BAB. II

KONSEP MATEMATIKA YANG MENDUKUNG

Dalam pembahasan Bab ini sengaja tidak dibicarakan secara panjang atau mendlam, namun hanya mengambil sebagaian saja yang berhubungan dengan materi yang akan dibahas pada Bab berikutnya sehingga hanya mengambil hal-hal yang berhubungan dengan masalah Gelombang dalam Memberane.

Perlu diketahui bahwa teori disini tidak akan di buktikan karena di sini ditekankan hanya pada penggunaan saja.

2.1. Persamaan Defferensial.

Persamaan Defferensial adalah suatu persamaan yang menurut Derivatif sekurang-kurangnya satu Derivatif dari fungsi yang tidak di ketahui.

Jika dalam suatu persamaan hanya memuat satu perubahan bebas (Independene Vareable) dan Derivatifnya, derivatif biasa maka persamaan tersebut disebut Persamaan Defferensial Biasa, Sedangkan jika di dalam persamaan memuat Dua atau lebih perubahan bebas (Independene Variable), maka di sebut Persamaan Defferensial Parsial.

2.1.1. Persamaan Defferensial Biasa Linier Tingkat n.

Bentuk $P_o(x)\frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \text{---} + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}$

$$+ P_n(x)\,y = Q(x) \quad \ldots\ldots \qquad (1)$$

Dimana $P_o(x) \neq 0$, & $Q(x)$ merupakan fungsi dari x atau Konstante. Bila $Q(x) = 0$ & P_i = Konstante maka disebut P D Tereduksi dengan bentuk :

$$P_o\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \text{-----} + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y = 0 \quad \ldots\ldots(2)$$

atau persamaan (1) dapat ditulis $F(D)y = Q(x)$ ....(3) dengan $F(D)$adalah Operator Deffernsial Linier. bila m meru pakan akar persamaan $f(m) = 0$, maka berlaku $F(D)\ e^{mx} = 0$.

Karena $F(D)\ e^{mx} = 0$, maka $Y = e^{mx}$ merupakan penyelesaian Tereduksi dari persamaan (3),dan persamaan $f(m) = 0$ disebut persamaan karakteristik atau persamaan pembantu dan berderajat n .

adapun yang akan dibahas disini adalah persamaan tereduksi yangdapat diselesaikan sebagai berikut:

1. Jika akar-akar $f(m) = 0$adalah real dan berlainan.

   andaikan akar-akar $f(m) = 0$ adalah $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \ldots\ldots \neq m_n$

   maka penyelesaiannya adalah ;

$$Y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots\ldots\ldots + C_n e^{m_n x}$$

dengan C_1, C_2,....................C_n adalah konstanta

2. Jika akar $f(m) = 0$,semuanya real dan ada yang sama .

   andaikan akar-akar $f(m) = 0$ adalah m_1, m_2, m_3, m_4, ...m_n

   dimana $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots\ldots\ldots = m_p \neq m_{p+1} \neq m_{p+2} \neq \ldots\ldots \neq m_n$

maka penyelesaian umumnya adalah:

$$Y = e^{m_1 x}\ (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots\ldots + C_p x^{p-1}) + C_{p+1} e^{m_{p+1} x} + C_{p+2}\ e^{m_{p+2} x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_n e^{m_n x}$$

3. Jika akar-akar persamaan $f(m) = 0$ komplek dan berlainan

   yaitu (a+ib)dan (a+ib),maka mempunyai penyelesaian :

$$Y = A\ e^{(a+ib)} + B\ e^{(a-ib)}$$

dengan A dan B merupakan konstanta sebarang.

Dengan menggunakan sifat-sifat komplek maka harga diatas akan menjadi :

$$Y = e^{ax}\left[A(\ \text{Cos } bx + i\text{Sin } bx\ ) + B(\ \text{Cos } bx - i\ \text{Sin } bx)\right]$$

$$= e^{ax}\left[(A+B)\ \text{Cos } bx + i(A-B)\ \text{Sin } bx\right]$$

$$= e^{ax}\ (C\text{Cos } bx + D \text{ sin } bx)$$, dengan Cdan D konstanta

4. Jika akar-akar dari $f(m) = 0$ komplek dan sama .
andaikan akar-akar dari persamaan karak teristik $f(m) = 0$ adalah $a + ib$, $a+ib$, $a+ ib$
makapenyelesaiannya dapat ditulis :

$$Y = (C_1 + C_2X + C_3X^2 + C_4X^3) \text{ Cos } bx + (C_5 + C_6X + C_7X^2 + C_8X^3) \text{ Sin } bx \quad e^{ax}$$

