BAB III

THEOREMA THEOREMA PENUNJANG DAN BEBERAPA DISTRIBUSI KONTINU YANG PENTING

Untuk mempermudah pembahasan selanjutnya, maka dalam permulaan bab ini akan diberikan beberapa rumus dari kalkulus dan theorema yang diperlukan.

III.1. BEBERAPA RUMUS DARI KALKULUS.

Seperti telah dikemukakan dalam bab I, theorema theorema yang diberikan dalam bab ini tidak disertai bukti, sebab yang diperlukan penggunaannya saja.

THEOREMA 3.1.

Jika f(x) dan g(x) dua fungsi yang masing-masing mempunyai turunan (derivatif) ke n, maka

$$D^n(f(x).g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}(f(x)) \cdot D^k(g(x))$$

$$\text{dimana : } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{dan } D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

THEOREMA 3.2.

Jika $f(x,\alpha)$ adalah fungsi kontinu dalam x dan α mempunyai turunan turunan parsial :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial\alpha}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha.\partial x}$ yang kontinu serta a (α) dan b (α) adalah fungsi fungsi yang dapat didiferensialkan dalam α maka :

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot dx + f(b,\alpha)\cdot\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\cdot\frac{da}{d\alpha}\,.$$

THEOREMA 3.2. ini banyak digunakan dalam menghitung integral tertentu dan juga memberikan hasil hasil yang penting.

CONTOH 1 : Mengingat definisi fungsi pembentuk momen & μ'_r di halaman 6 : $\frac{d^r}{dt^r} \; M_X(t) \; = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}.x^r.f(x)\, dx$,

sehingga didapat : $\mu'_r \; = M^{(r)}(0)$.

CONTOH 2 : Dari (2.2.2b) didapat :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)\, dy\, du \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

CONTOH 3:

Dari hasil integral;

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\cosh z + \cos t} = \int_1^{\infty} \frac{2\, du}{(u + \cos t)^2 + \sin^2 t} = \frac{t}{\sin t} ,$$

maka menggunakan theorema 3.2. diatas, didapat

$$\frac{d^{\,n-2}}{d(\cos t)^{n-2}} \left(\frac{t}{\sin t} \right) = \int_0^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}.(n-2)!\, dz}{(\cosh z + \cos t)^{n-1}} .$$

Sub bab ini ditutup dengan menuliskan beberapa rumus tentang integral tertentu yang akan banyak digunakan nantinya.

1. $\int_0^{\infty} e^{-au}.\, u^{n-1}\, du = \Gamma(n) / a^n.\; n > 0,\; a > 0$ (3.1.1.)

2. $\int_0^{\infty} u^{a-1}.\, (1+tu)^{-b}\, du = B\,(a,b-a) / t^a,$ (3.1.2)

$0 < a < b$

$t > 0$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\,(-(x-a)^2/\,2b^2)\, dx = b\sqrt{2\pi}\,,\;\; b > 0.$ (3.1.3)

III.2. THEOREMA THEOREMA PENUNJANG.

THEOREMA 3.3. Suatu fungsi distribusi ditentukan dengan tunggal oleh fungsi karakteristiknya atau jika ada oleh fungsi pembentuk momennya.

Jadi misalkan diketahui X variabel random dengan fungsi pembentuk momennya ada, katakan $M_X(t)$.

Jika Y adalah sembarang variabel random yang terdefinisi pada ruang probabilitas yang sama dengan X dan apabila ternyata fungsi pembentuk momen dari Y ini, katakan $M_Y(t)$, adalah sama dengan $M_X(t)$, maka menurut theorema ini distribusi dari Y adalah sama dengan distribusi dari X.

THEOREMA 3.4.

Diberikan X variabel random kontinu dengan :

fkp f(x) dan $\mathcal{X} = \{ x \in R \mid f(x) > 0 \}$

Jika :

1. $y = g(x)$ fungsi satu satu dari $\mathcal{X}$ pada η
2. $\frac{d}{dy} g^{-1}(y)$ kontinu dan tidak nol untuk setiap $y \in \eta$

maka $Y = g(X)$ suatu variabel kontinu dengan fkp :

$$h(y) = f(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \cdot I_\eta(y)$$

dimana :

$$I_\eta(y) = \begin{cases} 1 & , y \in \eta \\ 0 & , y \notin \eta \end{cases}$$

THEOREMA 3.5.

