} \in S.$$

Karena $\{ x \in X \,/\, \sup_{n\in N} f_n(x) > \alpha \} \in S$,

sehingga $F(x) = \sup_{n\in N} f_n(x) \in M(X,S)$.

(c). Diberikan $\langle f_n(x)\rangle \in M(X,S)$, $\forall\, n \in N$.

Dari (a), yaitu $\inf f_n(x) \in M(X,S)$, $\forall\, n \in N$ maka :

$$\sup_{k\in N}\ \inf_{n\geq k}\ f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\ \inf f_n(x) \in M(X,S). \quad (\text{ mnr b }).$$

$$\text{Sehingga}\quad f^*(x) = \lim_{n\to\infty}\ \inf f_n(x) \in M(X,S).$$

(d). Diberikan $\langle f_n(x)\rangle \in M(X,S)$, $\forall\, n \in N$.

Dari (b), yaitu $\sup f_n(x) \in M(X,S)$, $\forall\, n \in N$ maka :

$$\inf_{k\in N}\ \sup_{n\geq k}\ f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\ \sup f_n(x) \in M(X,S). \quad (\text{ mnr a }).$$

$$\text{Sehingga}\quad F^*(x) = \lim_{n\to\infty}\ \sup f_n(x) \in M(X,S).$$

2.3.4. <u>Akibat</u>.

Jika $\langle f_n\rangle \in M(X,S)$, $\forall\, n \in N$ adalah barisan fungsi-fungsi yang konvergen ke f pada X maka $f \in M(X,S)$.

<u>Bukti</u> :

Diberikan $\langle f_n(x)\rangle \in M(X,S)$, $\forall\, n \in N$.

Misalkan $\langle f_n(x)\rangle$ adalah barisan fungsi-fungsi monoton naik dapat ukur sedemikian hingga $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall\, x \in X$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \ldots$

Jika $\forall \alpha \in R$, maka $\{ x \in X / f_n(x) > \alpha \} \in S$, $\forall n \in N$.

Karena $\{ x \in X / f_n(x) > \alpha \} \in S$,

Sehingga $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X / f_n(x) > \alpha \} \in S$.

Sebab gabungan dari himpunan-himpunan anggota σ-aljabar S adalah anggota σ-aljabar S.

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X / f_n(x) > \alpha \} &= \{ x \in X / f_1(x) > \alpha \} \\
&\cup \{ x \in X / f_2(x) > \alpha \} \\
&\cup \{ x \in X / f_3(x) > \alpha \} \\
&\cup \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\cup \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \{ x \in X / \sup_{n \in N} f_n(x) > \alpha \} \in S. \\
&= \{ x \in X / \lim_{n \to \infty} f_n(x) > \alpha \} \in S.
\end{aligned}$$

Karena $\{ x \in X / \lim_{n \to \infty} f_n(x) > \alpha \} \in S$,

sehingga $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in M(X,S)$.

2.4. UKURAN.

2.4.1. Definisi.

Suatu fungsi $\mu : S \longrightarrow R^*$ dikatakan ukuran bila dan hanya bila memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(E) \geq 0$, $\forall E \in S$.
3. μ merupakan penjumlahan yang countabel (countable additive).

   Jika $\langle E_n \rangle \in S$, $\forall n \in N$ merupakan barisan dari himpunan-himpunan yang saling asing maka :

   $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh.

Misalkan $X \neq \emptyset$ dan S adalah σ-aljabar yang memuat semua himpunan bagian dari X.

Jika μ didefinisikan pada S dengan $\mu(E) = 0$, $\forall E \in S$.

maka μ merupakan ukuran.

Akan diperlihatkan bahwa μ merupakan ukuran.

Aksioma (1) dari ukuran dipenuhi, sebab :

Ambil $E = \emptyset$, maka $\mu(E) = \mu(\emptyset) = 0$.

Aksioma (2) dari ukuran dipenuhi, sebab :

$\mu(E) = 0$, $\forall E \in S$.