2.1.2. Persamaan Defferensial Parsiil linier Tingkat Dua

Bentuk Umum

$$AZ_{xx} + BZ_{xy} + CZ_{yy} + DZ_x + EZ_y + FZ = G \text{..............} (4)$$

dengan A,B,C.D,E,Fadalah konstanta ,sedangkan Gfungsi xdany
Bila G = 0 ,maka merupakan persamaan tereduksi yaitu :

$$AZ_{xx} + BZ_{xy} + CZ_{yy} + DZ_x + EZ_y + FZ = 0 \text{ ....} (5)$$

Bila D,E,F = 0 , maka mempunyai bentuk :

$$AZ_{xx} + BZ_{xy} + CZ_{yy} = 0 \text{ ....} (6)$$

Persamaan (6) merupakan persamaan yang akan dibahas dalam sub bab ini , sehingga untuk menyelesaikan persamaan (6) diambil subtitusi $Z = f(y+mx)$ dengan m konstanta .
kemudian dimasukkan dalam persamaan (6) akan diperoleh :

$$Am^2 + Bm + C = 0$$

1 Bila $m_1 \neq m_2$, maka $Z = f(y+m_1x) + g(y+m_2x)$

2 Bila $m_1 = m_2$, maka penyelesaian kedua dicari dengan :

$$= \lim_{m_2 \to m_1} \frac{f(y+m_2x) - f(y+m_1x)}{m_2 - m_1}$$

$$= x f'(y + m_1x) = x g(y + m_1x)$$

Jadi penyelesaiannya adalah ;

$$Z = f(y + m_1x) + x g(y + m_1x)$$

3 Bila $m_1 = a+ib$ dan $m_2 = a-ib$,maka penyelesaiannya :

$$Z = f_1(y + ax + ibx) + f_1(y + ax - ibx) + i\left[f_2(y + ax + ibx) - f_2(y - ax - ibx) \right]$$

Adapun bentuk khusus yang berhubungan dengan masalah Gelombang adalah :

$$Z_{tt} = C^2 (Z_{xx} + Z_{yy})$$

Untuk menyelesaikan Persamaan di atas digunakan Metode Separasi Vareabel dengan pemisalan :

$$Z (x,y,t) = X(x) Y(y) T(t)$$

Lalu diturunkan terhadap x,y,r masing-masing dua kali,maka akandiperoleh bentuk :

$$Z_{tt} = X Y \frac{d^2T}{dt^2}$$

$$Z_{yy} = X T \frac{d^2Y}{dy^2}$$

$$Z_{xx} = Y T \frac{d^2X}{dx^2}$$

bila hasil dari penurunan kita masukkan dalam Persamaan semula ,maka akan diperoleh bentuk :

$$X Y \frac{d^2T}{dt^2} = C^2 \left(Y T \frac{d^2X}{dx^2} + X T \frac{d^2Y}{dy^2} \right)$$

$$\frac{1}{T} \frac{d^2T}{dt^2} = \frac{C^2}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{C^2}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = -\omega^2$$

dengan ω konstanta , maka diperoleh penyelesaian

$$Z(x,y,t) = A(e^{imx} + e^{-imx})(e^{iny} + e^{-iny})(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$P (\text{Cos } mx + i \text{ Sin } mx)(\text{Cos } ny + i \text{ Sin } ny)$$

$$(\text{Cos } \omega t + i \text{ Sin } \omega t)$$

dengan konstanta dan syarat $m^2 + n^2 = \left(\frac{\omega}{C}\right)^2$, harus dipenuhi. (Diambilnya $-\omega^2$ agar Penyelesaian membentuk fungsi Sinus atau fungsi Cosinus agar dapat dibawa ke dalam Deret Fourier karena fungsi sebarang mudah dinyatakan dalam Deret Fourier). Untuk lebih jelasnya bisa dilihat pada bab IV yang dibahas secara mendalam.

2.2. Deret Fourier

Suatu fungsi f(x) dikatakan mempunyai periode P jika untuk semua P berlaku :

$f(x+P) = f(x)$, dengan P suatu konstanta Positip.

Periode terkecil dari suatu fungsi f(x)bila harga terkecil dari P 0

Suatu barisan disebutsuatu Deret Trigonometri bila barisan tersebut berbentuk :

$$\frac{1}{2} a_o + a_1 \text{ Cos } x + b_1 \text{Sin } x + \ldots\ldots + a_n \text{Cos } nx + b_n \text{Sin } nx$$

dimana a_n dan b_n merupakan konstanta.