Misalkan $X_1, X_2, \ldots. X_n$ adalah n variabel random kontinu dengan fkb $f(x_1, x_2, \ldots. x_n)$.

$\mathcal{X} = \{ (x_1, x_2, \ldots x_n) \in R^n \mid f(x_1, x_2, \ldots. x_n) > 0 \}$

Jika :

1. $y_i = \phi_i(x_1, x_2, \dots x_n)$, $i = 1, 2, \dots\dots n$.

   adalah fungsi satu satu dari $\mathcal{X}$ pada η

2. Turunan turunan parsial dari fungsi fungsi invers $x_i = \psi_i\ (y_1, y_2, \dots y_n)$, $i = 1, 2, \dots n$ kontinu dalam η .

3. Determinan :

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots\dots, \psi_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots\dots y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{y_1} & \frac{\partial\psi_1}{y_2} & \dots\dots & \frac{\partial\psi_n}{y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\psi_n}{y_1} & \frac{\partial\psi_n}{y_2} & \dots\dots & \frac{\partial\psi_n}{y_n} \end{vmatrix}$$

tidak nol untuk setiap $(y_1, y_2, \dots\dots, y_n) \in \eta$

Maka fkb dari $Y_1, Y_2, \dots\dots Y_n$ adalah :

$$g(y_1, y_2, \dots y_n) = \left|\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots y_n)}\right| f(\psi_1, \dots \psi_n) . I_\eta(y_1, \dots, y_n)$$

dimana :

$$I_\eta(y_1, y_2, \dots y_n) = \begin{cases} 1 & , (y_1, y_2, \dots\dots y_n) \in \eta \\ 0 & , (y_1, y_2, \dots\dots y_n) \notin \eta \end{cases}$$

THEOREMA 3.6.

Syarat perlu dan cukup dua variabel random kontinu X dan Y independen adalah fkb nya dapat dinyatakan sebagai hasil ganda suatu fungsi dalam x saja dan suatu fungsi dalam y saja.

THEOREMA 3.7.

Jika $X_1, X_2, \dots X_n$ n variabel random yang independen dan $g_1(.)$, $g_2(.)$ ..... $g_n(.)$ adalah n fungsi sedemikian hingga $Y_i = g_i(X_i)$, $i = 1, 2, \dots$ n adalah variabel variabel random maka $Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n$ inde - penden.

THEOREMA 3.8.

Jika $X_1, X_2, \ldots. X_n$ independen maka :

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(g_i(X_i)\right)$$

III.3. HUBUNGAN ANTARA MOMEN, KUMULAN DAN FUNGSI PEMBENTUK MOMEN.

$$M_X(t) = E\left(\exp\,(tX)\right) = E\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} (tX)^r / r!\right)$$

$$= 1 + t\mu_1' + \frac{t^2}{2!}\mu_2' + \ldots\ldots\ldots \qquad (3.3.1)$$

Jadi μ_r' = Koefisien dari $t^r/r!$ dalam ekspansi diatas

Sekali lagi karena μ_1' sering digunakan, maka biasa - nya cukup ditulis dengan notasi μ saja.

$$E\left(e^{t(X-\mu)}\right) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r .\, t^r/r! \qquad (3.3.2)$$

sehingga :

$$K(t) = \ln M_X(t) = t\mu + \ln\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r .\, t^r/r!\right)$$

Dan mengingat $\ln(1+x) = x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots\ldots\ldots\ldots$

didapat

$$K(t) = t\mu + \left(\mu_2 \frac{t^2}{2!} + \mu_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\mu_2 \frac{t^2}{2!} + \mu_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots\ldots\right)^2 + \ldots\ldots$$

Mengingat definisi k_r bahwa : (lihat halaman 7)

$$K(t) = \sum_{r=1}^{\infty} k_r .\, t^r/r! \text{ , diperoleh}$$

$$k_1 = \mu,\; k_2 = \mu_2,\; k_3 = \mu_3,\; k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 .$$

Dari hubungan diatas koefisien Karl Pearson dapat ditulis :

$$\beta_1 = \gamma_1^2 = \frac{k_3^2}{k_2^3} \quad , \gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{k_4}{k_2^2} \qquad (3.3.3)$$

III.4. BEBERAPA DISTRIBUSI KONTINU YANG PENTING.