Aksioma (3) dari ukuran dipenuhi, sebab :

Jika $\langle E_n \rangle \in S$, $\forall n \in N$ adalah barisan himpunan-himpunan

maka $\sqcup E_n \in S$, $\forall n \in N$. (mnr Definisi σ-aljabar 2.2.1.)

Karena $\langle E_n \rangle$ merupakan barisan himpunan-himpunan yang saling asing maka akan diperlihatkan bahwa :

$\mu(\sqcup E_n) = \Sigma \mu(E_n)$, $\forall n \in N$.

Ambil $n = 1$,

jika $E_1 \in S$ maka $\mu(E_1) = 0$.

Ambil $n = 1,2$,

jika $E_1, E_2 \in S$ maka $\mu(E_1 \sqcup E_2) = 0$.

....

....

Ambil $n = 1,2,3,\ldots k$,

jika $E_1, E_2, E_3, \ldots E_k \in S$ maka

$\mu(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3 \sqcup \ldots \sqcup E_k) = 0$.

Ambil $n = 1,2,3, \ldots k, k+1$,

jika $E_1, E_2, E_3, E_4, \ldots E_k, E_{k+1} \in S$

maka $\mu(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3 \sqcup \ldots \sqcup E_k \sqcup E_{k+1}) = 0$.

Sehingga $\forall n \in N$,

jika $(\sqcup E_n) \in S$ maka $\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n)$

$$= \mu(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3 \sqcup \ldots) = 0. \qquad \ldots\ldots.(I).$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Ambil n = 1 , jika $E_1 \in S$ maka $\mu(E_1) = 0$.

Ambil n = 2 , jika $E_2 \in S$ maka $\mu(E_2) = 0$.

Ambil n = 3 , jika $E_3 \in S$ maka $\mu(E_3) = 0$.

....

....

Ambil n = k , jika $E_k \in S$ maka $\mu(E_k) = 0$.

Ambil n = k+1, jika $E_{k+1} \in S$ maka $\mu(E_{k+1}) = 0$.

Sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \mu(E_3) + \ldots$

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$ ....(II).

Dari persamaan (I) & (II) diperoleh :

$\mu \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Jadi μ merupakan penjumlahan yang countabel (countable additive).

Contoh.

Misalkan $X \neq \emptyset$ dan S adalah σ-aljabar yang memuat semua himpunan-himpunan bagian dari X.

Jika μ didefinisikan pada S dengan :

$\mu(E) = 0$, $E = \emptyset$.

$\mu(E) = +\infty$, $E \neq \emptyset$.

maka μ merupakan ukuran.

Akan diperlihatkan bahwa μ merupakan ukuran.

Aksioma (1) dari ukuran dipenuhi, sebab :

Ambil $E = \emptyset$, maka $\mu(E) = \mu(\emptyset) = 0$.

Aksioma (2) dari ukuran dipenuhi, sebab :

Ambil $E = \emptyset$, maka $\mu(E) = 0$.

Ambil $E \neq \emptyset$, maka $\mu(E) = +\infty > 0$.

Aksioma (3) dari ukuran dipenuhi, sebab :

Jika $\langle E_n \rangle \in S$ adalah barisan himpunan-himpunan

maka $(\bigsqcup E_n) \in S$, $\forall n \in N$. (mnr Definisi σ-aljabar (2.1.1.))

Karena $\langle E_n \rangle$ merupakan barisan himpunan-himpunan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

yang saling asing maka akan diperlihatkan bahwa :

$\mu(\sqcup E_n) = \Sigma \mu(E_n)$, $\forall n \in N$.

Ambil $E_1 = \emptyset$ maka $\mu(E_1) = 0$.

Karena $E_1 = \emptyset$ sehingga $E_2 \neq \emptyset$, $E_3 \neq \emptyset$, $E_4 \neq \emptyset$, ...

