BAB I

PENDAHULUAN

Dalam buku ini,akan diperkenalkan dua macam matrik yang berbeda dengan matrik yang telah biasa dikenal,yaitu : FUNGSI MATRIK dan MATRIK FUNGSI . Namun,agar lebih mudah dalam memahami isi buku ini,maka dalam pendahuluan ini akan - diberikan pengertian-pengertian tentang matriks,fungsi dan fungsi matriks dan matriks fungsi itu sendiri .

I.1 PENGERTIAN MATRIKS

I.1.1 DEFINISI MATRIKS :

DEFINISI I.1 :

Suatu matriks didefinisikan sebagai barisan segi empat yang tersusun secara teratur atas elemen-elemen menurut baris-baris dan kolom-kolom,dan dibatasi oleh kurung .

Secara umum,matriks ditulis sebagai :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matriks semacam ini disebut matriks ukuran m x n karena mempunyai m baris dan n kolom .

Contoh :

Berikut ini adalah matriks :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 & 6 \\ -1 & 9 & 0 & 7 & -8 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \text{ ukuran } 3 \times 5$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 50 & 9 & \frac{1}{4} \\ 1 & 3 & \frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix} \text{ ukuran } 2 \times 4$$

Berikut ini bukan matriks :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \\ 3 & \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} & 4 & \\ 55 & & 6 \\ & 2 & \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} & 11 & \\ 8 & 7 & 10 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Karena suatu matriks pada umumnya dinyatakan dalam barisan dua dimensi (baris dan kolom),maka untuk menyatakan suatu elemen dari matriks harus digunakan dobel indeks,dengan perjanjian bahwa indeks - pertama menumjukkan barisnya,sedangkan undeks kedua menyatakan kolomnya .

Misal : a_{23} menyatakan elemen pada baris kedua - dan kolom ketiga .

Suatu matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom,yaitu n , disebut MATRIKS BUJUR SANGKAR ORDER n .

Suatu matriks bujur sangkar order n yang semua elemen pada diagonal utama adalah satu,sedangkan elemen yang lain adalah nol , disebut MATRIKS IDENTITAS ORDER n .

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & 7 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ matriks bujur sangkar order 4.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matriks identitas order 3.}$$

Secara singkat , suatu matrks A ditulis sebagai :

$A = (a_{ij})$.

I.1.2 OPERASI PADA MATRIKS :

a) Kesamaan dua matriks :

DEFINISI I.2 :

Dua matriks yang berukuran m x n , A = (a_{ij}) dan B = (b_{ij}) adalah sama bila dan hanya bila $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$ dan setiap $j = 1,2,\ldots,n$.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

A = B

A ≠ C

A & D tidak didefinisikan kesamaan.

b) Penjumlahan dua matriks :

DEFINISI I.3 :

Jumlah dari dua matriks ukuran m x n , A = (a_{ij}) dan B = (b_{ij}) adalah suatu matriks C = (c_{ij}) ukuran m x n ,dengan

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

untuk setiap $i = 1 , 2 , \ldots , m$ dan setiap $j = 1 , 2 , \ldots , n$.

Jumlah dari dua matriks yang ukurannya tidak sama , tidak didefinisikan .

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 4 & 7 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Maka :

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 7 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

c) Perkalian suatu matriks dengan skalar :

DEFINISI I.4 :

Hasil kali suatu matriks A = (a_{ij}) ukuran m x n dengan suatu skalar p adalah berupa matriks C = (c_{ij}) , dengan

$$c_{ij} = p\, a_{ij} .$$

untuk setiap i = 1 , 2 , ... , m dan setiap j = 1 , 2 , ... , n .

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad p = 3$$

Maka :

$$C = p\,A = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 0 \\ 9 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

d) Perkalian dua matriks :

Dua matriks A = (a_{ij}) dan B = (b_{ij}) dapat dikalikan hanya jika banyaknya kolom matriks yang pertama sama dengan banyaknya baris matriks yang kedua .

DEFINISI I.5 :

Jika A = (a_{ij}) suatu matriks ukuran mxn dan B = (b_{ij}) suatu matriks ukuran nxp maka hasil kali AB adalah suatu matriks C = (c_{ij}) ukuran m x p , dengan :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

untuk setiap i = 1 , 2 , ... , m dan setiap j = 1 , 2 , ... , p .

Dalam perkalian matriks ini berlaku hukum assosiatif dan hukum distributif terhadap penjumlahan , tapi secara umum tidak berlaku hukum komutatif .

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Maka :

$$AB = \begin{pmatrix} 2+2+9 & 0+6+6 \\ 4+4+3 & 0+12+2 \\ 6+0+6 & 0+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 11 & 14 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

BA tidak didefinisikan .