Dalam sub bab ini akan dibicarakan beberapa distribusi yang akan digunakan dalam bab bab selanjutnya.

III.4.1. DISTRIBUSI NORMAL.

Fkp dari distribusi ini diberikan oleh :

$$f(x) = (1 / 2\pi b^2)^{\frac{1}{2}} \exp(-(x-a)^2 / 2b^2) \qquad (3.4.1)$$

dimana parameter $b > 0$ dan $-\infty < a < \infty$

Jadi jika X variabel random kontinu dengan fkp ber - bentuk demikian maka X diketakan berdistribusi normal.

Dari (3.1.3) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x-a)^2 / 2b^2)\, dx = b\sqrt{2\pi},$$

maka apabila kedua ruasnya didiferensialkan ke a, dengan menggunakan theorema 3.2 akan didapat :

$$-\frac{1}{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a) \exp(-(x-a)^2 / 2b^2)\, dx = 0$$

sehingga $-\frac{\sqrt{2\pi}}{b} \cdot E(X-a) = 0$ yang berarti $E(X) = a$.

Kembali dengan mengingat rumus (3.1.3) dan dengan mengambil substitusi $z = (x-a)/b$ terlebih dahulu diperoleh :

$$E(\exp(t(X-a))) = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp(t(x-a)) \cdot \exp(-(x-a)^2/2b^2)dx$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tbz - z^2/2)\, dz =$$

$$= \exp(t^2b^2/2) \cdot (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(z-bt)^2/2)\, dz$$

$$= \exp(t^2b^2/2) \cdot (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \exp(t^2b^2/2).$$

Akibatnya :

1. $M_X(t) = \exp\,(at)\;.\;E(\exp(t(X-a)) = \exp\;(at + t^2b^2/2)$.

2. $k_r = 0,\; r > 2$, sebab dari definisi : $K(t) = \sum_{r=1}^{\infty} k_r . t^r/r!$
sedangkan $K(t) = \ln M_X(t) = at + t^2b^2/2$.

3. a. $\mu_{2n+1} = 0$.

b. μ_{2n} = koefisien dari $t^{2n}/(2n)!$ dalam
$\sum_{n=0}^{\infty} (t^2b^2/2)^n/n!$ (ingat (3.3.2))

Jadi $\mu_{2n} = (2n)!\;(b^2/2)^n/n!$

$= 1 . 3 . 5 .... (2n-3)\,(2n-1)\,b^{2n},\; n = 1,2,..$

Beberapa hasil penting yang didapat dari uraian di - atas tentang distribusi normal adalah :

1. $E(X) = a$, $\mu_2 = b^2$.

2. $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 3$. (ingat (3.3.3) dan $k_r = 0,\; r > 2$)

3. $M_X(t) = \exp\;(at + t^2b^2/2\,)$, $t \in R$.

Berdasarkan persamaan (3.4.1) dan kenyataan bahwa $E(X) = a$ dan $\mu_2 = b^2$ maka mudah diterima bahwa :
Jika X variabel random kontinu dengan fkp :

$$f(x) = (\sigma\sqrt{2\pi}\,)^{-1} \exp\;(\,-\,(x-\mu\,)^2/2\,.\sigma^2)\;,\; \sigma > 0$$

Maka X dikatakan berdistribusi normal dengan mean μ dan varian σ^2, biasa ditulis dengan notasi $X \sim N\,(\mu\,,\sigma^2)$.
Jika Z berdistribusi normal dengan mean 0 dan varian 1 maka Z diketakan berdistribusi normal standar.

Dengan memperhatikan bentuk fkp dari $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ diatas maka $\ln f(x) = -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - (x-\mu)^2/2\sigma^2$. Jika hasil ini didiferensialkan ke x :

Didapat $f'(x) = -(x-\mu)\, f(x) \;/\sigma^2$,

sehingga : $f''(x) = -(f(x) + (x-\mu)\, f'(x)) \;/\sigma^2 =$

$$- (1 - (x-\mu)^2/\sigma^2)\, f(x) \;/\sigma^2.$$

Jadi : $f'(x) = 0$ untuk $x = \mu$ dan karena

$f''(\mu) = -(\sigma^3\sqrt{2\pi})^{-1} < 0$ maka disimpulkan $x = \mu$ adalah modus dari X. (baca kembali definisi modus dihalaman 7).

