BAB III
PENYELESAIAN MATEMATIS DARI PERSAMAAN PERTUMBUHAN PENDUDUK

Proyeksi penduduk merupakan perkiraan jumlah penduduk dimasa mendatang, proyeksi penduduk merupakan suatu perhitungan ilmiah yang didasarkan pada asumsi dari komponen laju pertumbuhan penduduk , yaitu kelahiran , kematian dan perpindahan penduduk.

Data dasar yang diperlukan untuk pembuatan proyeksi penduduk adalah sebagai berikut :

a. Jumlah penduduk menurut kelompok umur dan jenis kelamin sebagai data dasar pembuatan proyeksi penduduk.

b. Besar dan perkembangan angka kelahiran, kematian dan migrasi penduduk.

c. Tabel kematian yang sesuai dengan perkembangan komponen demografi pada periode proyeksi tersebut.

Didalam bab ini akan kita bahas masalah ini secara teoritis matematis dengan mengambil asumsi bahwa penduduk yang dipermasalahkan merupakan penduduk tertutup (closed popolation), yaitu penduduk yang tidak mengalami perpindahan baik kedalam maupun keluar.

Pembicaraan akan kita ifokuskan pada mencari bentuk umum persamaan dalam bentuk fungsi-fungsi kontinu yang menyatakan berapa besar jumlah kelahiran bayi perempuan yang mungkin terjadi pada t tahun kemudian dari sekarang dan bagaimana penyelesaian persamaan tersebut secara matematis. (diambil asumsi jumlah bayi laki-laki = jumlah bayi perempuan, jumlah bayi laki-laki dibagi jumlah bayi perempuan pada waktu lahir sekitar 1,05)

III. 1. Persamaan proyeksi penduduk ditinjau secara kontinu.

Kita misalkan jumlah wanita yang berumur antara x dan x + dx adalah k(x)dx. Proporsi jumlah wanita tersebut yang masih hidup pada t tahun kemudian menurut tabel kematian dalam bentuk fungsi kontinu adalah :

$$\frac{l\,(x + t)}{l\,(x)}$$

Sehingga jumlah yang diharapkan masih hidup pada t tahun kemudian dari wanita yang sekarang berumur antara x dan x + dx adalah :

$$k(x).\ \frac{l(\ x+t\ )}{l(x)}\ dx \quad \text{atau}\quad k(x).\ \frac{p(\ x+t)}{p\ (x)}\ dx$$

dimana $p(x) = \dfrac{l(x)}{lo}$

Misal probabilitas seorang wanita berumur x tahun mempunyai bayi perempuan dalam interval antara x dan x+dx adalah m(x) dx.

Maka jumlah bayi perempuan yang akan lahir pada waktu t dari wanita sekarang berumur x - x+dx adalah perkalian dari jumlah yang berhasil hidup sampai waktu t dengan m (x+t) , yaitu:

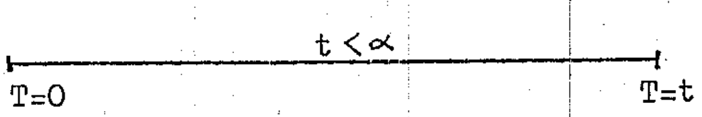
$$k(x).\ \frac{p(x+t)}{p(x)}\ .m\ (x+t)\ dx$$

Misal : usia terendah seorang wanita dapat melahirkan adalah α , usia tertinggi seorang wanita dapat melahirkan β .

Maka jumlah bayi perempuan yang akan lahir pada waktu t untuk semua wanita yang berhasil hidup dari waktu nol (waktu sekarang), diperoleh dengan jumlahan meliputi semua umur dari mereka yang pada waktu t berada dalam usia dapat melahirkan, yaitu mereka yang pada waktu t berumur antara α dan β .

Jumlah tersebut dapat diperoleh dari :

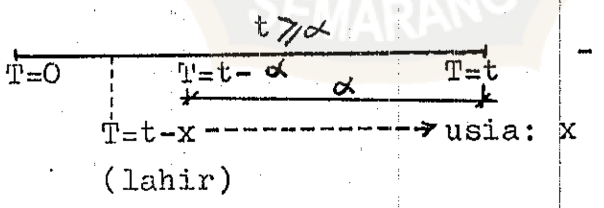
$$G(t) = \int_{\alpha-t}^{\beta-t} k(x).\frac{p(x+t)}{p(x)} \, m(x+t)\, dx$$



$$\text{Usia}: \begin{array}{l} \alpha-t \dashrightarrow \text{Usia} = \alpha \\ \beta-t \dashrightarrow \text{Usia} = \beta \end{array} \Bigg\} \text{ usia dapat melahirkan anak.}$$

Harga G(t) menyatakan jumlah kelahiran dari penduduk mula-mula yang sudah ada , tetapi bila $t \geqslant \alpha$ maka akan juga terjadi kelahiran pada waktu t dari wanita-wanita yang mereka sendiri dilahirkan sesudah waktu nol (waktu sekarang).

