BAB. III

GELOMBANG DALAM TALI

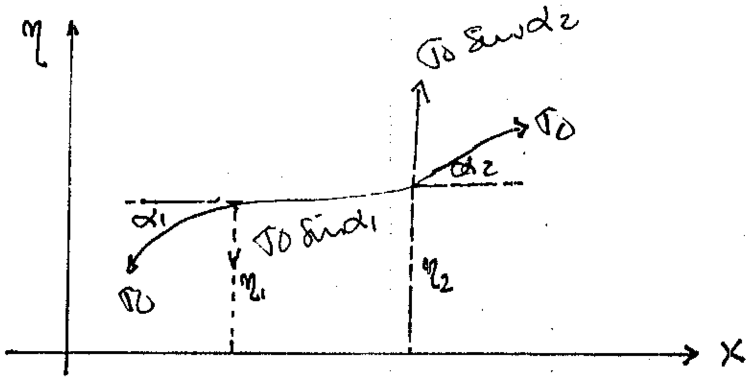
3.1. Model Matematika.

3.1.1. Persamaan Gelombang.

Gelombang pada tali merupakan Gelombang demensi satu yang merupakan bentuk yang paling sederhana.
Yang merupakan dasar untuk mengembangkan ke dalam gelombang Demensi Dua, Maupun Demensi Tiga. Untuk mendapatkan Model Matematika maka di Asumsikan sebagai berikut :

- T_0 = Besar tegangan tali yang konstan / tetap.
- α = Sudut Inklinasi / penyimpangan terhadap sumbu x kecil.
- Δx = Elemen garis yang hanya bergerak pada arah melintang
- λ_0 = Massa tali per unit panjang.
- Tali tak terpengaruh oleh keadaan luar seperti angin, tahanan grapitasi dan lain-lain.

Apabila tali diberi simpangan kecil sesaat dan kemudian tali dilepas maka akan terdapat gaya tegangan yang akan mengembalikan tali tersebut pada posisi/keadaan semula karena inersia dan momentom sehingga akan diperoleh persamaan gelombang yang ditentukan oleh fungsi waktu.
Disamping asumsi-asumsi diatas untuk mendapatkan persamaan Gelombang Demensi Satu, kita tentukan bahwa tali ber - gerak pada bidang ηx dengan η = simpangan, x = keadaan suatu pada titik setiap t detik, lalu tali kita beri simpangan kecil dengan membentuk sudut kecil dan bergerak sejauh kecil atau dapat dilihat pada gambar di bawah :



Dengan melihat gambar diatas maka dapat ditentukan penurunan Rumus sebagai berikut :

$$F = \sigma_0 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 = \sigma_0 (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

Karena sudut α_i kecil sekali, maka $\sin\alpha_i = tg\,\alpha_i$ sehingga Persamaan di atas menjadi :

$$F = \sigma_0 (tg\alpha_2 - tg\alpha_1)$$

Karena pengambilan kecil sekali ($\Delta x_i \rightarrow 0$) dan simpangan yang tergantung pada keadaan dan waktu (η fungsi yang tergantung pada faribel bebas x,t) , sehingga $tg\alpha_i$ merupakan koefisien arah dari garis singgingnya yang harga koefisien arah tersebut akan menjadi :

$$tg\alpha_i = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta\eta_i(x_i,t_i)}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\eta_i(x_i + \Delta x_i, t_i) - \eta_i(x_i,t_i)}{\Delta x_i}$$

$$= \frac{\partial\eta_i\,(x_i,t_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial\eta_i}{\partial x_i}$$

$$tg\alpha_2 = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta\eta_2(x_2,t_2)}{\Delta x_2} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{\eta_2(x_2 + \Delta x_2, t_2) - \eta_2(x_2,t_2)}{\Delta x_2}$$

$$= \frac{\partial\eta_2(x_2,t_2)}{x_2} = \frac{\partial\eta_2}{\partial x_2}$$

$$tg\alpha_1 = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta\eta_1(x_1,t_1)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\eta_1(x_1 + \Delta x_1, t_1) - \eta_1(x_1,t_1)}{\Delta x_1}$$

$$= \frac{\partial\eta_1(x_1,t_1)}{\partial x_1} = \frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}$$

Karena tali mempunyai massa $= \lambda_0 \Delta x$ dan terjadi perubahan kecepatan setiap terjadi perubahan waktu yang disebut Perce - patan (a) yang sekaligus merupakan koefisien arah garis singgungnya ,maka