III.4.2. DISTRIBUSI GAMMA.

Jika X variabel random kontinu dengan fkp :

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot x^{r-1} \cdot e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,\infty)}(x). \qquad (3.4.2a).$$

dimana $\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{r-1}\, du$; $r > 0$, $\lambda > 0$

maka X dikatakan berdistribusi gamma dengan parameter parameter λ dan r, biasa dinyatakan dengan $X \sim G(\lambda, r)$.

Dengan menggunakan (3.1.1) dan penderetan :

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \quad , |x| < 1 ,$$

didapat :

$$M_x(t) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} \cdot x^{r-1} \cdot dx$$

$$= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot \frac{\Gamma(r)}{(\lambda - t)^r} \text{ untuk } \lambda - t > 0$$

$$= (1 - \frac{t}{\lambda})^{-r} \quad \text{untuk } t < \lambda \qquad (3.4.2b)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r+k-1)\,!}{\lambda^k \,.\, (r-1)\,!} \,.\, \frac{t^k}{k!}$$

Jadi $\mu'_k = r.(r+1)\,.\,(r+2)\,\ldots\,(r+k-2)\,.\,(r+k-1)\,/\,\lambda^k$
(ingat (3.3.1)).

Khususnya : $E(X) = r/\lambda$, $E(X^2) = r\,.\,(r+1)\,/\,\lambda^2$,

sehingga $\mu_2 = E(X^2) - (\,E(X))^2 = r\,/\,\lambda^2$. (3.4.2c).

III.4.3. DISTRIBUSI BETA.

Variabel random kontinu x yang berdistribusi dengan fkp :

$$f(x) = \frac{1}{B\,(a,b)}\, x^{a-1} \,.\, (1-x)^{b-1}\; I_{(0,1)}\,(x) \quad ,$$

dimana $B\,(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}\,(1-u)^{b-1}\,du$, $a > 0$, $b > 0$

dikatakan berdistribusi Beta jenis pertama dengan parameter a dan b, notasi : $X \sim \beta_1\,(a,b)$.

Sedangkan variabel random kontinu Y dengan fkp :

$$g(y) = \frac{1}{B\,(a,b)}\, y^{a-1} \,.\, (1+y)^{-(a+b)} \,.\, I_{(0,\infty)}\,(y) \quad ,$$

dimana : $a > 0$
$b > 0$

disebut berdistribusi Beta jenis kedua dengan parameter a&b

Notasi : $Y \sim \beta_2(a,b)$.

III.4.4. DISTRIBUSI NORMAL DUA VARIABEL.
(BIVARIATE NORMAL DISTRIBUTION).

Pandang fungsi :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi.\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \,.\, e^{-q/2} \qquad (3.4.4a)$$

dimana, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ dan $-1 < \rho < 1$,

$$q = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right)$$

Akan ditunjukkan f (x,y) suatu fkb. (lihat (2.2.1))

Jelas f (x,y) $\geqslant$ 0.

Didefinisikan : $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy$.

Sekarang :

$$(1-\rho^2)\ q = \left(\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) - \rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right)^2 + (1-\rho^2)\cdot\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{y-b}{\sigma_2}\right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2$$

dimana $b = \mu_2 + \rho(\mu_2/\mu_1)\cdot(x-\mu_1)$. jadi :

$$f_1(x) = \frac{\exp\left(-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2\right)}{\sigma_1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-(y-b)^2/(2\sigma_2^2(1-\rho^2))\right)}{\sigma_2 \cdot \sqrt{(1-\rho^2)}\cdot(2\pi)^{1/2}}\ dy$$

dan mengingat (3.1.3) diperoleh :

$$f_1(x) = (\sigma_1 . \sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2\right).$$

Sehingga akhirnya $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ dx = 1.$

Jadi terbukti f(x,y) suatu fkb dari dua variabel random X dan Y.

Fkb dari bentuk ini dikatakan normal dua variabel dan X,Y dikatakan berdistribusi normal dua variabel.