Misalkan B(t) menyatakan jumlah kelahiran sebagai fungsi dari waktu. Pandang wanita umur antara x dan x+dx pada waktu t, yang dilahirkan sesudah waktu nol, mereka adalah jumlah yang berhasil hidup (survive) dari bayi yang lahir x tahun sebelumnya (yaitu waktu t-x).



Jumlah ini adalah B(t-x) p(x) dx , $x \leqslant t$

Wanita-wanita ini pada waktu t akan mempunyai anak perempuan sejumlah B(t-x) p(x) m(x) dx. Untuk mendapatkan jumlah anak dari seluruh wanita yang lahir sesudah waktu nol, persamaan tersebut kita integralkan meliputi semua harga x, yaitu:

$$\int_0^t B(t-x)\, p(x)\, m(x)\, dx$$

Dengan menjumlahkan $\int_0^t B(t-x)\, p(x)\, m(x)\, dx$ dengan G(t) yang merupakan jumlah kelahiran dari mereka yang telah hidup pada waktu nol, kita dapatkan persamaan dasar :

$$B(t) = G(t) + \int_0^t B(t-x)\ p(x)\ m(x)\ dx \qquad (III.1.1)$$

Ini merupakan persamaan integral karena fungsi tak diketahui B(t) muncul baik diluar maupun didalam tanda integral. Pembahasan mengenai persamaan (III.1.1) ini akan menempati bagian-bagian selanjutnya dari bab III ini.

Pandang persamaan (III.1.1), apabila $t \geqslant \beta$, maka G(t) = 0, karena wanita yang telah hidup pada waktu nol setelah waktu $t \geqslant \beta$ akan mempunyai usia lebih besar dari β sehingga tidak bisa melahirkan anak. Persamaan (III.1.1) berubah menjadi :

$$B(t) = \int_0^t B(t-x)\ p(x)\ m(x)\ dx \qquad t \geqslant \beta \qquad (III.1.2)$$

Persamaan ini mempunyai kelebihan dibanding (III.1.1) karena merupakan suatu persamaan yang mempunyai sifat-sifat:

1. Jika B(t) adalah solusi, maka cB(t) juga solusi c=konstanta.
2. Jika $B_1(t)$ dan $B_2(t)$ adalah solusi, maka $B_1(t) + B_2(t)$ adalah solusi.

Jadi jika $B_1(t)$ dan $B_2(t)$ solusi, maka $c_1 B_1(t) + c_2 B_2(t)$ adalah solusi , c_1 dan c_2 = konstanta.

Jika suatu fungsi sudah ditemukan merupakan penyelesaian dari (III.1.2), maka fungsi ini merupakan penyelesaian khusus dan penyelesaian yang lebih umum untuk penyelesaian persamaan (III.1.1) dapat dibangun.

Misalnya e^{rt} adalah penyelesaian dari (III.1.2) untuk $r = r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots$, sehingga :

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + Q_3 e^{r_3 t} + \ldots\ldots\ldots \qquad (III.1.3)$$

$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots$ konstanta. Ini merupakan penyelesaian dari (III.1.2). Kita dapat memilih Q_i sedemikian hingga memenuhi persamaan (III.1.1) untuk suatu k(x) tertentu pada G(t).

III.2. Penyelesaian secara kalkulus.

