BAB : II

RANTAI MARKOV BERPARAMETER DISKRIT

II.1. Rantai Markov Berparameter Diskrit

Pandang sebuah sistem fisika **sebagai** suatu himpunan diskrit titik-titik waktu. Misalkan hasil-hasil penelitian yang didapat dinyatakan dengan $X_o, X_1, X_2, \ldots$. Diasumsikan bahwa X_n merupakan sebuah random variabel. Nilai X_n menyatakan pada saat n sistem fisikatersebut.

Kumpulan $\{X_n\}$ disebut sebuah rantai bila ia mengasumsikan bahwa, hanya terdapat jumlah state yang finite atau infinite terhitung (Countable). Barisan $\{X_n\}$ adalah sebuah rantai Markov bila setiap random variabel X_n diskrit dan bila untuk setiap himpunan m titik-titik $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\ldots < n_m$ ($m > 2$), distribusi bersyarat X_{n_m} untuk nilai-nilai tertentu $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\ldots\ldots x_{n_{m-1}}$ hanya tergantung pada $X_{n_{m-1}}$, yaitu nilai-nilai yang paling dikenal sehingga dapat dituliskan sebagai :

$$P\left[X_{n_m} = x_{n_m} \mid X_{n_o} = x_{n_o}, X_{n_1} = x_{n_1}, \ldots, X_{n_{m-1}} = x_{n_{m-1}}\right]$$

$$= P\left[X_{n_m} = x_{n_m} \mid X_{n_{m-1}} = x_{n_{m-1}}\right] \qquad \ldots(2.1)$$

Rantai Markov ini disebut rantai Markov berparameter diskrit. Rantai Markov dapat digambarkan dengan bentuk umum yang paling mudah yaitu percobaan independen. Misalkan sebuah barisan percobaan tertentu dan misalkan $e_1, e_2, \ldots$ merupakan event-event menyeluruh yang setara. Jumlah dari pada event dapat finite atau infinite. Pandang hasil setiap percobaan dari titik pandang kemunculan event, definisikan random variabel X_n ($n = 0,1,2,.......$), sebagai $X_n = j$ bila e_j merupakan hasil dari percobaan-ke n . Bila percobaan independen maka didapat

$$P\left[X_n = j \mid X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \ldots\ldots,\ X_{n-1} = i_{n-1} \right] =$$

$$P\left[X_n = j \right] \qquad \ldots(2.2)$$

Untuk semua n dan semua nilai random variabel yang-mungkin. Dikatakan percobaan-percobaan atau random variabel yang bersangkutan , $\{ X_n \}$ membentuk sebuah rantai Markov bila semua nilai random variabel X_n yang mungkin memenuhi (2.1).

II.2. Probabilitas Transisi

Untuk mencirikan hukum probabilitas sebuah probabilitas untuk semua waktu $n \geqslant m \geqslant 0$ dan i serta j $(i,j \in \mathcal{S})$ sebagai

$$p_i(n) = P[X_n = i] ,\quad i \in \mathcal{S} \qquad \ldots.(2.3)$$

Dengan $\mathcal{S}$ = himpunan indek perurutan

dan syarat-syarat fungsi probabilitas

$$p_{ij}(m,n) = P[X_n = j \mid X_m = i] ,\ i,j \in \mathcal{S} \quad \ldots(2.4)$$

Fungsi $p_{ij}(m,n)$ disebut fungsi probabilitas transisi rantai Markov. Hukum probabilitas sebuah rantai Markov ditentukan oleh fungsi diatas, karena untuk intejer k dan setiap himpunan titik-titik k , $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ dalam ruang parameter dan keadaan $j_1, j_2, \ldots\ldots, j_k$

$$P\left[X_{n_1} = j_1 , X_{n_2} = j_2 , \ldots\ldots , X_{n_k} = j_k \right] =$$

$$p_1(n_1) \cdot p_{j_1 j_2}(n_2, n_1) \cdot p_{j_2 j_3}(n_3, n_2) \ldots p_{j_{k-1} j_k}(n_k, n_{k-1}) \quad \ldots .(2.5)$$

Bila dalam fungsi $p_{ij}(.,.)$ dua argumen berkurang menjadi tinggal satu argumen, sehingga

$$P\left[X_{m+1} = j \mid X_m = i \right] = p_{ij} \quad \ldots\ldots (2.6)$$

dan

$$P\left[X_{m+n} = j \mid X_m = i \right] = p_{ij}^{(n)} \quad \ldots\ldots (2.7)$$

Sebuah rantai Markov berparameter diskrit yang memenuhi (2.7) merupakan probabilitas transisi stasioner atau lebih jelasnya homogen. Matrik (p_{ij}), $i,j \in \mathcal{S}$ disebut matrik transisi satu tahap, dan distribusi (p_i , $i \in \mathcal{S}$) merupakan distribusi awal. Probabilitas p_{ij} adalah probabilitas transisi satu tahap dari i ke j. Distribusi awal dan probabilitas transisi stasioner untuk setiap i dan j memenuhi hubungan

$$p_i \geq 0 \quad , \quad \sum_i p_i = 1$$

$$p_{ij} \geq 0 \quad , \quad \sum_j p_{ij} = 1 \quad (2.8)$$

Persamaan (2.7) selalu dapat dinyatakan dalam bentuk (2.6) sedemikian hingga

$$p_{ij}^{(n)} = \sum P\left[X_{m+1}=i_1 \middle| X_m=i\right] . P\left[X_{m+2}=i_2 \middle| X_{m+1}=i_1\right] \cdots\cdots$$

$$\cdots . P\left[X_{m+n}=j \middle| X_{m+n-1}=i_{n-1}\right]$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}} p_{i_1} \; p_{i_1 i_2} \cdots\cdots p_{i_{n-1} j} \qquad (2.9)$$

