B A B II

KONSEP PENUNJANG

II.1 Aljabar Matriks

Definisi 1 :

Matriks A berukuran (m x n), berarti banyaknya baris matriks A adalah m dan banyaknya kolom adalah n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2 :

Vektor adalah matriks berukuran (n x 1) atau matriks berukuran (1 x n).

Definisi 3 :

Matriks satuan (identitas) adalah matriks bujur sangkar yang elemen diagonal utamanya = 1 dan elemen lainnya = 0.

Definisi 4 :

Rank matriks A ditulis r(A) adalah menyatakan jumlah maksimal vektor baris/kolom dari matriks A yang bebas linier.

Definisi 5 :

Suatu matriks bujur sangkar A disebut matriks non singulair apabila det (A) $\neq$ 0.

Definisi 6 :

Suatu vektor V dikatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots\cdots, \beta_n\}$.

sedemikian hingga $V = \sum_{i=1}^{n} c_i \beta_i$.

Definisi 7 :

Setiap himpunan n vektor yang bebas linier dari vektor-vektor $\{\beta_1 , \beta_2 , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \beta_n\}$ dari ruang vektor berdimensi n, disebut basis dari ruang vektor.

Definisi 8 :

Suatu ruang vektor V dikatakan berdimensi n, bila banyaknya maksimal vektor $\in$ V yang bebas linier adalah n.

Definisi 9 :

Jika $V_s \subset V_r \subset V_n$, maka seluruh vektor V_r yang tegak lurus ke V_s, dikatakan orthocomplement dari V_s didalam V_r.

Definisi 10 :

Bentuk kuadratik pada n variabel $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ adalah sebuah fungsi berbentuk :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j \text{ , dimana (} a_{ij} \text{) konstan.}$$

Teorema I :

Untuk beberapa real (A), matriks AA' adalah simetris, positip indefinite dan mempunyai rank yang sama dengan rank matriks A.

Teorema II :

Jika $V_r \subset V_n$, $r > 0$. V_r dibentuk oleh :

$\{\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \ldots\ldots\ldots , \alpha_n\}$ dan X V_r ,

maka koefisien didalam $X = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_s\alpha_s$

adalah tunggal bhb s = r dan $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots , \alpha_s\}$

Teorema III :

Orthocomplement dari V_s dalam V_r dari definisi diatas adalah ruang bagian vektor dari V_r yang mempunyai dimensi (r - s).

II.2 Model Matematika Dari Analisa Varian

Didalam menghadapi persoalan Analisa Varian adalah mungkin untuk menggambarkan bahwa pengamatan yang diambil dapat dinyatakan dalam suatu bentuk model matematika.

Definisi :

Andaikan dipunyai n pengamatan yang merupakan random variabel Y_1 , Y_2 , ... , Y_n, dimana setiap pengamatan dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari sembarang p harga tidak diketahui β_1 , β_2 , ... , β_p ditambah dengan kesalahan sedemikian hingga :

$$Y_i = x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + \dots + x_{pi}\beta_p + e_i \qquad \text{(II.2.1)}$$

$$i = 1 , 2 , \dots , n$$

Model analisa varian, dibawah anggapan Ω :

$$\Omega : \begin{cases} Y_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ji}\beta_j + e_i \\ \qquad i = 1 , 2 , \dots , n \\ \qquad j = 1 , 2 , \dots , p \\ e_i \sim NID(0 , \sigma^2) \end{cases} \qquad \dots\dots \text{(II.2.2)}$$

dengan :

Y_i : harga pengamatan ke-i

x_{ji} : koefisien konstant

β_j : efek-efek

e_i : kesalahan acak

Karena $\{e_i\}$ berdistribusi NID (0 , σ^2) dengan demikian maka $\{Y_i\}$ berdistribusi NID ($\mu_i = E(Y_i)$, σ^2), dimana fungsi padat dari $\{Y_i\}$ adalah :

$$p(Y_i) = (2\pi\ \sigma^2)^{-n/2} \exp \frac{-\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu_i)^2}{2\ \sigma^2}$$

Untuk mempermudah didalam membicarakan teori secara umum, digunakan vektor dan aljabar matriks.

Didefinisikan vektor-vektor :

$$Y^{nx1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix} , \quad \beta^{px1} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_p \end{bmatrix} , \quad e^{nx1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

dan matriks :

$$X' \text{ berukuran } (p \times n) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots\cdots & x_{pn} \end{bmatrix}$$

Misal rank X' = r, dari definisi diatas persamaan (II.2.2) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\Omega : \begin{cases} Y = X'\beta + e , \quad \text{rank } X' = r \\ \{e\} \sim \text{N I D } (0 , \sigma^2) \end{cases} \qquad \ldots\ldots. \text{(II.2.3)}$$

Matriks Random Variabel

Definisi :