Adapun sifat-sifat trigonometri yang berhubungan dengan Deret Fourier adalah

$$\text{Cos } nx \text{ Cos} mx = \frac{1}{2}(\text{Cos } (n-m)x + \text{Cos}(n+m)x\ )$$

$$\text{Sin } nx \text{ Cos } mx = \frac{1}{2}\ (\text{Sin } (n-m)x + \text{Sin } (n+m)x\ )$$

$$\text{Sin } nx \text{ Sin } mx = \frac{1}{2}(\text{Cos } (n-m)x + \text{Cos } (n+m)x\ )$$

2.2.1. Bentuk Umum

Bentuk Umum Deret Fourier adalah

$$f(x) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ Cos } nx + b_n \text{Sin } nx$$

Untuk mendapatkan hubungan a_n , b_n dengan f(x) , maka masing-masing dikalikan dengan Cos mx dan Sin mx ,lalu diintegralkan dari $-\pi$ sampai π .

Bila dikalikan dengan Cos mx dan diintegalkan, maka

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Cos } mx\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \text{ Cos } nx + b_n \text{ Sin } nx)\right] \text{Cos } mx\ dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_o \text{ Cos } mx\ dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \text{Cos } x \text{ Cos } mx\ dx +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \text{Cos } nx \text{ Cos } mx dx + \ldots.$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} b_1 \text{Sin } x \text{Cos } mx\ dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_2 \text{Sin } 2x \text{ Cos } mx\ dx + \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_n \text{ Sin } nx \text{ Cos } mx\ dx + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dengan :
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_o \cos mx \, dx = \frac{a_o}{2m} \sin mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_o}{2m} (0-0) = 0$$

dan dengan mengambil sifat Trigonoetri , maka :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \pi, \text{ untuk } n = m$$
$$= 0 \text{ , untuk } n \neq m$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \text{ , untuk } n = m$$
$$= 0 \text{ , untuk } n \neq m$$

sehingga harga integral di atas akan menjadi :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots\ldots + a_n \pi + 0 + \ldots\ldots$$

Jadi terdapat hubungan

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

untuk n = 0 , maka $a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$

Bila dikalikan dengan Sin mx dan diintegralkan maka :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \sin mx \, dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_o \sin mx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos x \sin mx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_2 \cos 2x \sin mx \, dx + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int_{-\pi}^{\pi} b_1 \sin x \sin mx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_2 \sin 2x \sin mx \, dx +$$
$$\ldots\ldots\ldots + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \sin mx \, dx + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

dengan :
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_o \sin mx \, dx = \frac{a_o}{2m} \cos mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_o}{2m} (0) = 0$$

dan dengan mengambil sifat trigonometri, maka :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \pi \text{ , untuk } n = m$$
$$= 0 \text{ , untuk } n \neq m$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \text{ , untuk } n = m$$
$$= 0 \text{ , untuk } n \neq m$$

sehingga harga integral diatas akan menjadi :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = 0 + 0 + \ldots\ldots\ldots + b_n \pi + 0 + 0 + \ldots\ldots\ldots$$

jadi terdapat hubungan :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx$$

2.2.2 Deret Sinus dan Deret Cosinus Fourier

Bentuk ini merupakan kejadian khusus dari deret Fourier

Jika f(x) fungsi ganjil , sehingga f(-x) =-f(x) , maka koefisien dari Deret Fouruer adalah :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Cos } nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x) \text{ Cos } nx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ Cos } nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-x) \text{ Cos } n(-x) \, d(-x) + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x) \text{ Cos } nx \, dx$$

karena fungsi ganjil ,maka f(-x) = -f(x) , sehingga bentuk di atas akan mejadi :

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x) \text{ Cos } nx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ Cos } nx \, dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ Cos } nx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ Cos } nx \, dx$$

$$= 0 ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Sin } nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x) \text{ Sin } nx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ Sin } nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-x) \text{ Sin } n(-x) \, d(-x) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ Sin } nx \, dx$$

karenafungsi ganjil maka f(-x) =-f(x) , sehingga bentuk di atas akan menjadi :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x) \text{ Sin } n(-x) \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ Sin } nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} -f(x) \text{ Sin } nx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ Sin } nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ Sin } nx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ Sin } nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ Sin } nx \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x) \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-x) \, d(-x) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x) \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$= \frac{-1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \, dx = 0$$

Jadi deretnya disebut Deret Sinus Fourier dengan bentuk :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ Sin } nx$$

Jika $f(x)$ fungsi genap , sehingga $f(-x) = f(x)$ maka koefisien dari Deret Fourier adalah :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{Cos}\ nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\ \mathrm{Cos}\ nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-x)\ \mathrm{Cos}\ n(-x)\ d(-x) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx$$

karena fungsi genap ,maka $f(-x) = f(x)$,sehinggabentuk di atas akan menjadi :

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-0} - f(x)\ \mathrm{Cos}\ nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathrm{Cos}\ nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathrm{Cos}\ nx\ dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{Sin}\ nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\ \mathrm{Sin}\ nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathrm{Sin}\ nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-x)\ \mathrm{Sin}\ n(-x)\ d(-x) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathrm{Sin}\ nx\ dx$$

karena fungsi genap , maka $f(-x) = f(x)$ sehingga bentuk di atas akan menjadi :