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 5 \\ 9 & 22 & -5 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix} \quad CA = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 11 \\ 3 & 18 & 3 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

I.1.3 BEBERAPA JENIS MATRIKS KHUSUS :

a) MATRIKS NOL

Yaitu suatu matriks yang semua elemennya nol .

b) MATRIKS DIAGONAL

Yaitu suatu matriks bujur sangkar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya tidak semuanya nol , sedang elemen-elemen yang lain semuanya nol .

c) MATRIKS SEGITIGA

Matriks segitiga atas / bawah adalah suatu matriks bujur sangkar yang elemen-elemen - pada dan diatas / dibawah diagonal utama , tidak semuanya nol , sedang elemen yang lain semuanya nol .

d) MATRIKS TRANSPOSE

Yaitu suatu matriks $B = (b_{ij})$ ukuran mxn yang didapat dari matriks $A = (a_{ji})$ ukuran nxm , dan berlaku :

$$b_{ij} = a_{ji}$$

untuk setiap $i = 1, 2, \ldots\ldots , m$ dan setiap $j = 1, 2, \ldots\ldots , n$.

e) MATRIKS NILPOTENT

Yaitu suatu matriks bujur sangkar A dengan $A^p = Z$, tapi $A^{p-1} \neq Z$ untuk suatu indeks p , dimana Z adalah matrik bujur sangkar nol yang berorder sama dengan matriks A .

Setiap matriks segitiga order n yang elemen-elemen pada diagonal utamanya adalah nol merupakan matriks Nilpotent dengan indeks kurang atau sama dengan n.

Hasil kali suatu matriks diagonal dengan suatu matriks segitiga atas / bawah yang elemen-elemen pada diagonal utamanya adalah nol juga merupakan matriks segitiga atas / bawah yang elemen-elemen diagonal utamanya adalah nol .

Contoh - contoh :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

matriks nol matriks diagonal

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

matriks segitiga atas matriks segitiga bawah

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \\ 9 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

A^* adalah transpose dari matriks A .

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B adalah matriks nilpoten dengan $p = 3$ karena $B^3 = Z$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

C adalah matriks nilpotent dengan $p = 2$ karena $C^2 = Z$.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$DS = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad SD = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I.2 PENGERTIAN FUNGSI

I.2.1 DEFINISI FUNGSI :

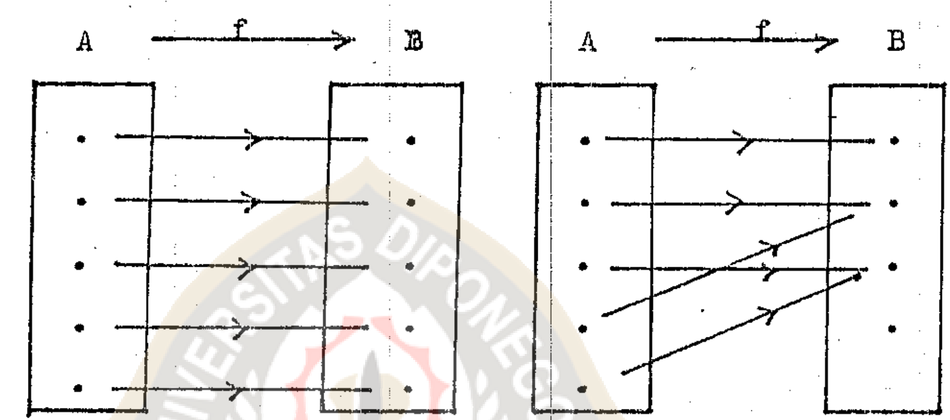
DEFINISI I.6 :

Pandang dua himpunan sembarang A dan B . Jika terdapat relasi f , sedemikian sehingga f merelasikan setiap elemen x anggota A ($x \in A$) secara tepat dengan satu elemen y anggota B ($y \in B$) , maka relasi yang demikian ini (dinotasikan dengan $y = f(x)$) disebut sebagai fungsi dari himpunan A ke-himpunan B .