Diberikan suatu matriks V^{rxs} adalah matriks dari random variabel $\{v_{ij}\}$ dengan harga harapan berhingga,

v_{11} v_{12} ...... v_{1s}

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots\cdots & v_{1s} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots\cdots & v_{2s} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ v_{r1} & v_{r2} & \cdots\cdots & v_{rs} \end{bmatrix}$$

maka didefinisikan harga harapan dari matriks V :

$$E(V) = \begin{bmatrix} E(v_{11}) & E(v_{12}) & \cdots\cdots & E(v_{1s}) \\ E(v_{21}) & E(v_{22}) & \cdots\cdots & E(v_{2s}) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ E(v_{r1}) & E(v_{r2}) & \cdots\cdots & E(v_{rs}) \end{bmatrix} \qquad \text{(II.2.4)}$$

Definisi :

Diberikan vektor $V = (v_1 , v_2 , \ldots\ldots , v_n)'$ dari variabel-variabel random dengan varian berhingga. Maka yang disebut dengan matriks covarian dari V adalah : $\Sigma_v = (\mathrm{cov}(v_i,v_j))$ (II.2.5)

Andaikan : $= E(v_i)$, maka cov (v , v

$\mathrm{Cov} (v_i , v_j) = E ((v_i - \mu_i)(v_j - \mu_j))$, sehingga dengan menggunakan (II.2.3) dapat ditulis :

$$\Sigma_v = E ((V - \mu)(V - \mu)') \qquad \text{(II.2.6)}$$

dengan : $\mu = E (V)$.

Lemma :

Jika matriks A berukuran (q x r) dan matriks B berukuran (s x t) adalah matriks-matriks konstant dan matriks V berukuran (r x s) adalah matriks random variabel, maka berlaku :

$$E (A V B) = A\, E(V)\, B \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II.2.7)}$$

Teorema :

Jika $W^{mx1} = A^{mxn}.V^{nx1}$ adalah transformasi linier dari n variabel random V_1 , V_2 , ... , V_n ke m variabel W_1 , W_2 , ... , W_m dengan matriks A, maka matriks covarian dari W adalah :

$$\Sigma_W = A \ \Sigma_V \ A' \qquad \text{........} \quad (II.2.8)$$

Bukti :

$$\Sigma_W = E\,(\,(\,W - E(W))(\,W - E(W)\,)'\,)$$
$$= E\,(\,A\,(\,V - E(V))(\,V - E(V))'\,A'\,)$$
$$= A\,E\,(\,(\,V - E(V)\,)(\,V - E(V))'\,)\,A'$$
$$= A\ \Sigma_V\ A'.$$

II.3 Estimasi Kuadrat Terkecil Dan Persamaan Normal

Diketahui : $Y^{nx1} = X'\beta^{px1} + e^{nx1}$

dengan : $E\,(\,e\,) = 0$ dan $E\,(\,ee'\,) = \sigma^2 I$

Sehingga terlihat bahwa : $E\,(\,Y\,) = X'\beta$ dan $\Sigma_y = \sigma^2 I$.

Andaikan b_1 , b_2 , ... , b_p adalah estimasi-estimasi dari β_1 , β_2 , ... , β_p yang mungkin, dengan β_1 , β_2 , ... , β_p adalah konstanta tetap adalah estimasi terbaik dalam hal-hal tertentu. Untuk setiap $b = (\,b_1\,,\,b_2\,,\,......\,,\,b_p\,)'$, dibentuk :

$$S(\,Y\,,\,b\,) = \sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\,Y_i - \sum_{j=1}^{p} x_{ji} b_j\,)^2 \quad (II.3.1)$$

dengan :

$\hat{e}_i$ adalah estimasi dari e_i, dalam pengamatan Y_i pada (II.2.1) jika b adalah estimasi dari β . Sebagai ukuran dapat diperhatikan bahwa makin kecil harga $\hat{e}$, maka model dengan β akan menghasilkan estimasi b yang lebih tepat pada pengamatan-pengamatan. Dengan notasi matriks dapat ditulis : $\mathcal{S}(Y, b) = (Y - X'b)'(Y - X'b)$

Atau jika panjang vektor V ditulis sebagai V , maka :

$$\mathcal{S}(Y, b) = \|Y - X'b\|^2 . \qquad \text{.............(II.3.2)}$$

Definisi :

Suatu himpunan fungsi-fungsi dari vektor Y, yaitu himpunan dari statistik $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1(Y), \ldots . \hat{\beta}_p = \hat{\beta}_p(Y)$ sedemikian hingga harga $b_j = \hat{\beta}_j$, (j=1,2,....,p) menentukan harga minimum dari $\mathcal{S}(Y, b)$ disebut himpunan dari estimasi-estimasi kuadrat terkecil dari $\{\beta_j\}$.

Persamaan Normal

Dapat diperlihatkan bahwa estimasi kuadrat terkecil dari $\{\beta_j\}$ selalu ada, tetapi tidak perlu tunggal dan setiap himpunan estimasi kuadrat terkecil dari $\{\beta_j\}$ akan memenuhi persamaan :

$$\frac{\partial \mathcal{S}(Y, b)}{\partial b_v} = 0, \text{ untuk } v = 1, 2, \ldots\ldots, p$$

sehingga didapatkan :

$$-2 \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \sum_{j=1}^{p} x_{ji} b_j \right) x_{vj} = 0, \text{ atau :}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_{vj} x_{ji} b_j = \sum_{i=1}^{n} x_{vj} Y_i \text{ , v=1,2,....,p} \qquad \text{.....(II.3.3)}$$

Secara matriks dapat ditulis : $X X' b = X Y$

dan jika diambil $R = X X'$, maka :

$$R b = X Y \qquad \text{...............(II.3.4)}$$

Persamaan yang disajikan diatas ini disebut persamaan normal.