Jelas $f_1(x)$ adalah fkp marginal dari X jadi $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ (ingat contoh 2 hal. 15).

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Sekarang akan dicari $M_{X,Y}(t_1, t_2)$.

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(t_1x + t_2y)\ .\ f(x,y)\ dy\ dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x} \cdot f_1(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2 y} \cdot \frac{\exp\left(-(y-b)^2/2\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)}{\sqrt{1-\rho^2}\cdot\sigma_2\cdot\sqrt{2\pi}}\, dy \right) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x} \cdot f_1(x)\ (\ *\ )\ dx,$$

dimana (*) dapat dipandang sebagai fungsi pembentuk mo - mendari suatu variabel random kontinu yang berdistribusi normal dengan mean $\mu_2 + \rho(\sigma_2/\sigma_1)(x - \mu_1)$ dan varian $\sigma_2^2(1-\rho^2)$, (lihat kembali halaman 19). Jadi

$$(\ *\ ) = \exp\left(t_2\left(\mu_2 + (\rho\sigma_2)(x-\mu_1)/\sigma_1\right) + t_2\sigma_2^2(1-\rho^2)/2\right)$$

sehingga :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \exp\left(\mu_2 t_2 - \rho\sigma_2 \mu_1 t_2/\sigma_1 + t_2^2\sigma_2^2(1-\rho^2)/2\right).(**),$$

dimana

$$(**) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left((t_1 + t_2\rho\sigma_2/\sigma_1)\, x\right) f_1(x)\, dx.$$

Padahal $E(e^{tX}) = \exp(\mu_1 t + \sigma_1^2 . t^2/2)$, untuk setiap $t \in R$ sehingga $M_{X,Y}(t_1,t_2) = \exp(\ *\ *\ *\ )$, dimana

$$(\ *\ *\ *) = \mu_2 t_2 - \rho\sigma_2.\sigma_1 t_2/\sigma_1 + t_2^2.\sigma_2^2(1-\rho^2)/2$$

$$+ \mu_1(t_1 + t_2\rho\sigma_2/\sigma_1) + \sigma_1^2(t_1 + t_2\rho\sigma_2/\sigma_1)^2/2.$$

Jadi $M_{X,Y}(t_1,t_2) =$

$$\exp\left(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 \cdot t_2^2)/2\right)$$

(3.4.4b).

III.5. BEBERAPA CONTOH PENGGUNAAN THEOREMA.

Contoh 1 : Jika variabel random $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, maka variabel random $Z = (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$.

Bukti :

Misalkan fungsi distribusi kumulatif dari Z adalah $F(z)$.

$$F(z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq \sigma z + \mu), \text{ karena } \sigma > 0$$

$$= \int_{-\infty}^{\sigma z+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right) dx.$$

Dengan menggunakan Theorema 3.2. didapat : fkp dari Z adalah : $f(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$, sehingga terbukti $Z \sim N(0,1)$. (lihat kembali halaman 19)

Contoh 2: Jika $X_1, X_2, \ldots X_n$ adalah n variabel random independen yang masing-masing berdistribusi normal $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. .... $N(\mu_n, \sigma_n^2)$ maka $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ dengan $a_i \in R$, berdistribusi $N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sigma_i^2\right)$.

Bukti :

Diketahui $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ sehingga $M_{X_i}(t) = \exp(\mu_i t + t^2\sigma_i^2/2)$

Dengan menggunakan theorema 3.8 :

$$M_Y(t) = E\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(a_i t X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} E(\exp(a_i t X_i))$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\mu_i(a_i t) + (a_i t)^2 \sigma_i^2/2)$$

$$= \exp\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right) t + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sigma_i^2\right) t^2/2\right).$$

Padahal ruas kanan terakhir ini adalah fungsi pembentuk momen dari $N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sigma_i^2\right)$, (Perhatikan kembali hasil 3 di hal. 19) sehingga menurut theorema 3.3. terbuktilah pernyataan diatas.

Dari contoh 2 diatas dapat diturunkan : jika $X_1, X_2, \ldots X_n$

suatu sampel random ukuran n dari populasi yang berdistribusi N (μ, σ^2) maka $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

Contoh 3. Jika X dan Y berdistribusi normal dua variabel dengan parameter parameter $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ dan ρ, maka $Z = aX + bY + c$ dengan $a,b,c \in R$ berdistribusi $N(a\mu_1 + b\mu_2 + c,\ a^2\sigma_1^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2 + b^2\sigma_2^2)$.