.... , n = 2,3,4, ...

maka $\mu(E_2 \sqcup E_3 \sqcup E_4 \sqcup \ldots) = +\infty$,

sebab $E_2 \sqcup E_3 \sqcup E_4 \sqcup \ldots \neq \emptyset$.

Sehingga $\mu(\sqcup E_n) = \mu(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3 \sqcup \ldots) = +\infty$,

$\forall n \in N$. ....(I).

Ambil $E_1 = \emptyset$ maka $\mu(E_1) = 0$.

Karena $E_1 = \emptyset$, sehingga untuk n = 2,3,4, ...

didapatkan $E_2 \neq \emptyset$, $E_3 \neq \emptyset$, $E_4 \neq \emptyset$, ...

Jika $E_2 \neq \emptyset$ maka $\mu(E_2) = +\infty$.

Jika $E_3 \neq \emptyset$ maka $\mu(E_3) = +\infty$.

Jika $E_4 \neq \emptyset$ maka $\mu(E_4) = +\infty$.

....

....

Sehingga $\forall n \in N$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \mu(E_3) + \ldots$$
$$= +\infty .$$ ....(II).

Dari persamaan (I) & (II) diperoleh :

$$\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n).$$

Jadi μ merupakan penjumlahan yang countabel (countable additive).

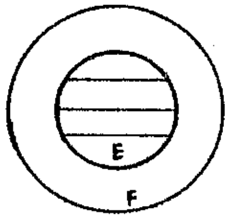
2.4.2. Lemma.

Misalkan μ adalah ukuran didefinisikan pada σ-aljabar S. Diberikan E dan F masing-masing anggota σ-aljabar S dan $E \subsetneq F$ sehingga $\mu(E) \leq \mu(F)$.

Jika $\mu(E) < +\infty$ maka $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

<u>Bukti</u> :



Diberikan $E, F \in S$ dan $E \subseteq F$.

$F = E \sqcup (F - E)$ dan $E \sqcap (F - E) = \emptyset$.

Sehingga $\mu(F) = \mu(E \sqcup (F - E))$

$= \mu(E) + \mu(F - E)$. (mnr Definisi Ukuran 2.4.1.).

Karena $\mu(E) < +\infty$,

maka $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$. terbukti.

2.4.3. <u>Lemma</u>.

Misalkan μ adalah ukuran didefinisikan pada σ-aljabar S.

(a). Jika $\langle E_n \rangle \in S$ merupakan barisan naik

maka $\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

(b). Jika $\langle E_n \rangle \in S$ merupakan barisan turun, dan $\mu(E_1) < +\infty$

maka $\mu\left(\bigsqcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

<u>Bukti</u> :

(a). Karena $\langle E_n \rangle \in S$ merupakan barisan naik

berarti $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots$

maka $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (E_n - E_{n-1})$, dimana $E_0 = \emptyset$.

Karena $\{ E_n - E_{n-1} / n = 1, 2, 3, \ldots \}$ adalah koleksi himpunan-himpunan dapat ukur yang saling asing, maka :

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n \right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (E_n - E_{n-1}) \right).$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n - E_{n-1}).$$

(mnr Definisi Ukuran 2.4.1.).

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n - E_{n-1}).$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} (E_n - E_{n-1}) \right)$$

(mnr Definisi Ukuran 2.4.1.).

$$= \lim_{N\to\infty} \mu(E_N).$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Terbukti bahwa $\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

(b). Karena $\langle E_n \rangle \in S$ merupakan barisan turun,

dan $\mu(E_1) < +\infty$

berarti $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots$

maka $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq E_1$.

Sehingga $\mu(\lim\limits_{n\to\infty} E_n) < +\infty$.

$$\mu(\lim_{n\to\infty} (E_1 - E_n)) = \mu(E_1 - \lim_{n\to\infty} E_n).$$
$$= \mu(E_1) - \mu(\lim_{n\to\infty} E_n).$$

(mnr Lemma 2.4.2.). ...(I).

Tetapi $(E_1 - E_n)$ adalah barisan monoton naik, $\forall\, n \in N$.