Sekarang dimisalkan simbol $\hat{\hat{\beta}}$ sebagai sembarang penyelesaian untuk b, dan $\hat{\beta}$ adalah estimasi kuadrat terkecil dari β , maka dapat dibuktikan $\hat{\hat{\beta}} = \hat{\beta}$ atau setiap pe nyelesaian persamaan-persamaan normal merupakan himpunan dari estimasi kuadrat terkecil dan sebaliknya.

Bukti :

Dipandang ruang vektor V_n berdimensi n dan vektor $\eta = E(Y)$ sedemikian hingga :

$$\eta^{nx1} = X'\beta \qquad \ldots\ldots\ldots(II.3.5)$$

yang dapat juga ditulis sebagai :

$$\eta = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_p \xi_p$$

dengan : ξ_j^{nx1} adalah vektor kolom ke-j dari X'.

Andaikan r adalah rank dari X dan V_r adalah ruang vektor yang dibentuk oleh vektor $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_p$. Maka suatu vektor Z^{nx1} termuat dalam V_r bhb terdapat koefisien-koefisien $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_p$ sedemikian hingga :

$$Z = \sum_{i=1}^{p} b_i \xi_i \ .$$

Pada khususnya : $\eta \in V_r$ menurut (II.3.5). Ambil $Z = X'b$, maka dapat ditunjukkan bahwa $\delta(Y, b) = \|Y - Z\|^2$ mempunyai harga minimal bhb vektor Z adalah vektor $\hat{\eta}$ yang didefinisikan sebagai proyeksi dari vektor Y pada V_r. Karena $\hat{\eta} \in V_r$, maka terdapat $b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, b_p$ sedemikian hingga :

$$\hat{\eta} = b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + \ldots\ldots + b_p \xi_p \qquad \ldots\ldots(II.3.6)$$

Terlihat bahwa $\hat{\eta}$ tunggal, tetapi $\{b_j\}$ pada umumnya tidak perlu tunggal. Karena $\hat{\eta}$ adalah suatu fungsi dari Y saja dan bukan fungsi dari parameter-parameter, maka $\{b_j\}$ pada (II.2.6) dapat dinyatakan sebagai fungsi dari Y saja dan mereka adalah estimasi kuadrat terkecil.

Selanjutnya sembarang $(b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_p)$ yang hanya merupakan fungsi dari Y saja merupakan esti-

$X' \; b = \hat{\eta}$

$(Y - X' \; b) \perp V_r$

$(Y - X' \; b) \perp \xi_j$, untuk $j=1,2,\ldots\ldots,p$ ....(II.3.7)

$\xi_j' \; (Y - X' \; b) = 0$, untuk $j=1,2,\ldots\ldots,p$

$X \; (Y - X' \; b) = 0$

$X \; X' \; b = X \; Y$ (II.3.8)

Dari (II.3.8) disimpulkan bahwa b memenuhi persamaan-persamaan normal, sehingga bukti selesai.

Dengan demikian telah dibuktikan bahwa estimasi kuadrat terkecil $\hat{\hat{\beta}}_1 , \hat{\hat{\beta}}_2 , \ldots\ldots\ldots , \hat{\hat{\beta}}_p$ selalu ada dimana setiap himpunan estimasi kuadrat terkecil persamaan normal dan setiap penyelesaian $\hat{\hat{\beta}}_1 , \hat{\hat{\beta}}_2 , \ldots\ldots\ldots\ldots , \hat{\hat{\beta}}_p$ dari persamaan-persamaan normal yang merupakan fungsi dari Y saja adalah suatu himpunan dari estimasi kuadrat terkecil. Jadi simbol $\hat{\hat{\beta}}$ tidak perlu digunakan lagi dan $\hat{\beta}$ dianggap sebagai penyelesaian dari persamaan normal yang juga merupakan suatu himpunan dari estimasi kuadrat terkecil.

Definisi :

Akan digunakan simbol $\mathcal{S}_\Omega$ sebagai harga minimal dari $\mathcal{S}(Y , b)$. Jadi $\mathcal{S}_\Omega = \mathcal{S}(Y , \hat{\beta})$ ...(II.3.9) dimana $\hat{\beta}$ adalah sembarang himpunan dari estimasi kuadrat terkecil, atau sembarang penyelesaian dari persamaan-persamaan normal. $\mathcal{S}_\Omega$ didefinisikan sebagai jumlah kuadrat dari kesalahan.

Keadaan Dimana $\hat{\beta}$ Adalah Tunggal

Bentuk dimana matriks X yang berukuran (pxn) mempunyai rank p disebut bentuk matriks dengan rank maksimal , sebab pada umumnya $p \geq n$. Jika rank matriks X = p, maka persamaan (II.3.4) mempunyai penyelesaian tunggal. Dengan suatu teorema ditunjukkan bahwa rank matriks B = rank X

Karena dalam hal ini R adalah matriks yang non singulair, maka R^{-1} ada, sehingga penyelesaian yang tunggal dapat ditunjukkan dengan : $\hat{\beta} = R^{-1} X Y$ .... (II.3.10)

Dengan menggunakan (II.2.8) didapat matriks covarian dari $\hat{\beta}$, yaitu : $\Sigma_{\hat{\beta}} = (R^{-1} X) \Sigma_y (R^{-1} X)'$.