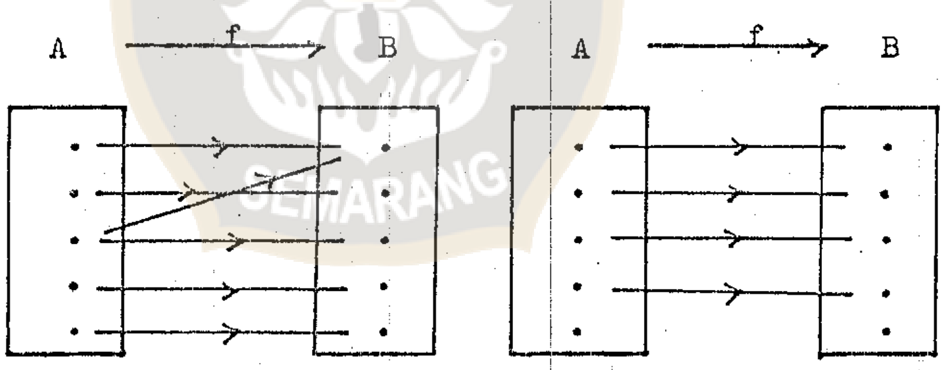
Dalam hal ini himpunan A disebut DOMAIN (daerah - asal) , dan himpunan B disebut KODOMAIN (daerah kawan) , sedangkan himpunan dari hasil-hasilnya-disebut RANGE dari fungsi f tersebut . Untuk y = f(x) , maka x disebut variabel bebas , dan y di sebut variabel tergantung dari x .

Contoh :

Berikut ini adalah fungsi :



Berikut ini bukan fungsi :



I.2.2 <u>LIMIT FUNGSI</u> :

Limit dari suatu fungsi f(x) untuk $x \rightarrow n$ adalah harga pendekatan dari f(x) untuk x = n . Jadi-bukan harga sebenarnya .

TIPE LIMIT :

1. $\lim\limits_{x \rightarrow a} f(x) = A$ dengan $A < \infty$ bila untuk se barang $\varepsilon > 0$, bagaimanapun kecilnya, dapat ditemukan suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian - sehingga bila $0 < |x-a| < \delta$ maka $|f(x)-A| < \varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ bila untuk sebarang bilangan positif M, bagaimanapun besarnya, dapat ditemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga bila $0 < |x-a| < \delta$ maka $|f(x)| > M$.

3. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ bila untuk sebarang $\varepsilon > 0$, bagaimanapun kecilnya dapat ditemukan bilangan positif M sedemikian sehingga bila $|x| > M$ maka $|f(x) - A| < \varepsilon$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ bila untuk sebarang bilangan positif M, bagaimanapun besarnya dapat-ditemukan bilangan positif P sedemikian sehingga bila $|x| > P$ maka $|f(x)| > M$.

Suatu fungsi dikatakan mempunyai limit dititik $x = a$, yaitu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ bila dan hanya bila harga dari A adalah berhingga, tunggal, riil dan tertentu, sedang bila tidak memenuhi salah satu saja dari keempat syarat tersebut, fungsi dikatakan tidak mempunyai limit dititik $x = a$.

Sebagai contoh, ambil $f(x) = \sin x$, maka fungsi ini tidak mempunyai limit untuk $x \to \infty$, karena harganya tidak tunggal, meskipun dia berhingga, sedang untuk $x \to \frac{1}{2}\pi$, maka harga limit adalah satu, dia berhingga, tunggal dan tertentu, sehingga $f(x)$ mempunyai limit untuk $x = \frac{1}{2}\pi$.

Sekarang pandang fungsi $f(x) = (\frac{1}{2})^x$.
Fungsi ini mempunyai limit disetiap titik, kecuali untuk $x \to -\infty$, karena harganya ∞.
Untuk fungsi ini jelas bahwa makin besar harga x yang diberikan, maka nilai fungsi akan semakin kecil, namun meski begitu nilai fungsi selalu po

sitif untuk setiap x . Dari sini , nilai itu dapat dibuat sekecil-kecilnya hingga mendekati nol , dengan mengambil x adalah bilangan yang tak terhingga . Bilangan nol ini disebut limit dari $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ untuk $x \to \infty$, dan ditulis sebagai :

$$\lim_{x \to \infty} (\tfrac{1}{2})^x = 0$$

Sekarang akan didefinisikan limit fungsi :

DEFINISI I.7 :

> $\mathbb{L}$ disebut limit kiri / kanan dari fungsi $f(x)$ untuk $x \to a$ dari kiri / kanan , dan ditulis : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ / $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, artinya jika pada setiap bilangan positif $\varepsilon > 0$ dapat ditunjuk bilangan positif $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk semua harga x yang terletak dalam interval $a-\delta < x < a$ / $a < x < a+\delta$ berlaku $|f(x) - \mathbb{L}| < \varepsilon$

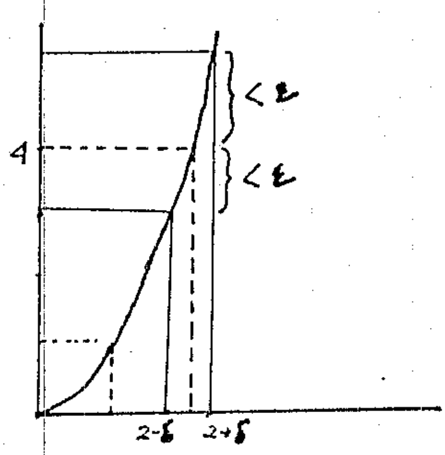
Suatu fungsi mempunyai limit disuatu titik jika harga limit kiri sama dengan harga limit kanan .