Tampak bahwa probabilitas p_i dan $p_{ij}^{(n)}$ mencirikan seluruh rantai. Probabilitas absulut(tak bersyarat) X_n diberikan sebagai

$$p_j^{(n)} = P\left[X_n=j\right] = \sum p_i^{(n-1)} . p_{ij} \qquad (2.10)$$

Sedangkan probabilitas berserikat barisan sebarang dengan $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\cdots < n_k$ diberikan sebagai

$$P\left[X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \ldots, X_{n_k}=i_k\right]$$

$$= p_{i_1}^{(n_1)} . p_{i_1 i_2}^{(n_2-n_1)} \cdots\cdots p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k-n_{k-1})} \qquad (2.11)$$

II.3 Matrik Probabilitas Transisi

Sebuah matrik stokhastik adalah sebuah matrik order finite atau infinite dengan elemen non negatip sedemikian hingga jumlah setiap baris sama dengan satu.

Bila $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ merupakan matrik stokhastik maka hasil kali $A.B$ didefinisikan berupa matrik (c_{ij}) dengan

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \qquad (2.12)$$

Deret ini selalu konvergen dan tampak bahwa $A.B$ juga matrik stokhastik. Sekarang matrik transisi (p_{ij}) sebuah rantai Markov $\{ X_n \}$ tentu merupakan sebuah matrik stokhastik, dan kebalikannya setiap matrik stokhastik merupakan matrik transisi sebuah rantai Markov.

<u>Teorema 2.3.1</u>

Untuk sebuah rantai Markov homogen $\{ X_n \}$, probabilitas transisi n langkah dalam (2.7) memenuhi hubungan

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} \cdot p_{kj}^{(n)}$$

Disebut juga Chapman - Kolmogorov untuk rantai Markov $\{X_n\}$

<u>Bukti</u>

Diketahui

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \left.\begin{matrix} 0 & \text{bila} & i \neq j \\ 1 & \text{bila} & i = j \end{matrix}\right\} \qquad ...(2.13)$$

Dinyatakan $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ dan didefinisikan untuk $n \geqslant 1$

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(1)} \qquad ...(2.14)$$

Hubungan ini benar untuk $n=0$. Sekarang akan dibuktikan bahwa untuk setiap $v > 0$

$$p_{ij}^{(n)} = P\left[X_{n+v} = j \,\middle|\, X_v = i \right] \qquad \ldots .(2.15)$$

Diasumsikan bahwa (2.15) benar untuk nilai-nilai tertentu n , dan semua $i,j \in \mathcal{S}$, sehingga dengan sifat - sifat Markov didapat

$$P\left[X_{n+v+1} = j \,\middle|\, X_v = i \right]$$

$$= \sum_k P\left[X_{n+v} = k \,,\, X_{n+v+1} = j \,\middle|\, X_v = i \right]$$

$$= \sum_k P\left[X_{n+v}=k \,\middle|\, X_v=i \right] P\left[X_{v+n+1}=j \,\middle|\, X_v=i, X_{v+n}=k \right]$$

$$= \sum_k P\left[X_{n+v}=k \,\middle|\, X_v=i \right] P\left[X_{n+v+1}=j \,\middle|\, X_{n+v}=k \right]$$

$$= \sum_k p_{ik}^{(n)} \; p_{kj}^{(1)} = p_{ij}^{(n+1)} \qquad \ldots\ldots(2.16)$$

Akibatnya (2.15) terbukti dengan menginduksikan pada n. Persamaan (2.14) dapat diberlakukan umum sebagai berikut :

untuk $n \geqslant 0$ dan $m \geqslant 0$ maka

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} \; p_{kj}^{(m)} \qquad \ldots (2.17)$$

untuk $m = 0$, ini berlaku .

Asumsikan bahwa (2.17) berlaku benar untuk sebuah nilai m dan n,i,j , sehingga didapat :

$$p_{ij}^{(n+m+1)} = \sum_k p_{ik}^{(n+m)} \; p_{kj}^{(1)}$$

$$= \sum_k \left\{ \sum_l p_{il}^{(n)} \cdot p_{lk}^{(m)} \right\} p_{kj}^{(1)}$$

$$= \sum_l p_{il}^{(n)} \left\{ \sum_k p_{lk}^{(m)} \; p_{kj}^{(1)} \right\}$$

$$= \sum_l p_{il}^{(n)} \cdot p_{lj}^{(m+1)} \qquad \ldots.(2.18)$$

Akhirnya (2.17) terbukti secara induktif pada m . Tampak bahwa fungsi probabilitas transisi sebuah rantai Markov non-homogen $\{ X_n \}$ juga memenuhi hubungan Chapman Kolmogorov yang berbentuk :

$$p_{ij}(m,n) = \sum_k p_{ik}(m,u) \; p_{kj}(u,n) \qquad (2.19)$$

Dalam bentuk pergandaan matrik probabilitas transisi, persamaan Chapman - Kolmogorov untuk waktu $n > u > m \geqslant 0$ dapat dituliskan sebagai

$$P (m,n) = P (m,u) \; P (u,n) \qquad (2.20)$$

II.4 **Rumus Stirling's**

$$n! \simeq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \; n^{n+\frac{1}{2}} \; e^{-n} \qquad (2.21)$$

Dengan tanda setara digunakan untuk menyatakan bahwa ke duanya akan mendekati sama bila $n \to \infty$.