Tetapi karena R^{-1} adalah matriks simetris, jadi :

$$\Sigma_{\hat{\beta}} = \sigma^2 R^{-1} X X' R^{-1}$$

$$\Sigma_{\hat{\beta}} = \sigma^2 R^{-1} .$$

II.4 Fungsi Estimabel Dan Teorema Gauss Markoff

Definisi :

Suatu fungsi ψ dikatakan merupakan fungsi parametrik jika untuk parameter-parameter ($\beta_1, \ldots, \beta_p$),

maka : $\psi = \sum_{j=1}^{p} c_j \beta_j$ (II.4.1)

dimana (c_1 , c_2 , ... , c_p) adalah konstanta.

Jika vektor $C^{px1} = (c_1 , c_2 , \ldots , c_p)'$, maka (II.4.1) dapat ditulis sebagai $\psi = C'\beta$.

Definisi :

Suatu fungsi parametrik ψ disebut fungsi yang estimabel jika ψ mempunyai suatu estimasi tak bias yang linier atau jika dapat ditemukan suatu vektor koefisien konstan a^{nx1} sedemikian hingga :

$E (a' Y) = \psi$ .... (II.4.2)

Teorema 1 :

Fungsi parametrik $\psi = C'\beta$ adalah estimabel bhb C' adalah suatu kombinasi linier dari baris - baris matriks X'.

Bukti :

$\psi = C'\beta$ adalah estimabel bhb terdapat vektor a^{nx1}

Karena E (a' Y) = a' E (Y) = a' X'β = C'β dipenuhi untuk setiap β , maka berlaku a' X' = C'. Jadi C' kombinasi linier dari baris-baris X'.

Lemma :

Jika ψ = C'β adalah estimabel dan V_r ruang vektor yang dihasilkan oleh vektor-vektor kolom dari matriks X', maka terdapat dengan tunggal estimasi tak bias linier dari ψ, katakan (a*)' Y , a*$\in V_r$. Jika a' Y adalah sebagai estimasi tak bias linier dari ψ, maka a* adalah proyeksi dari a pada V_r.

Bukti :

Karena ψ adalah estimabel, terdapat vektor a^{nx1} sedemikian hingga E (a' Y) = ψ. Ambil a = a* + b dimana a*$\in V_r$ dan b$\perp V_r$, maka ψ = E (a' Y) = E ((a*)' Y) + E (b' Y) = E ((a* Y)). Hal ini disebabkan karena E (b' Y) = b' X'β dan b' X'=0. Dengan demikian (a*)'Y adalah suatu estimasi tak bias linier dari ψ , dengan a*$\in V_r$. Andaikan sekarang hal yang sama berlaku untuk α' Y, maka untuk setiap β berlaku :

0 = E (a*' Y) - E (α' Y) = (a*' - α') E(Y)

= (a* - α)' X'β sehingga (a* - α)' X'= 0.

Jadi (a* - α) $\perp V_r$ dan (a* - α) $\in V_r$, jadi

a* - α = 0. Terbukti (a*)' Y adalah tunggal.

Teorema 2 :

Dibawah anggapan Ω : E (Y) = X'β ; Σ_y = σ^2I setiap fungsi estimabel ψ = a'β mempunyai estimasi tak bias linier yang tunggal $\hat{\psi}$ yang mempunyai varian minimal pada klas dari setiap estimasi tak bias linier, dimana estimasi $\hat{\psi}$ dapat dihasilkan dari $\sum^{p}$ a β dengan menggantikan { β } oleh ... setiap himpunan estimasi ($\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, ... , $\hat{\beta}_p$).

Bukti :

Andaikan $(a^*)'Y$ adalah estimasi tak bias linier dari ψ dengan $a^* \in V_r$, dimana adanya dan tunggalnya terbukti dari teorema diatas. Dan andaikan pula bahwa $a'Y$ sembarang estimasi tak bias linier dari ψ. Maka a^* adalah proyeksi dari a pada V_r dan $\|a\|^2 = \|a^*\|^2 + \|a - a^*\|^2$.

Dengan menggunakan (II.1.8) untuk m = 1, didapat:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,(a'Y) &= a' \Sigma_y\, a = \sigma^2 \|a\|^2 \\ &= \sigma^2 \|a^*\|^2 + \sigma^2 \|a - a^*\|^2 \\ &= \mathrm{Var}\,((a^*)'Y) + \sigma^2 \|a - a^*\|^2 \end{aligned}$$

Sehingga : $\mathrm{Var}\,(a'Y) \geq \mathrm{Var}\,((a^*)'Y)$, dengan $\mathrm{Var}\,(a'Y) = \mathrm{Var}\,((a^*)'Y)$ hanya jika $a = a^*$.