Bukti :

Dari sub bab III.4.4. telah didapat :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \exp\left(t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + (t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2\sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)/2\right),$$

sehingga dari kenyataan bahwa :

$$M_Z(t) = \exp(ct) \cdot M_{X,Y}(at, bt)$$

$$= \exp\left((a\mu_1 + b\mu_2 + c)\,t + (a^2\sigma_1^2 + 2\,ab\rho\sigma_1\sigma_2 + b^2\sigma_2^2)\,t^2/2\right).$$

dan membandingkan hasilnya dengan hasil penting No. 3 di halaman 19 maka menggunakan theorema 3.3. terbukti contoh diatas.

Contoh 4 : Jika $X \sim G(1,m)$, $Y \sim G(1,n)$ dan X,Y independen maka $U = X + Y$ dan $V = X/Y$ independen serta $U \sim G(1,m+n)$ dan $V \sim \beta_2(m,n)$.

Bukti : Contoh ini menggunakan theorema 3.5. dalam subbab III.2.

X dan Y independen maka fkbnya : (lihat kembali (2.2.3) & (3.4.2a)).

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} \cdot x^{m-1} \cdot y^{n-1} / (\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)) \cdot I_{\mathcal{X}}(x,y).$$

dimana $\mathcal{X} = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\}$

oleh transformasi $u = x+y$ dan $v = x/y$, dibawa ke $\eta = \{ (u,v) \mid u > 0 , v > 0 \}$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{-u}{(1+v)^2} , \quad I_{\eta}(u,v) = I_{(0,\infty)}(u) . I_{(0,\infty)}(v).$$

Jadi Fkb dari U dan V :

$$g(u,v) = \frac{1}{\Gamma(m).\Gamma(n)} e^{-u} \cdot \left(\frac{uv}{1+v}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{u}{1+v}\right)^{n-1} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} I_{\eta}(u,v)$$

$$= \frac{e^{-u} . u^{m+n-1}}{\Gamma(m+n)} . I_{(0,\infty)}(u) . \frac{v^{m-1} . I_{(0,\infty)}(v)}{B(m,n) . (1+v)^{m+n}} ,$$

sehingga menggunakan theorema 3.6. terbukti U dan V indepen den. Adapun fungsi fungsi kepadatan marginalnya adalah sebagai berikut :

$$f(u) = \frac{e^{-u} . u^{m+n-1}}{\Gamma(m+n)} I_{(0,\infty)}(u) . \frac{1}{B(m,n)} . \int_0^\infty \frac{v^{m-1}}{(1+v)^{m+n}} dv$$

$$= \frac{e^{-u} . u^{m+n-1}}{\Gamma(m+n)} I_{(0,\infty)}(u) \qquad \text{(ingat (3.1.2))}.$$

$$h(v) = \frac{v^{m-1} . I_{(0,\infty)}(v)}{B(m,n).(1+v)^{m+n}} \quad \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty e^{-u} . u^{m+n-1} du$$

$$= \frac{v^{m-1} . (1+v)^{-(m+n)}}{B(m,n)} . I_{(0,\infty)}(v) \qquad \text{(ingat 3.1.1))}$$

dan dengan memperhatikan kembali III.4.2 & III.4.3 , terbukti .

Contoh 5. Jika X dan Y dua variabel random kontinu dengan fkb f(x,y) dan fungsi pembentuk momennya $M(t_1,t_2)$ ada, maka menggunakan theorema 3.2. didapat :

$$\frac{\partial^{k+m} M(t_1,t_2)}{\partial t_1^k . \partial t_2^m} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k . y^m . e^{t_1 x + t_2 y} . f(x,y) \, dx \, dy.$$

jadi didapat $E(X^k Y^m) = \left. \frac{\partial^{k+m} M(t_1,t_2)}{\partial t_1^k . \partial t_2^m} \right|_{t_1 = t_2 = 0}$

Dengan menggunakan hasil diatas, akan ditentukan koefisien korelasi dari X dan Y yang berdistribusi normal dua variabel dengan parameter parameter $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ dan ρ .