Akan kita coba mendalami persamaan (III.1.2) dengan mensubstitusikan fungsi e^{rt} pada B(t).

$$B(t) = \int_0^t B(t-x)\, p(x)\, m(x)\, dx$$

$$e^{rt} = \int_0^t e^{r(t-x)}\, p(x)\, m(x)\, dx$$

$$1 = \int_0^t e^{-rx}\, p(x)\, m(x)\, dx \qquad t \geqslant \beta \quad ....(III.2.1)$$

Karena m(x) = 0 untuk semua x, kecuali $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, maka :

$$\psi(r) = \int_\alpha^\beta e^{-rx}\, p(x)\, m(x)\, dx = 1 \qquad ....(III.2.2)$$

p(x) m(x) biasa disingkat ϕ(x), disebut Net Maternity Function, dapat dikatakan bahwa probabilitas (pada waktu lahir) seorang anak perempuan akan hidup dan ia sendiri mempunyai anak perempuan antara umur a dan a+da adalah $\phi(a)$ da. Sedangkan variabel x lebih sering ditulis a dari pada x , sehingga persamaan kadang-kadang ditulis :

$$\psi(r) = \int_\alpha^\beta e^{-ra}\, \phi(a)\, da$$

Dengan demikian masalah kita berubah dari mencari fungsi B(t) pada (III.1.2) menjadi menjadi mencari variabel r pada (III.2.2).

Sebelum mencari penyelesaian dari (III.2.2) akan kita selidiki dulu sifat-sifat dari fungsi $\psi(r)$. Fungsi $\psi(r)$ adalah fungsi monoton turun, sebab :

$$\psi'(r) = -\int_\alpha^\beta a\, e^{-ra}\, \phi(a)\, da ,$$

a, e^{-ra} , $\phi(a)$ masing-masing non negatif, sehingga a e^{-ra} $\phi(a)$ non negatif, diintegrasikan dalam interval non negatif $\alpha - \beta$, maka $\int_\alpha^\beta a\, e^{-ra} \phi(a)\, da > 0$, atau $\psi'(r) = -\int_\alpha^\beta a\, e^{-ra}\, \phi(a)\, da$ selalu negatif. Ini menunjukkan fungsi $\psi(r)$ monoton turun, karena $\psi(r)$ monoton turun maka memotong garis $\psi(r) = 1$, hanya pada satu akar real saja. Bila $\psi'(r)$ di defferensialkan lagi menjadi :

$$\psi''(r) = \int_\alpha^\beta a^2 \, e^{-ra} \, \phi(a) \, da \,,$$

yang selalu positif, dengan demikian fungsi $\psi(r)$ pastilah cekung keatas.

Didefinisikan : $R_0 = \psi(0) = \int_\alpha^\beta e^{-0a} \, \phi(a) \, da$

$$= \int_\alpha^\beta \phi(a) \, da$$

R_o biasa disebut Net Reproduction Rate (NRR), yaitu jumlah anak perempuan yang diharapkan lahir dari seorang anak perempuan yang lahir sekarang dan berhasil hidup.

Akan kita cari hubungan antara R_o dengan akar real dari $\psi(r)$

- Jika $R_o = \int_\alpha^\beta \phi(a) \, da > 1$, maka r_1 akar real dari $\psi(r)$ pasti positif, sebab : hanya bila $r_1 > 0$ maka $e^{-r_1 a} < 1$,jika $\int_\alpha^\beta \phi(a) \, da = R_o > 1$, padahal $\int_\alpha^\beta e^{-r_1 a} \phi(a) = 1$, maka haruslah $e^{-r_1 a} < 1$ sehingga $r_1 > 0$.
- Jika $R_o = \int_\alpha^\beta \phi(a) \, da < 1$, maka r_1 akar real dari $\psi(r)$ pasti negatif, sebab : hanya bila $r_1 < 0$ maka $e^{-r_1 a} > 1$,jika $\int_\alpha^\beta \phi(a) \, da = R_o < 1$, padahal $\int_\alpha^\beta e^{-r_1 a} \phi(a) = 1$, maka haruslah $e^{-r_1 a} > 1$ sehingga $r_1 < 0$.

Jadi r_1 mempunyai sifat, bila :