Karena $(a^*)'Y$ adalah estimasi tak bias linier dari ψ dengan varian minimal dimana $(a^*)'Y$ adalah tunggal, maka dapat dibuktikan $(a^*)'Y = C'\hat{\beta}$.

Sekarang $(a^*)'(Y - \hat{\eta}) = 0$ dengan $\hat{\eta} = X'\hat{\beta}$ adalah proyeksi dari Y pada V_r, karena $a^* \in V_r$ dan $(Y - \hat{\eta}) \perp V_r$. Karena $C'\beta = E\,(a^*Y) = (a^*)X'\beta$ untuk sembarang β , maka $C' = (a^*)'X'$, sehingga :

$(a^*)'Y = (a^*)'\hat{\eta} = (a^*)'X'\hat{\beta} = C'\hat{\beta}$.

Definisi :

Setiap fungsi estimabel ψ dengan varian minimum, estimasi tak bias linier $\hat{\psi}$ yang tunggal disebut estimasi kuadrat terkecil dari ψ .

Sekarang sudah dipunyai $\{\hat{\beta}_j\}$ adalah estimasi kuadrat terkecil dari $\{\beta_j\}$, maka dapat diperluas dengan menyatakan :

$\sum^{p} c_i \hat{\beta}_i$ sebagai estimasi kuadrat terkecil dari sembarang fungsi linier $\sum_{j=1}^{p} c_j \beta_j$, jika $\{\hat{\beta}_j\}$ adalah sembarang himpunan estimasi kuadrat terkecil dari $\{\beta_j\}$.

Selanjutnya dikatakan bahwa estimasi kuadrat terkecil dari $\sum_{j=1}^{p} c_j \beta_j$ adalah tunggal bhb $\sum_{j=1}^{p} c_j \beta_j$ estimabel.

II.5 Bentuk Kanonik Ω. Mean Square Untuk Kesalahan

Diketahui : $\Omega \equiv E(Y) = X'\beta$, $\Sigma_y = \sigma^2 I$, rank $X' = r$.

Dipandang ruang vektor V_n dengan vektor-vektor pengamatan $Y^{n \times 1}$ punya basis orthonormal $(\rho_1, \ldots\ldots, \rho_n)$ dimana $\rho_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots\ldots\ldots, \delta_{in})'$

sehingga $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \rho_i$.

Dipandang juga $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_r)$ adalah basis orthonormal untuk V_r, yaitu ruang vektor yang dibentuk oleh vektor-vektor kolom dari X'. Kemudian dilengkapkan menjadi $(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots\ldots, \alpha_n)$ untuk V_n.

Jika diambil : $Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i \alpha_i$ .....(II.5.1)

dimana $\{Z_i\}$ adalah koordinat dari Y relatip terhadap basis yang baru, sehingga : $\alpha_i' Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' Z_i \alpha_i = Z_i$.

Sehingga dapat ditulis $Z = P Y$, dimana P matriks orthogonal dengan baris ke-i nya α_i'.

Ambil $\xi_i = E(Z_i)$, maka $\xi_i = E(\alpha_i' Y) = \alpha_i' E(Y) = \alpha_i' \eta$. Karena $\eta \in V_r$ maka $\eta \perp \alpha_i$ untuk $i > r$, akibatnya $\xi_i = 0$ untuk $i > r$. Dan matriks covarian dari Z : $\Sigma_z = P \Sigma_y P' = \sigma^2 P P' = \sigma^2 I$

Dengan demikian bentuk kanoniknya :

$$\Omega \equiv \begin{cases} Z = (Z_1, Z_2, \ldots\ldots, Z_n)' \\ E(Z_i) = \zeta_i,\ i = 1, 2, \ldots\ldots, r \\ E(Z_i) = 0,\ i = r+1, r+2, \ldots\ldots, n \\ \Sigma_z = \sigma^2 I \end{cases}$$

dimana $\zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots, \zeta_r$ dan σ^2 adalah parameter dan $\{Z_i\}$ transformasi tertentu dari pengamatan Y.

Estimasi Tak Bias Dari σ^2

Dipandang jumlah kuadrat kesalahan :

$$\mathcal{S}_\Omega = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \sum_{j=1}^{p} x_{ji} \hat{\beta}_j)^2 \qquad \text{(II.5.2)}$$

dimana $\hat{\beta}_j$ adalah sembarang himpunan estimasi kuadrat terkecil dari β_j. Dapat juga ditulis $\mathcal{S}_\Omega = \|Y - \hat{\eta}\|^2$ dimana $\hat{\eta}$ proyeksi dari Y pada V_r.

Karena $Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i \alpha_i$ dan $\hat{\eta} = \sum_{i=1}^{r} Z_i \alpha_i$, sedang basis dari bentuk kanoniknya adalah $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha_n)$ maka :

$$\mathcal{S}_\Omega = \left\|\sum_{i=1}^{n} Z_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{r} Z_i \alpha_i\right\|^2 = \left\|\sum_{i=r+1}^{n} Z_i \alpha_i\right\|^2,$$

atau $\mathcal{S}_\Omega = \sum_{i=r+1}^{n} Z_i^2$ . ... (II.5.3)

Sekarang jika $i > r$, $E(Z_i) = 0$, mengakibatkan $E(Z_i^2) = \text{Var}(Z_i) = \sigma^2$. Sehingga dari persamaan (II.5.3) didapat : $E(\mathcal{S}_\Omega) = (n-r)\, E(Z_i^2) = (n-r)\sigma^2$.