Misalkan :

$$(\star) = t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + (t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho\, t_1 t_2 \sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)/2$$

$$(\star\star) = \frac{\partial(\star)}{\partial t_1} = \mu_1 + t_1\sigma_1^2 + t_2\sigma_1\sigma_2$$

$$(\star\star\star) = \frac{\partial(\star)}{\partial t_2} = \mu_2 + t_2\sigma_2^2 + \rho\, t_1\sigma_1\sigma_2 .$$

Dari sub bab yang lalu telah didapat bahwa :

$M(t_1,t_2) = \exp(\star)$ sehingga

$$E(XY) = \frac{\partial^2 M(t_1,t_2)}{\partial t_1 . \partial t_2} \Bigg| \quad t_1 = t_2 = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1}((\star\star\star)\exp(\star)) \Big| \quad t_1 = t_2 = 0$$

$$= (\rho\sigma_1\sigma_2 \exp(\star) + (\star\star\star) . (\star\star)\exp(\star))\Big|_{t_1=t_2=0}$$

$$= \rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu_2$$

Dan mengingat $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ dan $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ (lihat kembali sub bab III 4.4.) :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) . E(Y) = \rho\sigma_1 . \sigma_2 ,$$

sehingga akhirnya $\rho_{X,Y} = \rho$.

Contoh 6 :

Misalkan X_i adalah variabel variabel random kontinu yang masing-masing berdistribusi $G(1,r_i)$, $i = 1,2, \ldots . n+1$.

Akan dicari fkb dari $Y_i = X_i / (X_1 + X_2 + \ldots . + X_{n+1})$, $i = 1,2, \ldots . n$.

Agar dapat digunakan theorema 3.5. maka perlu didefinisikan satu variabel random lagi, disini diambil :

$Y_{n+1} = X_1 + X_2 + \dots + X_{n+1}$.

Transformasi : $y_i = x_i / (x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1})$, $i = 1, 2, \dots, n$

$y_{n+1} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}$

membawa $\mathscr{X} = \{(x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1}) \mid x_i > 0,\ i = 1, 2, \dots n+1\}$

pada $\eta = \{(y_1, y_2, \dots y_n, y_{n+1}) \mid y_i > 0,\ i = 1, 2, \dots n,$

$y_1 + y_2 + \dots + y_n < 1,\ y_{n+1} > 0\}$.

Fungsi inversnya : $x_i = y_i\, y_{n+1}$, $i = 1, 2, \dots n$,

$x_{n+1} = y_{n+1}(1 - y_1 - y_2 - \dots - y_n)$,

sehingga :

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots x_{n+1})}{\partial(y_1, y_2, \dots y_{n+1})} = \begin{vmatrix} y_{n+1} & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ 0 & y_{n+1} & \dots & 0 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y_{n+1} & y_n \\ -y_{n+1} & -y_{n+1} & \dots & -y_{n+1} & (1-y_1-\dots-y_n) \end{vmatrix}$$

$$= (y_{n+1})^n .$$

Jadi fkb dari $Y_1, Y_2, \dots Y_n, Y_{n+1}$ adalah :

$$f(y_1, y_2 \dots y_{n+1}) = (y_{n+1})^{\sum_{i=1}^{n+1} r_i - 1} \cdot e^{-y_{n+1}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} y_i^{r_i - 1}}{\prod_{i=1}^{n+1} \Gamma(r_i)} \cdot$$

$$(1 - y_1 - \dots - y_n)^{r_{n+1} - 1} \cdot I_\eta(y_1, \dots, y_{n+1});$$

Dan dengan menggunakan (3.1.1) didapat fkb dari $Y_1, Y_2, \dots$

Y_n adalah :

$$g(y_1, \dots y_n) = \int_0^\infty f(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})\, dy_{n+1}$$

$$= \frac{\Gamma(r_1+r_2+ \ldots + r_{n+1})}{\Gamma(r_1).\Gamma(r_2)..\Gamma(r_{n+1})} . (1-y_1- \ldots y_n)^{r_{n+1} - 1} .$$

$$\prod_{i=1}^{n} y_i^{r_i - 1}$$

untuk $y_i > 0$, $i = 1,2, \ldots\ldots, n$

$y_1+y_2+ \ldots + y_n < 1$

= 0 untuk lainnya.