$R_o < 1$ maka $r_1 < 0$

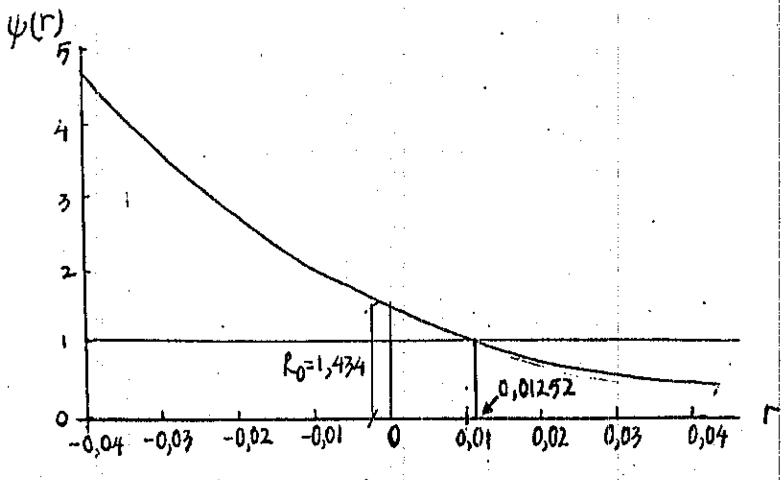
$R_0 = 1$ maka $r_1 = 0$

$R_o > 1$ maka $r_1 > 0$

Pengertian-pengertian tentang sifat-sifat diatas berguna untuk membantu menggambarkan grafik dari $\psi(r)$ dan mencari akar real r dari $\psi(r)$. Dalam hal ini kita membatasi diri pada akar real saja walaupun sebenarnya terdapat juga akar-akar kompleks dari $\psi(r)$.

Contoh :

Gambar kurva $\psi(r) = \int_\alpha^\beta e^{-ra} \, p(a) \, m(a) \, da$ untuk wanita Belanda tahun 1965.



Gambar (III.2.1)

Tabel (III.2.1). Harga ψ (r) untuk wanita Belanda tahun '65

Harga dari r = -0,20 sampai r = 0,10		Perincian sekitar r = 0	
r	ψ(r)	r	ψ(r)
-0,20	1018,277	-0,010	1,91870
-0,18	491,867	-0,008	1,80951
-0,16	241,261	-0,006	1,70678
-0,14	120,220	-0,004	1,61012
-0,12	60,876	-0,002	1,51914
-0,10	31,330	0,000	1,43350
-0,08	16,387	0,002	1,35288
-0,06	8,710	0,004	1,27697
-0,04	4,702	0,006	1,20548
-0,02	2,577	0,008	1,13816
0,00	1,434	0,010	1,07474
0,02	0,809	0,012	1,01499
0,04	0,462	0,014	0,95870
0,06	0,267	0,016	0,90565
0,08	0,157	0,018	0,85565
0,10	0,093	0,020	0,80851

Sumber : Nathan Keyfitz (1968,100)

$\psi(r)$ diatas dihitung dengan pendekatan :

$$\psi(r) = \int_\alpha^\beta e^{-ra} p(a)\, m(a)\, da$$

$$\approx 0{,}0001\, e^{-12{,}5r} + 0{,}0498\, e^{-17{,}5r} + 0{,}3334\, e^{-22{,}5r} + 0{,}4912\, e^{-27{,}5r} + 0{,}3267\, e^{-32{,}5r} + 0{,}1716\, e^{-37{,}5r} + 0{,}055\, e^{-42{,}5r} + 0{,}004\, e^{-47{,}5r}$$

Pendekatan ini akan dibicarakan kemudian.

Perhatian kita selanjutnya adalah mencari harga koefisien Q_s. Untuk mencari Q_s dengan pengintegralan langsung, kita pandang persamaan (III.1.1):

$$B(t) = G(t) + \int_0^t B(t-a)\, \phi(a)\, da$$

atau $$G(t) = B(t) - \int_0^t B(t-a)\, \phi(a)\, da \quad \ldots\ldots (III.2.3)$$

Kita gunakan persamaan pembantu :

$$P_s = \int_0^\beta e^{-r_s t}\, G(t)\, dt \quad \ldots\ldots (III.2.4)$$

Substitusikan (III.2.3) pada (III.2.4), didapat :

$$P_s = \int_0^\beta e^{-r_s t} \left[B(t) - \int_0^t B(t-a)\, \phi(a)\, da \right] dt \quad (III.2.5)$$

Kemudian substitusikan :

$$B(t) = \sum_1^\infty Q_j\, e^{r_j t} = Q_s\, e^{r_s t} + \sum_{j\neq s}^\infty Q_j\, e^{r_j t}$$

$$B(t-a) = \sum_1^\infty Q_j\, e^{r_j (t-a)}$$

$$= Q_s\, e^{r_s(t-a)} + \sum_{j\neq s}^\infty Q_j\, e^{r_j(t-a)},$$

dalam persamaan (III.2.5), didapat :

$$P_s = \int_0^\beta e^{-r_s t} \left[Q_s\, e^{r_s t} - \int_0^t Q_s\, e^{r_s(t-a)}\, \phi(a)\, da \right] dt + R_s$$

dengan $$R_s = \sum_{u\neq s} \int_0^\beta e^{-r_s t} \left[Q_u\, e^{r_u t} - \int_0^t Q_u\, e^{r_u(t-a)}\, \phi(a)\, da \right] dt$$