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x)\ \mathrm{Sin}\ nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathrm{Sin}\ nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} -f(x)\ \mathrm{Sin}\ nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathrm{Sin}\ nx\ dx$$

$$= 0$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int f(x)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-x)\ d(-x) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx$$

$$= \frac{-1}{\pi}\int_{\pi} f(x)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int f(x)\ dx$$

Jadi deretnya disebut Deret Cosinus Fourier dengan bentuk :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \mathrm{Cos}\ nx$$

2.3. Fungsi Bessel

2.3.1. Bentuk Fungsi Bessel

Fungsi Bessel merupakan penyelesaian dari persamaan Bessel, yaitu persamaan defferensial yang mempunyai order dua yang mempunyai sebuah titik singular regular dan sebuah titik singular irregular.

Secara umum PD Bessel dinyatakan sebagai berikut :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{d\,y}{d\,x} + (x^2 - n^2)\, y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Persamaan defferensial mempunyai order dua dan mempunyai dua titik singular yaitu :

$x = 0$ merupakan titik singular regular dan

$x = \infty$ merupakan titik singular irregular.

2.3.2. Mencari penyelesaian disekitar titik Singular Regular yaitu titik x = 0

Sebelum kita membahas masalahnya, baiklah kita bahas masalah yang berhubungan dengan masalah titik Singular.

Definisi suatu fungsi f analitik $x = xo$, jika penderetan Taylor disekitar titik xo,maka $\sum_{n=0}^{n} \frac{f^n(xo)(x-xo)^n}{n!}$

dari fungsi tersebut ada dan konvergen ke f(x) untuk setiap harga x dalam suatu open interval yang memuat xo.

Titik $x = a$ disebut titik ordiner (ordinary point) dari suatu persamaan defferensial order dua $Y'' + \alpha(x)Y' + \beta(x)Y = 0$ apabila fungsi-fungsi $\alpha(x)$, $\beta(x)$ masing-masing analitik dititik $x = a$. Jika salah satu atau keduanya tidak analitik di $x = xo$, maka titik xo disebut titik singular.

Jika $(x-xo)\alpha(x)$ dan $(x-xo)^2\beta(x)$ keduanya analitik dititik $x = xo$, maka titik $x = xo$ disebut titik Singular Regular, jika salah satu atau keduanya tidak analitik dititik $x = xo$ maka titik $x = xo$ disebut titik Singular Irregular. Karena titik $x = 0$ merupakan titik Singular Regular maka penyelesaian disekitar titik tersebut diambil :

$$\left.\begin{array}{l} y = \sum_{r=0}^{\infty} C_r\, x^{r+\rho}, \text{ maka } y' = \sum_{r=0}^{\infty} (r+\rho) C_r\, x^{r+\rho-1} \\ y'' = \sum_{r=0}^{\infty} (r+\rho)(r+\rho-1) C_r\, x^{r+\rho-2} \text{ dan } C_0 \neq 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots(8)$$

Bila persamaan (8) disubstitusikan kedalam persamaan (7) maka akan diperoleh persamaan baru sebagai berikut :

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r+\rho)(r+\rho-1) C_r\, x^{r+\rho} + \sum_{r=0}^{\infty} (r+\rho) C_r\, x^{r+\rho} + (x^2+n^2) \sum_{r=0}^{\infty} C_r\, x^{r+\rho} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \{(r+\rho)^2 - n^2\} C_r\, x^{r+\rho} + \sum_{s=0}^{\infty} C_s\, x^{s+\rho+2} = 0$$

ambil substitusi $s+\rho+2 = r+\rho \Rightarrow C_s = C_{r-2}$, $x^{s+\rho+2} = x^{r+\rho}$

sehingga persamaan diatas menjadi

$$\left[\sum_{r=0}^{\infty} \{(r+\rho)^2 - n^2\} C_r + C_{r-2}\right] x^{r+\rho} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Dengan demikian diperoleh Rumus Rekurensi :

$$\{(r^2+\rho)^2 - n^2\} C_r + C_{r-2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Dengan r=o, maka diperoleh Rumus Indicial :

$$\rho^2 - n^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

Dengan harga n yang diberikan timbul beberapa kemungkinan-yaitu :

a. $\rho_1 \neq \rho_2$ dan $\rho_1 - \rho_2 = 2n$, bukan bilangan bulat, yaitu bila n bukan bilangan bulat atau tengahan.

b. $\rho_1 = \rho_2$ yaitu bila n=o.

c. $\rho_1 \neq \rho_2$ dan $\rho_1 - \rho_2 = 2n$, dengan n bilangan bulat atau bilangan tengahan.

a. Ditinjau kemungkinan $\rho_1 \neq \rho_2$ dan $\rho_1 - \rho_2 = 2n$.

dengan n bukan bilangan bulat.

telah diketahui Rumus Rekurensi (10) berbentuk :

$$\{(r+\rho)^2 - n^2\} C_r + C_{r-2} = 0 \text{ ,maka}$$

$$C_r = \frac{-1}{(r+\rho+n)(r+\rho-n)} C_{r-2}$$

Untuk $\rho_1 = n$, maka didapat.

$$C_r = \frac{-1}{(2n+r)r} \quad C_{r-2}, \text{ sehingga}$$

$C_o = \frac{-1}{0} C_{-2} \neq 0$, diketahui.