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{dengan } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \eta(x,t)}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\eta(x, t+\Delta t) - \eta(x,t)}{\Delta t} = \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} = \ldots,$$

maka

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v\ (x,t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(x, t+\Delta t) - v(x,t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial\ v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Sehingga menurut Hukum Newton II

$$F = m\ a$$

$$\sigma_0 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}\right) = \lambda_0 \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\sigma_0}{\Delta x}\left[\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Dengan $\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = \eta_x(x+\Delta x,\ t) - \eta_x(x,t)$

Maka dengan Δx kecil sekali ($\Delta x \to 0$) akan menjadi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sigma_0 \left(\eta_x(x+\Delta x, t) - \eta_x(x,t)\right)}{\Delta x} = \lambda_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$\sigma_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \lambda_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Dengan mengambil $C^2 = \frac{\sigma_0}{\lambda_0}$, maka diperoleh bentuk

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Dengan η = Simpangan yang terjadi

t = Waktu

x = Keadaan pada arah melintang

C = Kostanta atau tetapanTali

3.1.2. Persamaan Energi

Pada Gelombang Dalam Tali maka terdapat Energi yang besarnya ditentukan oleh Energi Kinetik dan Energi Potensial. Untuk mendapatkan Energi Kinetik ,maka diambil elemen Δx_i kecil dan diberi simpangan kecil ,sehingga terjadi perubahan simpangan yang terjadi pada setiap pwrubahan waktu yang disebut Kecepatan (v) . karena Δx kecil sekali ($\Delta x \rightarrow 0$) dan η merupakan simpangan yang ditentukan arah dan waktu (η merupakan fungsi dari vareabel bebas x dan t) , maka

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \eta(x, t+\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\eta(x, t+\Delta t) - \eta(x, t)}{\Delta t} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

dengan mengingat Energi Kinetik $K = \frac{1}{2} m v^2$,maka Energi Kinetik per_sigmen ,yang massanya $\Delta m_i = \lambda_0 \Delta x_i$,adalah

$$K_i = \frac{1}{2} \lambda_0 \Delta x_i \; v^2$$

K_i adalah Energi Kinetik per sigmen , sehingga dengan pembagian Tali atas Δx_i , maka tali akan terbagi atas elemen-elemen yang banyak yaitu :

$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \Delta x_5, \Delta x_6, , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \Delta x_i$

jadi Energi Kinetik keseluruhan atau Total adalah :

$$\sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \; \Delta x_i$$

bila Δx_i dibuat sekecil mungkin ($\Delta x_i \rightarrow 0$) ,maka n akan menjadi besarsekali ($n \rightarrow \infty$) ,sehingga Energi Kinetik total akan menjadi :

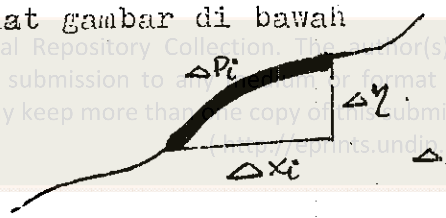
$$\lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{n} K_i = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \lambda_0 \; v^2 \Delta x_i = \frac{1}{2} \int \rho_0 v^2 \; dx$$

karena $v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$,maka Energi Kinetik (K) adalah

$$K = \int \frac{1}{2} \lambda_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Sedangkan untuk mendapatkan Energi Potensisl ,maka diambil Δx_i, karena tali diberi simpangan ,maka terdapat perbedaan panjang $\Delta S_i = \Delta P_i - \Delta x_i$, dimana $P_i = (\Delta x_i^2 + \Delta \eta^2)^{\frac{1}{2}}$

atau lihat gambar di bawah



$$\Delta P_i = (\Delta x_i^2 + \Delta \eta^2)^{\frac{1}{2}}$$

Sehingga

$$\Delta S_i = \Delta P_i - \Delta x_i = \left[1 - \left(\frac{\Delta \eta}{\Delta x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i - \Delta x_i$$

dengan penderetan Mac-laurin, maka

$$\left[1 - \left(\frac{\Delta \eta}{\Delta x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta \eta}{\Delta x_i}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\Delta \eta}{\Delta x_i}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots$$

karena

$\frac{\Delta \eta}{\Delta x_i}$ kecil ,maka $\left(\frac{\Delta \eta}{\Delta x_i}\right)^4$ mendekati nol,sehingga

$$\Delta S_i = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta \eta}{\Delta x_i}\right)^2 - 1\right]\Delta x_i$$

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta \eta}{\Delta x_i}\right)^2 \Delta x_i$$