(akan dibuktikan kemudian bahwa $R_s = 0$).

$$P_s = Q_s \int_0^{\beta} \left[1 - \int_0^{t} e^{-r_s a} \phi(a)\, da\right] dt + R_s$$

$$= Q_s \int_0^{\beta} \left[\int_0^{\beta} e^{-r_s a} \phi(a)\, da - \int_0^{t} e^{-r_s t} \phi(a)\, da\right] dt$$

$$+R_s$$

(karena $\int_0^{\beta} e^{-r_s a} \phi(a)\, da = 1$, untuk r_s akardari (III.2.2))

padahal :

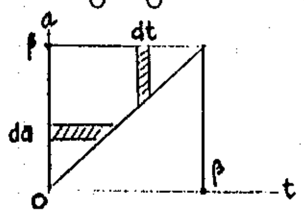
$$\int_0^{\beta} e^{-r_s a} \phi(a)\, da - \int_0^{t} e^{-r_s a} \phi(a)\, da = \int_t^{\beta} e^{-r_s a} \phi(a)\, da$$

maka $P_s = Q_s \int_0^{\beta} \int_t^{\beta} e^{-r_s a} \phi(a)\, da\, dt + Rs$

Kita akan mempertukarkan urutan pengintegralan, menjadi :

$$P_s = Q_s \int_0^{\beta} \int_0^{a} e^{-r_s a} \phi(a)\, dt\, da + R_s$$

Hal ini dapat kita lakukan karena integral $\int_0^{\beta}\int_t^{\beta}$ da dt merupakan luasan dari segitiga bagian atas, demikian juga dengan $\int_0^{\beta} \int_0^{a}$ dt da (lihat gambar).



Gambar (III.2.2)

$$P_s = Q_s \int_0^{\beta} \int_0^{a} e^{-r_s a} \phi(a)\, dt\, da + R_s$$

diintegralkan terhadap t,

$$P_s = Q_s \int_0^{\beta} a\, e^{-r_s a} \phi(a)\, da + R_s \qquad \text{.....(III.2.6)}$$

(sebab : $\int_0^{a} dt = a$)

Akan dibuktikan $R_s = 0$

Bukti :

$$R_s = \sum_{u \neq s} \int_0^{\beta} e^{-r_s t} \left[Q_u e^{r_u t} - \int_0^{t} Q_u e^{r_u (t-a)} \phi(a)\, da\right] dt$$

$$R_s = \sum_{u \neq s} R_{s,u} \quad ,$$

dengan $R_{s,u} = Q_u \int_0^{\beta} e^{-r_s t} \left[e^{r_u t} - \int_0^t e^{r_u (t-a)} \; \phi(a)\, da \right] dt$,

dimana $u \neq s$.

$$R_{s,u} = Q_u \int_0^{\beta} \left[e^{(r_u - r_s)t} - \int_0^t e^{(r_u - r_s)t} e^{-r_u a} \phi(a)\, da \right] dt$$

$$= Q_u \int_0^{\beta} e^{(r_u - r_s)t} \left[1 - \int_0^t e^{-r_u a} \phi(a)\, da \right] dt$$

$$= Q_u \int_0^{\beta} e^{(r_u - r_s)t} \left[\int_0^{\beta} e^{-r_u a} \phi(a)\, da - \right.$$

$$\left. \int_0^t e^{-r_u a} \phi(a)\, da \right] dt.$$

(kita gunakan $\int_0^{\beta} e^{-r_u a} \phi(a)\, da = 1$, untuk r_u akardari $\psi(r)$)

$$= Q_u \int_0^{\beta} e^{(r_u - r_s)t} \left[\int_t^{\beta} e^{-r_u a} \phi(a)\, da \right] dt$$

kita pertukarkan urutan pengintegralan, didapat :

$$R_{s,u} = Q_u \int_0^{\beta} e^{-r_u a} \phi(a) \int_0^a e^{(r_u - r_s)\, t} \; dt\, da$$

keterangan :

$$\int_0^{\beta} f(t) \left[\int_t^{\beta} g(a)\, da \right] dt = \int_0^{\beta} \int_t^{\beta} f(t) g(a)\, dadt =$$