$C_1 = \frac{-1}{2n+1} C_{-1} = 0$ demikian pula $C_3 = C_r = \ldots\ldots = 0$

$$C_2 = \frac{-1}{4(2n+2)} C_o = \frac{-1}{4(n+1)} C_o$$

$$C_4 = \frac{-1}{4(2n+4)} C_2 = \frac{(-1)^2}{4.2(n+2)} C_2 = \frac{(-1)^2}{2^4.2(n+2)(n+1)} C_o$$

Secara umum

$$C_{2r} = \frac{(-1)^r}{2^{2r}.r!(n+1)(n+2)\ldots(n+r)} C_o$$

$$= \frac{(-1)^r T(n+1)}{2^{2r}.r!T(n+r+1)} C_o$$

Dengan mengambil $C_o = \frac{1}{2^n T(n+1)}$,maka

$$C_{2r} = \frac{(-1)^r}{2^{2r+n} r!T(n+r+1)} \text{ ,sehingga}$$

$$Jn(x) = \frac{(-1)^r}{r!T(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Untuk $\rho_2 = -n$, maka

$$C_r = \frac{-1}{(r+\rho+n)(r+\rho-n)} C_{r-2} = \frac{-1}{r(r-2n)} C_{r-2}$$

Sehingga

$C_o = \frac{-1}{0} \neq 0$ (sebab $C_o \neq 0$)

$C_1 = \frac{-1}{1(1-2n)} C_{-1} = 0$, demikiaan pula

$C_3, C_5, C_7, C_9, \text{-------} \rightarrow 0$

$$C_2 = \frac{-1}{2(2-2n)} C_o = \frac{-1}{4(1-n)} C_o$$

$$C_4 = \frac{-1}{4(4-2n)} C_2 = \frac{1}{4.2.4\,(2-n)(1-n)} C_o$$

$$C_{2r} = \frac{(-1)^r}{2^{2r} r!\; T(r-n+1)\; \text{-- ---}(r-n)} C_o$$

$$= \frac{(-1)^r + (-n+1)}{2^{2r} r!\; T(r-n+1)} C_o \quad \text{dengan } C_o = \frac{1}{2^{-n} T(1-n)}$$

Maka $\quad J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\; T(r-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n}$

Sehingga penyelesaian dari fungsi Basel sebagai berikut :

$Y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$, dan C_1, C_2 konstata.

b. Ditinjau kemungkinan

Penyelasaiannya dapat diturunkan dirumus a, dengan mengambil $n = 0$, sehingga :

$$Y_n(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\; T(r+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n}$$

$n = 0$, maka $Y_o(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\; T(r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$

Sedangkan untuk mencari penyelesaian dasar kedua kata padengan $n = 0$, Rumus Rekurensi (10), menjadi :

$$C_{2r} = \frac{(-1)^r}{\left\{(\rho+2)(\rho+4)\text{ -----}(\rho+2r)\right\}^2} C_o$$

Selanjutnya dicari :

$$\frac{d \ln C_{2r}}{d\rho} = \frac{d}{d\rho}\left[\ln (-1)^r C_o - 2\sum_{s=1}^{r} \ln(\rho + 2s)\right]$$

$$= 0 - 2\sum_{s=1}^{r} \frac{1}{(\rho + 2s)} \quad \text{sehingga :}$$

$$\frac{d C_{2r}}{d\rho} = C_{2r} \frac{d \ln C_{2r}}{d\rho} = \frac{(-1)^{r+1} C_o \cdot 2}{\Pi (\rho+2s)^2} \cdot \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{\rho + 2s}$$

$$= \frac{2(-1)^{r+1} C_0}{(\rho + 2s)^2} \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{\rho + 2s}$$

$$\frac{d\, C_{2r}}{d\rho}\Big|_{\rho=0} = \frac{2(-1)^{r+1} C_0}{\prod_{s=1}^{r} (2s)^2} \sum_{r=1}^{r} \frac{1}{2s} = \frac{(-1)^{r+1} C_0}{2^{2r}\,(r!)^2} \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{s}$$

Sedangkan $\frac{d\, C_{2r+1}}{d\rho}\Big|_{\rho=0} = 0$ sehingga mengambil

$$C_0 = \frac{-1}{2\, r(1)} = 1 \text{ maka dapat :}$$

$$Y_0(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r+1} \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{s}}{(r!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

Diperoleh dengan cara Neuman Basel dengan demikian Penyelesaian (7) adalah :

$$Y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x),$$

dengan c_1, c_2 = konstanta

c) Tinjauan kemungkinan $\rho_1 \neq \rho_2$ & $|\rho_1 - \rho_2| = 2n$, n = bulat.