Denga penyimpangan ΔS_i tersebut maka akan terdapat kerja atau gaya yang besarnya $T_0 \Delta S_i$ yang sama dengan besarnya Energi Potensial persegmen ,sehingga :

$$V_i = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\Delta \eta}{\Delta x_i}\right)^2 \Delta x_i$$

V_i Energi Potensial dari pertambahan ΔS_i.

sehingga tali terbagi atas elemen-elemen ΔS_i yang banyak yaitu : $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \Delta S_i$

Jadi Energi Potensial total/ keseluruhan adalah :

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\Delta \eta}{\Delta x_i}\right)^2 \Delta x_i$$

Bila Δx_i kecil ($\Delta x_i \to 0$) ,maka n menjadi besar ($n \to \infty$) dan η merupakan simpangan yang yang tergantung pada waktudan keadaan (η fungsi yang tergantung vareabel bebas x,t),maka

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{\substack{n \to \infty \\ x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\Delta \eta}{\Delta x_i}\right)^2 \Delta x_i$$

$$= \int \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 dx$$

Maka Energi Potensial (V)adalah

$$V = \int \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Energi Total (E)

$$E = K + V = \int \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 dx + \int \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 dx \quad (18)$$

3.2. Penyelesaian Umum

3.2.1. Persamaan Gelombang

Bila Sebuah Tali diketahui panjangnya L yang kedua ujungnya dijepit dan Syarat-syarat sebagai berikut:

- Kecepatan awal $\frac{\partial \eta}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = g(x) \qquad 0 < x < L$
- Simpangan awal $\eta(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L$

Tentukan Penyelesaian Umum dari Persamaan Gelombang Tali tersebut.

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan digunakan metode separasi Vareabel dengan Pengandaian :

$$\eta(x,t) = F(x)\ G(t)$$

Lalu diturunkan terhadap x,t masing-masing dua kali sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{d^2F(x)}{dx^2}\ G(t) = \ddot{F}\ G \\ \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{d^2G(t)}{dx^2}\ F(x) = F\ \ddot{G} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(19)$$

Bila Persamaan (19) dimasukkan dalam Persamaan

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

maka akan didapat :

$$F\ \frac{d^2G}{dt^2} = C^2 G\ \frac{d^2F}{dx^2}$$

$$\frac{1}{G}\ \frac{d^2G}{dt^2} = \frac{C^2}{F}\ \frac{d^2F}{dx^2} = -\omega^2$$

dengan ω konstanta

(Diambilnya $-\omega^2$ agar Penyelesaian membentuk fungsi Sinus atau fungsi Cosinus, agar dapat dibawa ke dalam Deret Fourier, karena fungsi sebarang mudah dinyatakan dalam Deret Fourier)

Maka akan terdapat dua persamaan yaitu :

$$\frac{C^2}{F}\frac{d^2F}{dx^2} = -\omega^2 \text{ , maka } \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{\omega^2}{C^2}F = 0 \text{ ....(20)}$$

$$\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dt^2} = -\omega^2 \text{ , maka } \frac{d^2G}{dt^2} + \omega^2 G = 0 \text{ ....(21)}$$

dari persamaan (20) maka dapat diselesaikan .

adapun persamaan tereduksinya adalah $m^2 + \omega^2 = 0$, maka

$m_{12} = \pm i\omega$, sehingga :

$G(t) = e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}$

$G(t) = (P \text{ Cos } \omega t + i\,Q \text{ Sin } \omega t) + (R \text{ Cos } \omega t - i\,S \text{ Sin } \omega t)$

$= (P + R) \text{ Cos } \omega t + (Q - S)\, i \text{ Sin } \omega t$

$= C \text{ Cos } \omega t + D \text{ Sin } \omega t$

sedangkan persamaan (21) dapat diselesaikan dengan mengambil

$K = \frac{\omega}{C}$, maka persamaan tereduksinya adalah :

$m_{12} = \pm iK$, sehingga

$F(x) = e^{iKx} + e^{-iKx}$

$= (a \text{ Cos } Kx + ib \text{ Sin } Kx) + (c \text{ Cos } Kx + id \text{ Sin } Kx)$

$= (a + c) \text{ Cos } Kx + i(b + d) \text{ Sin } Kx$

$= A \text{ Cos } Kx + B \text{ Sin } Kx$, dengan $K = \frac{\omega}{C}$

untuk $x = 0$,maka $F(0) = A \text{ Cos } K0 + B \text{ Sin } K0 = 0$

$A.1 + B.0 = 0$,maka $A = 0$

untuk $x = L$,maka $F(L) = A\text{Cos } KL + B \text{ Sin } KL = 0$

$0.\text{ Cos } KL + B \text{ Sin } KL = 0$

bila $B \neq 0$, maka $KL = n\pi$,

jadi $K = \frac{n\pi}{L}$

bila diambil $B = 1$, maka $F(x) = \text{Sin } Kx = \text{Sin } \frac{n\pi x}{L}$