Contoh :

$$f(x) = x^2$$

fungsi ini mempunyai limit untuk x = 2 , karena :

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = \lim_{x \to 2^+} x^2 = 4.$$



Sifat-sifat limit fungsi :

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \;/\; \lim\limits_{x \to a} g(x)$

dengan $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

iv) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} f(x)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

v) $\lim\limits_{x \to a} \ln f(x) = \ln \lim\limits_{x \to a} f(x)$

vi) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

I.2.3 KONTINUITAS SUATU FUNGSI :

Suatu fungsi f(x) dikatakan kontinu dititik x = a jika ketiga syarat berikut dipenuhi :

1. f(x) terdefinisi dititik x = a .
2. limit f(x) ada untuk $x \to a$.
3. Harga limit sama dengan harga definisi .

Jika tidak memenuhi salah satu dari ketiga syarat diatas , maka fungsi dikatakan diskontinu dititik x = a .

Contoh :

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1$$

f(x) kontinu dititik x = 1 , tapi diskontinu dititik x = 0 .

I.3 PENGERTIAN FUNGSI MATRIKS

Pandang fungsi y = f(x) . Sejalan dengan definisi yang terdapat pada I.2 diatas , dapat juga didefinisikan suatu fungsi matriks sebagai berikut :

DEFINISI I.8 :

Fungsi y = f(x) dikatakan sebagai fungsi matriks , jika variabel bebas x adalah merupakan suatu matrik bujur sangkar , sedangkan variabel tergantung y juga merupakan matriks bujur sangkar dengan order sama dengan order dari matriks x .

Secara umum , fungsi matriks dinotasikan dengan $B = f(A)$ dengan A dan B adalah matriks bujur sangkar yang berorder sama.

Dalam bab III nanti , akan diberikan cara atau metode untuk menentukan matriks yang merupakan hasil dari fungsi suatu matriks .

I.4 PENGERTIAN MATRIKS FUNGSI

Pandang matriks $A = (a_{ij})$ ukuran m x n . Jika a_{ij} bukan merupakan skalar-skalar , melainkan merupakan fungsi-fungsi dengan variabel t yang terdefinisi dalam interval $a \leqslant t \leqslant b$ untuk setiap i dan setiap j , maka matriks yang demikian ini disebut matriks fungsi dengan satu variabel . Dalam buku ini akan dibicarakan matriks fungsi dengan satu variabel , yang secara umum ditulis sebagai :

$$X(t) = (x_{ij}(t)) \quad ; \text{untuk } a \leqslant t \leqslant b$$

dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$.

Jadi :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots\cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots\cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \cdots\cdots & x_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

dengan $a \leqslant t \leqslant b$.

Dalam matriks fungsi ini ditentukan bahwa : kontinuitas , differensial dan integral didefinisikan komponen demi komponen .

BAB II

MATERI PENDUKUNG

Sebelum membahas masalah utama dalam buku ini, terlebih dahulu dalam bab II ini akan diberikan beberapa materi yang mendukung atau melandasinya , dengan maksud agar pembaca dapat lebih memahami masalah yang dibicarakan . Namun dalam penyampaian materi pendukung ini , dianggap bahwa pembaca bisa mengerti dan memahaminya, sehingga theorema-teorema dan dalil-dalil yang ada sengaja tidak dibuktikan .

II.1 DETERMINAN

Determinan hanya didefinisikan bagi matriks bujur sangkar , jadi untuk matriks ukuran m x n dengan $m \neq n$, tidak didefinisikan adanya determinan .

Dalam determinan ini , diperlukan pengertian permutasi dan inversi .

DEFINISI PERMUTASI :

Banyaknya kemungkinan untuk menyusun n buah benda yang berlainan dalam urutan yang berbeda , disebut jumlah permutasi dari n unsur .

Permutasi dari n unsur dinotasikan sebagai P_n .

DALIL PERMUTASI :

Jumlah permutasi dari n unsur yang berlainan adalah : $P_n = n! = 1.2.3....(n-1).n$

DEFINISI INVERSI :

Jika dalam suatu permutasi , angka yang besar mendahului angka yang lebih kecil , maka pada permutasi itu terdapat suatu inversi .

Banyaknya inversi yang terdapat dalam suatu permutasi adalah jumlah inversi dari permutasi tersebut .