Dari Rumus Rekuensi (10), maka penyelesaian hasil macam pertama :

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!\, \Gamma(n + r + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}$$

Sedangkan penyelesaian kedua diperoleh dengan mengambil dari Rumus Rekuensi (10).

$$C_r = \frac{-1}{(r+\rho+n)(r+\rho-n)} C_{r-2}$$

C_0 = konstanta

$$C_1 = C_3 = C_5 = \ldots\ldots = C_{2r-1} = 0$$

$$C_2 = \frac{-1}{(2+\rho+n)(2+\rho-n)} C_0$$

$$C_4 = \frac{-1}{(4+\rho+n)(4+\rho-n)} C_2$$

$$= \frac{1}{(4+\rho+n)(4+\rho-n)(2+\rho+n)(2+\rho-n)} C_0$$

Sehingga :

$$C_{2r} = \frac{(-1)^r}{\prod_{s=1}^{r} (2s+\rho+n)(2s+\rho-n)} C_0$$

Dengan mengambil $C_0 = a(\rho - \rho_1)$ dan $\rho_1 = -n$ maka diperoleh

$$C_{2r} = \frac{(-1)^r a(\rho + n)}{\prod_{s=1}^{r} (2s + \rho + n)\ (2s + \rho - n)}$$

$$\ln C_{2r}(\rho) = \ln (-1)^r a + \ln(\rho + n) - \sum_{s=1}^{r}\left[\ln (2s + \rho + n) + \ln(2s + \rho - n)\right]$$

$$\frac{d \ln C_{2r}(\rho)}{d\rho} = 0 + \frac{1}{\rho + n} - \sum_{s=1}^{r}\left[\frac{1}{2s + \rho + n} + \frac{1}{2s + \rho - n}\right]$$

Dengan demikian :

$$\frac{d\, C_{2r}}{d\rho} = C_{2r}\frac{d \ln C_{2r}}{d\rho}$$

$$= \frac{(-1)^r a}{\prod_{s=1}^{r}(2s + \rho + n)\ (2s + \rho - n)} - \frac{(-1)^r a\ (\rho + n)}{\prod_{s=1}^{r}(2s + \rho + n)(2s + \rho - n)} \cdot \sum_{s=1}^{r}\left(\frac{1}{2s + \rho + n} + \frac{1}{2s + \rho - n}\right)$$

Untuk $r < n$, maka :

$$\left.\frac{d\, C_{2r}}{d\rho}\right|_{\rho = -n} = \frac{(-1)^r a}{2^r\ r!\ (-2)^r (n-1)\ \ldots\ldots\ldots (n-r)}$$

Untuk $r = n$, maka :

$$\left.\frac{d\, C_{2r}}{d\rho}\right|_{\rho = -n} = \frac{(-1)^r a}{2^r\ r!\ (n - 1) \text{------------} (n - r)}$$

$$= \frac{a}{2^{2n}(n!)^2}$$

Untuk $r > n$, maka :

$$\left.\frac{d\, C_{2r}}{d\rho}\right|_{\rho = -n} = \frac{(-1)^{r-n} a}{2^{2r}\ r!\ (n - 1)(r-n)}\left[\sum_{s=0}^{r-n}\frac{1}{s + n} + \sum_{s=0}^{r-n}\frac{1}{s}\right]$$

Sehingga $Y_n(x) = J_n(x) \ln x - \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^r}{r!\ (n+r)\ !}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}\left\{\sum_{s=0}^{r+n}\frac{1}{s+n} + \sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}\right\}\right]$$

$$Y_n = C_1 J_n(x) + J_n(x) C_2^*$$

C_1 , dan C_2 , adalah konstanta.