$K_n = \frac{\omega_n}{C}$ dan $K_n = \frac{n\pi}{L}$, maka $\omega_n = K_n\, C = \frac{n\pi x}{L}$

jadi $G(t) = C \text{ Cos } \omega_n t + D \text{ Sin } \omega_n t$, dengan mengambil harga

ω_n di atas akan berubah

Sehingga $G(t) = C \text{ Cos}\,\omega_n t + D \text{ Sin}\,\omega_n t$, menjadi

$= C \text{ Cos}\frac{n\pi c}{L}t + D \text{ Sin}\frac{n\pi c}{L}t$, dengan C dan D Konstanta

Jadi Penyelesaian dari Persamaan Gelombang adalah :

$$\eta(x,t) = \text{Sin}\frac{n\pi x}{L}(\,a_n \text{ Cos}\,\omega_n t + c_n \text{ Sin}\,\omega_n t) \text{ dengan } n = 1,2,3\ldots$$

dan Penyelesaian ini disebut fungsi karakteristik, Sehingga Penyelesaian Umum adalah :

$$\eta(x,\ t) = \sum_{n=1}^{n} (\,a_n \text{ Cos}\,\omega_n t + b_n \text{ Sin}\,\omega_n t) \text{ Sin}\frac{n\pi x}{L}$$

untuk $t = 0$, maka $\eta(x,o) = \sum_{n=1}^{n} a_n \text{ Sin}\frac{n\pi x}{L} = f(x)$,

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{n} \omega_n b_n \text{ Sin}\frac{n\pi x}{L} = g(x)$$

maka $$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \text{ Sin}\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L g(x) \text{ Sin}\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

3.2.2. Persamaan Energi.

Bila Persamaan Gelombang diberikan :

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{n} (a_n \text{ Cos}\,\omega_n t + b_n \text{ Sin}\ \omega_n t\ ) \text{ Sin } K_n x, \text{ dan}$$

dengan mengingat Deret Fourier

$$\int_0^L \text{Cos } m\,x \text{ Cos } nx\,dx = \int_0^L \text{Sin } m\,x \text{ Sin } n\,x\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{L}{2}, & m = n \end{cases}$$

maka

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \sum_{n=1}^{n} K_n \text{ Cos } K_n x\ (\,a_n \text{ Cos}\,\omega_n t + b_n \text{ Sin}\,\omega_n t\ )$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \sum_{n=1}^{n} \omega_n \text{ Sin } K_n\,x\ (-a_n \text{ Sin}\,\omega_n t + b_n \text{ Cos}\,\omega_n t\ )$$

Dengan menggunakan Persamaan (3) , maka Energi Kinetik (K) adalah : $$K = \int \frac{1}{2}\lambda_0 \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$K = \frac{1}{2}\lambda_0 \sum_{n=1}^{n} \int_0^L \text{Sin}^2 K_n x\ \omega_n^2\ (-\,a_n \text{Sin}\,\omega_n t + b_n \text{ Cos}\,\omega_n t)^2\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \frac{L\,\lambda_0\,\omega_n^2}{4}(-\,a_n \text{ Sin}\,\omega_n t + b_n \text{ Cos}\,\omega_n t\ )^2$$

Dengan menggunakan Persamaan (17), maka Energi Potensial (V) adalah : $V = \int -\frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 dx$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \rho_0 K_n^2 \; Cos^2 K_n x \; (a_n Cos\, \omega_n t + b_n Sin\, \omega_n t)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L \rho_0 K_n^2}{4} (a_n \; Cos\, \omega_n t + b_n \; Sin\, \omega_n t)^2$$

Sehingga Energi Total (E)adalah :

$$E = K + V$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L \lambda_0 \omega_n^2}{4} (-a_n Sin\, \omega_n t + b_n \; Cos\, \omega_n t)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L \lambda_0 \; \omega_n^2}{4} (a_n \; Cos\, \omega_n t + b_n \; Sin\, \omega_n t)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L \lambda_0 \; \omega_n^2}{4} \; a_n^2 \; (Sin^2 \omega_n t + Cos^2 \omega_n t) + b_n^2 \; (Sin^2 \omega_n t + Cos^2 \omega_n t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L \lambda_0 \, \omega_n^2}{4} \; (a_n^2 + b_n^2)$$

Sehingga Energi Total hanya ditentukan oleh a_n ,b_n , ω_n .