Definisi :

$s^2 = \mathcal{S}_\Omega/(n-r)$ maka $E(s^2) = E(\mathcal{S}_\Omega)/(n-r)$.

$E(s^2) = \sigma^2$, maka s^2 adalah estimasi tak bias dari

dari σ^2 dimana s^2 disebut mean square untuk kesalahan yang mempunyai derajat bebas (n - r).

II.6 Test Hipotesa H Ditentukan Dari Konfidensi Ellipsoid

Berdasarkan anggapan Ω : Y adalah $N(X'\beta^{px1}, \sigma^2 I)$ dan rank X' = r, suatu hipotesa : H : $\psi_1 = \dots = \psi_q = 0$ dengan (ψ_i) adalah fungsi-fungsi yang estimabel bebas linier , ditentukan oleh konfidensi ellipsoid :

$$(\hat{\psi} - \psi)' B^{-1} (\hat{\psi} - \psi) \leqslant q\, s^2 F_{\alpha, q, (n-r)}.$$

H ditolak bhb konfidensi ellipsoid tidak memuat titik $(\psi_1, \psi_2, \dots\dots, \psi_q) = (0, 0, \dots\dots, 0)$.

Ini berarti bahwa H ditolak bhb :

$$\hat{\psi}' B^{-1} \hat{\psi} > q\, s^2 F_{\alpha, q, (n-r)} \quad \dots\dots\dots(II.6.1)$$

Jika H adalah benar, maka probabilitas menolak H adalah α , sehingga tarap nyata untuk test hipotesa H adalah α . Test hipotesa yang baru saja disajikan oleh hipotesa H, meliputi fungsi-fungsi estimabel ($\psi_1, \dots\dots, \psi_q$) yang dipakai untuk mendefinisikan H. Berlaku juga untuk q fungsi estimabel yang lain ($\psi_1^*, \psi_2^*, \dots\dots\dots, \psi_q^*$) untuk mendefinisikan H.

II.7 Test Yang Diturunkan Dengan Likelihood Ratio Statistik F

Prinsip likelihood ratio dapat digunakan untuk menurunkan bermacam-macam test statistik yang biasa dipakai. Pada umumnya, jika dipikirkan untuk mengetest hipotesa H dengan dasar Ω diberikan simbol : $\omega = H \cap \Omega$, Definisi :

Jika Y adalah pengamatan-pengamatan atau sampel dan p(Y) adalah fungsi kepadatan dari Y, maka likeli - hood ratio statistik λ untuk mengetest H adalah :
λ = max p(Y) / max p(Y), dimana $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, karena setiap harga dari p(Y) yang mungkin dengan dasar ω , ada - lah selalu mungkin dengan dasar Ω .

Dengan likelihood ratio test, maka H ditolak jika $\lambda < \lambda_0$, dimana λ_0 dipilih untuk menyatakan tarap nyata yang layak.

Ada dua bentuk yang ekuivalen berdasar Ω dan ω dalam persoalan yang akan dihadapi, dimana untuk setiap bentuk Y berukuran (n x 1) dan $\omega = H \cap \Omega$, yaitu :

1) Ω : Y adalah $N(X'\beta , \sigma^2 I)$, rank $X^{pxn} = r$
   H : $\psi_1 = \psi_2 = ... = \psi_q = 0$, dimana (ψ_i) adalah q fungsi estimabel yang bebas linier.
2) Biasa dipakai dalam argumentasi geometrik :
   Ω: Y adalah $N(\eta , \sigma^2 I)$; $\eta \in V_r \subset V_n$
   H : $\eta \in V_{r-q} \subset V_r$; dimana V_r adalah ruang vektor yang dibentuk oleh kolom-kolom X'.

Untuk menentukan likelihood ratio statistik untuk mengetest H berdasarkan Ω , ditentukan gabungan fungsi padat dari pengamatan-pengamatan.

$P(Y) = p_1(Y_1).p_2(Y_2).......p_n(Y_n)$, dimana :

$$p_i(Y_i) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left(-1/2 (Y_i - \sum_{j=1}^{p} x_{ji}\beta_j)^2/\sigma^2 \right)$$

$$p(Y) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp(-1/2 \mathcal{S}(Y,\beta)/\sigma^2) \quad ..(II.7.1)$$

dengan $\mathcal{S}(Y ,\beta) = \|Y - X'\beta\|^2$.

Andaikan $\Omega = \Omega_1$; $\omega = \Omega_2$; $V_n = V_1$;

$V_{r-q} = V_2$, maka akan dicari maksimum dari :

$$p(Y) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp(-1/2\,\sigma^{-2}\,\|Y - \eta\|^2) \quad \ldots(II.7.2)$$

untuk $0 < \sigma^2 < \infty$ dan $\eta \in V_i$, $i = 1$, 2.