$$\int_0^{\beta} \int_0^{a} f(t)\, g(a)\, dtda \quad = \int_0^{\beta} g(a) \int_0^a f(t)\, dtda$$

$$R_{s,u} = \frac{Q_u}{r_u - r_s} \int_0^{\beta} e^{-r_u a} \phi(a) \left(e^{(r_u - r_s)a} - 1 \right) da$$

$$= \frac{Q_u}{r_u - r_s} \quad \int_0^{\beta} e^{-r_s a} \phi(a)\, da - \int_0^{\beta} e^{-r_u a} \quad \phi(a)\, da$$

$$= \frac{Q_u}{r_u - r_s} \quad (1 - 1)$$

$$= 0$$

Dari (III.2.6), dengan $R_s = 0$ didapat :

$$Q_s = \frac{P_s}{\int_0^\beta a\, e^{-r_s a} \phi(a) da}$$

Dari (III.2.4), didapat :

$$Q_s = \frac{\int_0^\beta e^{-r_s t} \; G(t)\, dt}{\int_0^\beta ae^{-r_s a} \phi(a)\, da} \qquad \text{..... (III.2.7)}$$

Bila kita tahu G(t), jumlah kelahiran dari penduduk yang sudah lahir sebelum waktu t=0, dan diasumsikan probabilitas hidup dari lahir dan angka kelahiran tertentu, maka Q_s dapat dicari dari (III.2.7).

Sebagai contoh khusus, misalnya sebanyak B_o anak perempuan lahir pada waktu t=0. Anak-anak perempuan ini akan melahirkan anak perempuan terdistribusi sebagai : $B_o\, p(t)m(t) = B_o\, \phi(t)$. Masukkan harga ini untuk G(t) pada (III.2.7), didapat :

$$Q_s = \frac{B_o \int_0^\beta e^{-r_s t} \; \phi(t)\, dt}{\int_0^\beta ae^{-r_s a} \phi(a)\, da}$$

$$= \frac{B_o}{-\psi'(r_s)} \qquad \text{..... (III.2.8)}$$

Sehingga jumlah kelahiran pada waktu t dengan tidak memperhitungkan akar-akar kompleks adalah :

$$B(t) = Q_1\, e^{r_1 t} = \frac{B_o\, e^{r_1 t}}{-\psi'(r_1)}$$

III.3. Penyelesaian dari persamaan karakteristik secara numerik.

Untuk menentukan akar dari persamaan (III.2.2) :

$$\psi(r) = \int_\alpha^\beta e^{-rx}\; p(x)\, m(x)\, dx$$

dengan menggunakan Tabel Kematian, kita pakai pendekatan dari $l_o\psi(r)$, sebagai berikut :

$$l_o\psi(r) = \sum_{\alpha}^{\beta-5} e^{-r(x+2,5)} \; {}_5L_x \; {}_5F_x$$

${}_5L_x$ adalah jumlah tahun kehidupan antara umur x dan x+5.

${}_5F_x$ adalah angka kelahiran bayi perempuan menurut umur , untuk wanita umur x - x+5.

α adalah umur terendah seorang wanita dapat melahirkan, ambil α = 10

β adalah umur tertinggi seorang wanita dapat melahirkan, ambil β = 50

Persamaan (III.2.2) didekati oleh :

$$l_o\psi(r) = e^{-12,5r}\; {}_5L_{10}\; {}_5F_{10} + e^{-17,5r}\; {}_5L_{15}\; {}_5F_{15} + \cdots +$$
$$e^{-47,5r}\; {}_5L_{45}\; {}_5F_{45} = l_o \quad \text{......(III.3.1)}$$

Bukti :

Pandang integral $\int_0^5 e^{-r(x+t)}p(x+t)m(x+t)\,dt$, x = 10, 15, ... , 45

Untuk x=10 ---→ $\int_0^5 e^{-r(10+t)}p(10+t)m(10+t)\,dt$

Untuk x=15 ---→ $\int_0^5 e^{-r(15+t)}p(15+t)m(15+t)\,dt$

Untuk x=20 ---→ $\int_0^5 e^{-r(20+t)}p(20+t)m(20+t)\,dt$

⋮

Untuk x=45 ---→ $\int_0^5 e^{-r(45+t)}p(45+t)m(45+t)\,dt$

Maka :

$$\sum_{x=10,15,..,45} \int_0^5 e^{-r(x+t)}p(x+t)m(x+t) = \int_{\alpha=10}^{\beta=50} e^{-rx}p(x)m(x)\,dx$$