2.3.3 Integral Lommel

Bila U dan V merupakan penyelesaian dari persamaan Defferensial Bessel dari :

$$x^2U'' + x\,U' + (\lambda x^2 - m^2)\,U = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

dan $$x^2\,V'' + x\,V' + (\mu x^2 - n^2)\,V = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Selanjutnya persamaan (1) dan (2) digandakan dengan $\frac{V}{x}$ dan $\frac{U}{x}$, kemudian diambil selisihnya maka akan diperoleh :

$$xU\,U'' + V\,U' - xU\,V'' - U\,V' + \left\{(\lambda^2 - \mu^2)x + \frac{n^2 - m^2}{x}\right\}UV = 0 \text{ atau}$$

$$\left\{(\lambda^2 - \mu^2)x + \frac{n^2 - m^2}{x}\right\}UV = xUV'' + xVU'' + UV' - VU'$$

Bila kita integralkan terhadap x dari $a \to b$, didapat :

$$\int_a^b \left\{(\lambda^2 - \mu^2)x + \frac{n^2 - m^2}{x}\right\} UV\,dx = \int_a^b (xUV'' + xVU'' + UV' - VU')\,dx$$

$$\int_a^b \left\{(\lambda^2 - \mu^2)x + \frac{n^2 - m^2}{x}\, UV\right\}dx = \int_a^b (xUdV' - xVdU' + UdV - VdU)\,dx$$

$$= xUV' - \int V'\,dxU - xVU' + \int U'\,dxV + \int UV'\,dx - \int VU'\,dx \Big|_a^b$$

$$= xUV' - xVU'$$

$$\int_a^b \left\{(\lambda^2 - \mu^2)x + \frac{n^2 - m^2}{x}\right\} UV = x(UV' - VU')\Big|_a^b$$

Apabila diambil $U = J_n(\lambda x)$ dan $V = J_n(\mu x)$ dan $m = n$, maka :

$$(\lambda^2 - \mu^2)\int_a^b x\,J_n(\lambda x)\,J_n(\mu x)\,dx$$

$$= x\left\{\mu J_n(\lambda x)\,J_n'(\mu x) - \lambda J_n(\mu x)\,J_n'(\lambda x)\right\}\Big|_a^b$$

Untuk $n > -1$, sebab n merupakan arder dari Bessel. Jika diambil $\mu = \lambda + \varepsilon$ dengan ε kecil, maka dengan penderetan tailor terhadap ε, dengan $\varepsilon \to 0$ dari fungsi $J_n(\mu x)$ adalah

$$J_n(\mu x) = J_n\,(\lambda + \varepsilon)x = J_n(\lambda x) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J_n(\lambda x) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}J_n(\lambda x) + \ldots\ldots$$

$$(\lambda^2 - \lambda^2 - 2\varepsilon\lambda - \varepsilon^2)\int_a^b x\,J_n(\lambda x)\left\{J_n(\lambda x) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J_n(\lambda x) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}J_n(\lambda x) + \ldots\right\}dx$$

$$= x\Big[(\lambda+\varepsilon)\, J_n(\lambda x)\ \Big\{ J_n'(\lambda x) + \varepsilon \tfrac{\partial}{\partial\varepsilon} J_n'(\lambda x) + \varepsilon^2 \tfrac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2} J_n'(\lambda x) + \ldots \Big\} -$$

$$\lambda\Big\{ J_n(\lambda x) + \varepsilon \tfrac{\partial}{\partial\varepsilon} J_n(\lambda x) + \tfrac{\varepsilon^2}{2!}\tfrac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2} J_n(\lambda x) + \ldots \Big\} J_n'(\lambda x)\Big]\Big|_a^b$$

$$-2\varepsilon\lambda - \varepsilon^2 \int_a^b x\, J_n^2(\lambda x)\, dx = x\Big[(\lambda+\varepsilon)\, J_n(\lambda x)\ \{ J_n'(\lambda x) +$$

$$\varepsilon x\, J_n(\lambda x)\, J_n''(\lambda x) - \lambda J_n(\lambda x)\, J_n'(\lambda x) + \varepsilon\, x\, \{J_n'(\lambda x)\}^2\Big]\Big|_a^b$$

$$(-2\lambda\varepsilon - \varepsilon^2) \int_a^b x\, J_n^2(\lambda x)\, dx$$

$$= x\Big[\lambda J_n(\lambda x)\ \Big\{ J_n'(\lambda x) + \varepsilon \tfrac{\partial}{\partial\varepsilon} J_n'(\lambda x) + \tfrac{\varepsilon^2}{2!}\tfrac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2} J_n'(\lambda x) + \ldots \Big\}$$

$$+ \varepsilon J_n(\lambda x)\ \Big\{ J_n'(\lambda x) + \varepsilon \tfrac{\partial}{\partial\varepsilon} J_n'(\lambda x) + \tfrac{\varepsilon^2}{2!}\tfrac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2} J_n'(\lambda x) + \ldots \Big\}$$

$$- \lambda J_n'(\lambda x)\ \Big\{ J_n(\lambda x) + \varepsilon \tfrac{\partial}{\partial\varepsilon} J_n(\lambda x) + \tfrac{\varepsilon^2}{2!}\tfrac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2} J_n(\lambda x) + \ldots \Big\}\Big]\Big|_a^b$$

$$= x\Big[\lambda J_n(\lambda x)\ J_n'(\lambda x) + \lambda\varepsilon x\, J_n(\lambda x)\ J_n''(\lambda x) + \ldots\ldots$$

$$+ \varepsilon J_n(\lambda x)\ J_n'(\lambda x) + \varepsilon^2 x\, J_n(\lambda x)\ J_n''(\lambda x) + \ldots\ldots .$$

$$- \lambda J_n(\lambda x)\ J_n'(\lambda x) + \lambda\,\varepsilon\, x\ \{J_n'(\lambda x)\}^2 + \ldots\ldots \Big] ..$$