1) Jika σ^2 tetap maka (II.7.2) akan maksimal apabila $\|Y - \eta\|^2$ minimal, jadi jika η proyeksi dari Y pada V , sehingga :

$$\max p(Y) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp(-1/2\, S_{\Omega_i}/\sigma^2) \quad \ldots(II.7.3)$$

2) Jika S_{Ω_i} tetap :

$$\ln p(Y) = -n/2 \ln(2\pi\sigma^2) - 1/2(S_{\Omega_i}/\sigma^2) \quad (II.7.4)$$

$$\partial \ln p(Y) / \partial\sigma^2 = -n/2\sigma^2 + S_{\Omega_i} / 2\sigma^4 = 0.$$

Jadi $n / 2\sigma^2 = S_{\Omega_i} / 2\sigma^4$, maka $2n\sigma^4 = 2\sigma^2 S_{\Omega_i}$

$$\sigma^2 = S_{\Omega_i} / n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II.7.5)$$

$$\partial^2 \ln p(Y) / \partial(\sigma^2)^2 = n / 2\sigma^4 - S_{\Omega_i} / 2\sigma^6.$$

Untuk $\sigma^2 = S_{\Omega_i} / n$, maka $\partial \ln p(Y) / \partial(\sigma^2)^2 < 0$

Jadi (II.7.4) maksimum untuk $\sigma^2 = S_{\Omega_i} / n$.

Sekarang (II.7.5) disubstitusikan ke (II.7.3) :

$$\max p(Y) = (2\pi\, S_{\Omega_i} / n)^{-n/2} \exp(-n/2\, S_{\Omega_i} / S_{\Omega_i})$$

$$\cong (2\pi\, S_{\Omega_i} / n)^{-n/2} \exp(-n/2)$$

$$\lambda = \frac{(2\pi\, S_\omega / n)^{-n/2} \exp(-n/2)}{(2\pi\, S_\Omega / n)^{-n/2} \exp(-n/2)}$$

$$= (S_\omega / S_\Omega)^{-n/2} \quad (II.7.6)$$

$\hat{\eta}_\Omega$ adalah proyeksi dari Y pada V_r dan $\hat{\eta}_\omega$ adalah proyeksi dari Y pada V_{r-q}. Sehingga $S_\Omega = \|Y - \eta_\Omega\|^2$ dan $S_\omega = \|Y - \eta_\omega\|^2$. Dalam praktek statistik :

$$F = (n - r) / q \cdot (S_\omega - S_\Omega) / S_\Omega \qquad \text{(II.7.7)}$$

bisa dipakai disamping λ.

Hubungan F dan λ dapat ditulis :

$$F = F(\lambda) = (n - r) / q (\lambda^{-2/n} - 1).$$

Jika $F_o = F(\lambda_o)$ dan $\lambda < \lambda_o$, maka H ditolak bhb $F > F_o$.

II.8 Bentuk Kanonik Untuk H dan Ω. Distribusi Dari F.

Untuk ruang vektor $V_{r-q} \subset V_r \subset V_n$, maka dapat ditentukan basis orthonormal $(\alpha_{q+1}, \alpha_{q+2}, \ldots, \alpha_r)$ untuk V_{r-q}. Dapat diperluas menjadi basis orthonormal $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_r)$ untuk V_r, dan dapat diperluas lagi menjadi basis orthonormal $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$ untuk V_n.

Misal $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ adalah koordinat Y relatip terhadap basis $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Maka bentuk kanoniknya :

$$\Omega : \begin{cases} Z_i \sim NID(\zeta_i, \sigma^2) \\ \zeta_{i+1} = \ldots\ldots = \zeta_n = 0 \\ \text{atau } E(Z_i) = 0,\ i > r \end{cases}$$

$$H : \zeta_1 = \zeta_2 = \ldots\ldots = \zeta_q = 0.$$

Karena $\hat{\eta}_\Omega$ dan $\hat{\eta}_\omega$ adalah proyeksi-proyeksi dari $Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i \alpha_i$ pada V_r dan V_{r-q}, maka :

$$\hat{\eta}_\Omega = \sum_{i=1}^{r} Z_i \alpha_i \ ; \ \hat{\eta}_\omega = \sum_{i=r+1}^{r} Z_i \alpha_i .$$

$$S_\Omega = \|Y - \hat{\eta}_\Omega\|^2 = \left\|\sum_{i=r+1}^{n} z_i \alpha_i\right\|^2$$

$$= \sum_{i=r+1}^{n} z_i^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II.8.1)}$$

$$S_\omega = \|Y - \hat{\eta}_\omega\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{q} z_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{n} z_i\alpha_i\right\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{q} z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} z_i^2 \;. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II.8.2)}$$

Maka : $S_\omega - S_\Omega = \sum_{i=1}^{q} z_i^2$ . ... (II.8.3)

<u>Teori Distribusi Berdasarkan Ω</u>

Himpunan random variabel ($Z_{r+1}, Z_{r+2}, \ldots\ldots\ldots, Z_n$) dan (Z_1 , Z_2 , ... , Z_q) pada (II.8.1) dan (II.8.2) adalah saling bebas, sehingga S_Ω dan ($S_\omega - S_\Omega$) adalah saling bebas pula. Karena E (Z_i) = 0 untuk $i > r$; maka (II.8.1) didapat bahwa S_Ω / σ^2 didistribusikan menurut distribusi $\chi^2_{(n-r)}$.