Padahal $\int_0^5 e^{-r(x+t)}p(x+t)m(x+t)\,dt$, x=10,15,..,45 dapat digantikan dengan hasil kali :

- suatu harga tengahan : $e^{-r(x+2,5)}$
- suatu integral : $\int_0^5 p(x+t)\,dt = \int_0^5 \frac{l(x+t)}{l_o}\,dt = \frac{{}_5L_x}{l_o}$

- ratio dari 2 integral : $\dfrac{\int_0^5 k(x+t)m(x+t)\ dt}{\int_0^5 k(x+t)\ dt} = {}_5F_x$

Sehingga :

$$\int_0^5 e^{-r(x+t)}p(x+t)m(x+t)\ dt = e^{-r(x+2,5)}\ \frac{{}_5L_x}{I_o}\ {}_5F_x$$

$$\sum_{x=10,\ldots,45}\int_0^5 e^{-r(x+t)}p(x+t)m(x+t)\ dt =$$

$$e^{-12,5r}\ \frac{{}_5L_{10}}{I_o}\ {}_5F_{10} + e^{-17,5r}\ \frac{{}_5L_{15}}{I_o}\ {}_5F_{15} + \ldots + e^{-47,5r}\ \frac{{}_5L_{45}}{I_o}\ {}_5F_{45}$$

$$\psi(r) = \int_{\alpha=10}^{\beta=50} e^{-rx}p(x)\ m(x)\ dx$$

$$= e^{-12,5r}\ \frac{{}_5L_{10}}{I_o}\ {}_5F_{10} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + e^{-47,5r}\ \frac{{}_5L_{45}}{I_o}\ {}_5F_{45}$$

Terbukti bahwa :

$$1_o\psi(r) = e^{-12,5r}\ {}_5L_{10}\ {}_5F_{10} + e^{-17,5r}\ {}_5L_{15}\ {}_5F_{15} + \ldots\ldots\ldots + e^{-47,5r}\ {}_5L_{45}\ {}_5F_{45}$$

Sebenarnya dekomposisi dari integral tersebut mempunyai error, tetapi pendekatan tersebut oleh para ahli demograf dianggap tidak terlalu buruk.

Sekarang akan diberikan illustrasi yang menggambarkan perbandingan jumlah bayi perempuan yang lahir dan jumlah bayi laki-laki yang lahir.

Tabel (III.3.1). Jumlah bayi laki-laki dibagi jumlah bayi perempuan untuk beberapa interval umur ibu pada 3 negara

umur	England dan Wales 1964	Itali 1963	USA 1964
15 - 19	1,068	1,045	1,056
20 - 24	1,060	1,054	1,050
25 - 29	1,065	1,059	1,047
30 - 34	1,059	1,052	1,039
35 - 39	1,041	1,050	1,039

Sumber : Nathan Keyfitz (1968,109)

Dari tabel jelas terlihat bahwa perbedaan jumlah bayi laki-laki dengan jumlah bayi perempuan untuk semua umur ibu tidaklah terlalu besar. Sehingga dapat disimpulkan bahwa jumlah bayi perempuan yang lahir pada waktu t dapat pula menggambarkan jumlah bayi laki-laki yang lahir pada waktu t.

Untuk mendapatkan harga r akan kita gunakan pendekatan secara numerik. Mula-mula kita tentukan harga r, dengan pendekatan awal :

$$r \approx \frac{\ln R_o}{\mu} \qquad \text{(lihat persamaan (IV.1.9))}$$

dimana R_o : Net Reproduction Rate

μ : rata-rata umur seorang wanita mampu melahirkan pada penduduk stasioner.