Sehingga :

$$\mu(\lim_{n\to\infty} (E_1 - E_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_1 - E_n).$$

(mnr bukti a).

$$= \lim_{n\to\infty} [\mu(E_1) - \mu(E_n)]$$

(mnr Lemma 2.4.2.).

$$= \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

..........(II).

Dari persamaan (I) & (II) diperoleh :

$$\mu(E_1) - \mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Karena $\mu(E_1) < +\infty$,

Sehingga $\mu(\lim\limits_{n\to\infty} E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

$$\Longleftrightarrow \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

Terbukti bahwa $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

2.5. RUANG UKURAN.

2.5.1. Definisi.

Suatu ruang ukuran berbentuk (X,S,μ) terdiri dari suatu himpunan X, suatu σ-aljabar S yang memuat himpunan-himpunan bagian dari X, dan suatu ukuran μ yang didefinisikan pada S.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh.

Misalkan ruang ukuran (X,S,μ) dan $Z = \{ E \in S \ / \ \mu(E) \geqslant 0 \}$.

Akan diperlihatkan bahwa Z adalah σ-aljabar.

Aksioma (1) dari σ-aljabar dipenuhi, sebab :

Ambil $E = \emptyset \in S$, maka $\mu(\emptyset) = 0$. (mnr Definisi Ukuran 2.4.1.)

Karena $E = \emptyset \in S$, $\mu(E) = 0$, sehingga $E \in Z$.

Aksioma (2) dari σ-aljabar dipenuhi, sebab :

Ambil $X \in S$ dan $X \neq \emptyset$,

maka : 1. $\mu(X) = 0$. dipenuhi (mnr Definisi Ukuran 2.4.1.).

2. $\mu(X) > 0$. dipenuhi (mnr Definisi Ukuran 2.4.1.).

Karena $X \in S$, $\mu(X) \geqslant 0$ sehingga $X \in Z$.

Aksioma (3) dari σ-aljabar dipenuhi, sebab :

$E = \emptyset \in S$, $\mu(E) = 0$ sehingga $E \in Z$.

(dari bukti aksioma 1).

Jika $E = \emptyset \in S$, $\mu(E) = 0$ maka $E^c = \emptyset^c = X \in S$.

Akan diperlihatkan bahwa $\mu(E^c) \geqslant 0$.

Padahal $X = E \sqcup E^c$

Sehingga $\mu(X) = \mu(E \sqcup E^c)$.

$\Longleftrightarrow \mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c)$.(mnr Definisi Ukuran 2.4.1.).

$\mu(E^c) = \mu(X) - \mu(E)$.

$\Longleftrightarrow \mu(E^c) = \mu(X)$, sebab $\mu(E) = 0$.

Dari bukti aksioma (2), $\mu(X) \geqslant 0$, $X \in S$ sehingga $X \in Z$

maka $\mu(E^c) \geqslant 0$. dipenuhi.

Karena $E^c \in S$, $\mu(E^c) \geqslant 0$ sehingga $E^c \in Z$.

Jadi $E \in Z$, maka $E^c \in Z$.

Aksioma (4) dari σ-aljabar dipenuhi, sebab :

$X \in S$, $\mu(X) \geqslant 0$ sehingga $X \in Z$. (dari bukti aksioma 2).

Padahal $\sqcup E_n = X \in S$, $\forall n \in N$.

Sehingga $\mu(\sqcup E_n) = \mu(X)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Karena $\mu(X) \geqslant 0$, maka $\mu(\bigcup E_n) \geqslant 0$, $\forall\, n \in N$.

Karena $(\bigcup E_n) \in S$, $\mu(\bigcup E_n) \geqslant 0$

sehingga $(\bigcup E_n) \in Z$, $\forall\, n \in N$.

Jadi $\langle E_n \rangle \in Z$ maka $(\bigcup E_n) \in Z$.

Terbukti bahwa Z adalah σ-aljabar.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)