Karena ($S_\omega - S_\Omega$) / $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{q} (Z_i / \sigma)^2$

dimana Z_i / σ didistribusikan N(μ_i/σ , 1) maka dari definisi "non central chi-square" didapat $(S_\omega - S_\Omega)/\sigma^2$ didistribusikan $\chi^2_{q,\delta}$ dimana non centrality parameternya adalah :

$$\delta = \left(\sum_{i=1}^{q} \mu_i^2 / \sigma^2 \right)^{1/2}.$$

Dan akhirnya dari definisi "non central F", maka :

$F = (n - r)/q \cdot (S_\omega - S_\Omega)/S_\Omega$ didistribusikan menurut distribusi $F_{q\,,\,(n-r)\,,\,\delta}$.

Khusus berdasarkan ω , $\delta = 0$ dan $F_{q\,,\,(n-r)}$, sehingga test F untuk H berdasar Ω dengan tarap nyata α ,

II.9 Ekuivalensi Dari Dua Buah Test

Telah diturunkan dua buah test berdasarkan Ω : Y adalah $N(X'\beta \ , \sigma^2 I)$ dan rank $X' = r$, dari hipotesa $H : \psi_1 = \psi_2 = \ldots\ldots = \psi_q = 0$, dimana (ψ_i) adalah q buah fungsi estimabel yang bebas linier.

Test H dengan dasar konfidensi ellipsoid, H ditolak dengan tarap nyata α bhb $\hat{\psi}' B^{-1} \hat{\psi} > q\ s^2\ F_{\alpha,\ q\ ,(n-r)}$ dimana $(\hat{\psi}_i)$ estimasi kuadrat terkecil dari (ψ_i), $B = \sigma^{-2} \Sigma_{\hat{\psi}}$ dan $s^2 = S_\Omega / (n - r)$.

Likelihood ratio test (F - test) dari H dengan tarap nyata α , H ditolak bhb

$$\frac{n-r}{q} \ \frac{S_\omega - S_\Omega}{S_\Omega} > F_{\alpha\ ,\ q\ ,\ (n-r)}.$$

Jadi $S_\omega - S_\Omega > q\ s^2\ F_{\alpha,\ q\ ,\ (n-r)}$.

Untuk membuktikan bahwa kedua test sama, cukup dibuktikan : $\hat{\psi}' B^{-1} \hat{\psi} = S_\omega - S_\Omega$ ...... (II.9.1)

Bukti :

Dipilih himpunan (ψ_i^*) untuk mendefinisikan H, dimana $\psi_i^* = \xi_i$, yaitu $E (Z_i)$ dimana Z_i adalah variabel kanonik. Berdasarkan Ω setiap himpunan dari harga-harga $(\xi_1 , \xi_2 , \ldots\ldots , \xi_r)$ adalah mungkin, sebab ξ_i adalah koordinat ke-i dari η relatip terhadap basis orthonormal $(\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots.. , \alpha_n)$ dimana $(\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots.. , \alpha_r)$ menghasilkan V_r dan dengan demikian $\eta = \sum_{i=1}^{r} \xi_i \alpha_i \in V_r$, untuk setiap himpunan dari harga $(\xi_1 , \xi_2 , \ldots\ldots , \xi_r)$. Jadi (ψ_i^*) adalah

$\varphi^{nx1} = P\eta = P X'\beta$, dimana P adalah matriks orthogo - nal, sehingga ($\varphi_1 , \varphi_2 , \ldots , \varphi_q$) adalah fungsi linier dari (β_j). Mereka adalah fungsi-fungsi estimabel sebab bentuk linier Z_i adalah estimasi tak bias dari φ_i. Hal ini disebabkan karena setiap estimasi kuadrat terke - cil dari suatu fungsi estimabel harus merupakan kombinasi linier dari $Z_1 , Z_2 , \ldots , Z_r$, yaitu : $\psi_i^* = \sum_{i=1}^{r} c_{ij} Z_j$.

Karena itu ψ_i^* merupakan estimasi tak bias dari φ_i berdasar Ω bhb $\varphi = \sum_{j=1}^{r} c_{ij}\varphi_j$, identik dalam ($\varphi_1 , \varphi_2 , \ldots , \varphi_r$) yaitu bhb $c_{ij} = \delta_{ij}$ atau $\psi_i^* = Z_i$. Sekarang dipunyai :

$$\hat{\psi}' B^{-1}\hat{\psi} = (\hat{\psi}^*)'(B^*)^{-1}\hat{\psi}^* = \sum_{i=1}^{q} \hat{\psi}^{*2} = \sum_{i=1}^{q} Z_i^2 .$$

Karena $B^* = \sigma^{-2} \Sigma_{\hat{\psi}^*}$ dan $\Sigma_{\hat{\psi}^*} = \sigma^2 I$, maka :

$$\hat{\psi}' B^{-1}\hat{\psi} = \sum_{i=1}^{q} (\hat{\psi}_i^*)^2 = \sum_{i=1}^{q} Z_i^2 .$$

Terbukti bahwa : $\hat{\psi}' B^{-1}\hat{\psi} = S_\omega - S_\Omega$. (II.9.2)