Bila kedua luas dibagi $-2\varepsilon\lambda$ dan $\varepsilon \to 0$ dan mengingat

$x\, J_n''(x) + J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_n'(x)$, maka diperoleh :

$$\int_a^b x\, J_n^2(\lambda x)\ dx = \frac{1}{-2\varepsilon\lambda}\, x\,\varepsilon\Big[J_n(\lambda x)\ J_n'(\lambda x) + x\lambda J_n(\lambda x)\ J_n''(\lambda x)$$

$$- \lambda x\ \{J_n'(\lambda x)\}^2\Big]\Big|_a^b$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big[\ \{J_n'(\lambda x)\}^2 - \frac{1}{\lambda x} J_n(\lambda x)\big\{(\lambda x) J_n''(\lambda x) + J_n'(\lambda x)\big\}\Big]\Big|_a^b$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big[\ \{J_n'(\lambda x)\}^2 - \frac{1}{\lambda x} J_n(\lambda x)\Big\{\frac{n^2}{\lambda x}\ J_n(\lambda x) - \lambda x J_n'(\lambda x)\Big\}\Big]\Big|_a^b$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big[\ \{J_n'(\ x)\}^2 + \Big(1 - \frac{n^2}{\lambda^2 x^2}\Big)\ J_n^2(\lambda x)\Big]\Big|_a^b$$

Jika $\mu = \lambda$, maka diperoleh :

$$\int_a^b J_m(\lambda x)\ J_n(\lambda x)\frac{dx}{x} = \frac{x}{n^2-m^2}\Big\{ J_m(\lambda x)\ J_n(\lambda x) - J_n(\lambda x) J_m'(\lambda x)\Big|_a^b$$

2.3.4. Expansi Fourier Bessel

Jika f(x) suatu fungsi sembarang yang dapat diperderetkan sebagai

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \, J_n(\lambda_m x)$$

Untuk suatu interval $0 < x < a$, dan andaikan deret diruas kanan convergen di daerah (0,a), maka koefisien dari deret ini dapat diperoleh dengan cara yang sama seperti pada penderetan Farier kedua ruas kita gandakan dengan $\int_0^a x \, J_n(\lambda_p x)$, p = 1,2,3, ... kemudian kita integralkan terhadap x pada interval 0 — a, akan didapat :

$$\int_0^a x \, f(x) \, J_n(\lambda_p x) \, dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^a C_m \, x \, J_n(\lambda_p x) \, J_n(\lambda_m x) \, dx$$

maka harga C_m dapat dicari seperti pada deret Fourier yaitu : $\int_0^a x \, J_n(\lambda_p x) \, J_n(\lambda_m x) \, dx = 0$ bila $\lambda_m \neq \lambda_p$

Ada tiga kemungkinan harga C_m sebagai berikut :

a $J_n(\lambda_m a) = J_n(\lambda_p a) = 0$

b $J_n'(\lambda_m a) = J_n'(\lambda_p a) = 0$

c $\lambda_p \, J_n(\lambda_m a) \, J_n'(\lambda_p a) = \lambda_m \, J_n(\lambda_p a) \, J_n'(\lambda_m a)$

Bila syarat (a) yang dipenuhi, maka :

$$C_m = \frac{2}{a^2 (J_n'(\lambda_m a))^2} \int_0^a x \, f(x) \, J_n(\lambda_m x) \, dx \quad 0 < x < a, \; n > -1$$

Bila syarat (b) yang dipenuhi, maka :

$$C_m = \frac{2}{a^2 \left(1 - \frac{n^2}{(\lambda_m a)^2}\right) J_n(\lambda_m a)^2} \int_0^a x \, f(x) \, J_n(\lambda_m x) \, dx \quad 0 < x < a \text{ dan } n > -1$$

Bila syarat (c) yang dipenuhi, maka :

$$C_m = \frac{2}{a^2 \; \{J_n'(\lambda_m a)\}^2 + \left(1 + \frac{n^2}{\lambda_m^2 a^2}\right) J_n^2(\lambda_m a)} \cdot \int_0^a x \, f(x) \, J_n(\lambda_m x) \, dx$$