R_o didekati dengan cara sebagai berikut :

$$R_o = \int_{\alpha=10}^{\beta=50} p(x)\, m(x)\, dx$$

$$= \sum_{x=10,15,..,45} \int_0^5 p(x+t)\, m(x+t)\, dt$$

$$\approx \sum_{x=10,15,..,45} \int_0^5 \frac{l(x+t)}{l_o} dt \cdot \frac{\int_0^5 k(x+t) m(x+t) dt}{\int_0^5 k(x+t) dt}$$

$$= \sum_{x=10,15,..,45} \frac{{}_5L_x}{l_o}\ {}_5F_x$$

$$= \sum_{x=10,15,..,45} {}_5\phi_x$$

Jadi $\quad R_o \approx \sum_{x=10,15,..,45} {}_5\phi_x$

Sedang $\mu = \frac{R_1}{R_o}$ (lihat persamaan (IV.1.3))

dengan $R_1 = \int_{\alpha=10}^{\beta=50} x\, p(x)\, m(x)\, dx$

$$\approx \sum_{x=10,15,..,45} \int_0^5 (x+t)\, p(x+t)\, m(x+t)\, dt$$

$$\approx \sum_{x=10,15,..,5} (x+2,5) \int_0^5 \frac{l(x+t)}{l_o} dt\ \frac{\int_0^5 k(x+t) m(x+t) dt}{\int_0^5 k(x+t) dt}$$

$$= \sum_{x=10,15,..,45} (x+2,5)\ \frac{{}_5L_x}{l_o}\ {}_5F_x$$

$$= \sum_{x=10,15,..,45} (x+2,5)\ {}_5\phi_x$$

Jadi $\mu \approx \dfrac{\sum_{x=10,15,..,45} (x+2,5)\ {}_5\phi_x}{\sum_{x=10,15,..,45} {}_5\phi_x}$

Beberapa metode numerik dapat kita gunakan untuk mencari harga r dari $\psi(r) = 1$ dan menggunakan persamaan

(III.3.1) $\psi(r) l_o = e^{-12,5r}\ {}_5L_{10}\ {}_5F_{10} + e^{-17,5r}\ {}_5L_{15}\ {}_5F_{15} + \ldots\ldots\ + e^{-47,5r}\ {}_5L_{45}\ {}_5F_{45} = l_o$

dengan ketelitian sampai beberapa desimal sesuai yang kita harapkan.

a. Metode dari Ansley Coale

Persamaan $\psi(r) = 1$

Ambil pendekatan awal $r^* = \frac{\ln Ro}{\mu}$ dan $r = 0$.

Jika $\psi(r^*) > 1$, ambil $r^{**} = r^* + 0,5\ |r^* - r|$

Jika $\psi(r^*) < 1$, ambil $r^{**} = r^* - 0,5\ |r^* - r|$

Demikian pula proses selanjutnya.

b. Metode Newton Raphson

Persamaan $\psi(r) = 1$, dapat ditulis : $F(r) = \psi(r) - 1 = 0$.

Bila diketahui persamaan $F(x) = 0$, maka pendekatan akar x dari persamaan $F(x) = 0$, dicari dengan rumus :

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}$$

Maka harga akar r dari $F(r) = \psi(r) - 1 = 0$, dapat dicari dengan

$$r^* = r - \frac{\psi(r) - 1}{\psi'(r)}$$

c. Metode Iterasi

Pandang persamaan :

$$e^{-12,5r}\ {}_5L_{10}\ {}_5F_{10} + e^{-17,5r}\ {}_5L_{15}\ {}_5F_{15} + \ \ldots\ldots\ +$$

$$e^{-47,5r}\ {}_5L_{45}\ {}_5F_{45} = l_o$$

$$e^{-12,5r}\ \left(\frac{{}_5L_{10}}{l_o}\right)\ {}_5F_{10} + \ldots\ldots + e^{-47,5r}\ \left(\frac{{}_5L_{45}}{l_o}\right)\ {}_5F_{45} = 1$$

kalikan kedua ruas dengan $e^{27,5}$, didapat :

$$e^{27,5r} = e^{15r}\ \left(\frac{{}_5L_{10}}{l_o}\right)\ {}_5F_{10} + \ldots\ldots + e^{-20r}\left(\frac{{}_5L_{45}}{l_o}\right)\ {}_5F_{45}$$

Metode iterasi mulai kita jalankan sebagai berikut :

$$e^{27,5r^*} = e^{15r}\ \left(\frac{{}_5L_{10}}{l_o}\right)\ {}_5F_{10} + \ldots\ldots + e^{-20r}\left(\frac{{}_5L_{45}}{l_o}\right)\ {}_5F_{45}$$

ambil harga r awal, $r \approx \frac{\ln R_o}{\mu}$, kemudian hitung harga disebelah kanan tanda sama dengan,kemudian di ln kan dan dikalikan dengan 1/27,5 untuk mendapatkan harga r^*. Lalu substitusikan r^* pada r untuk mendapatkan r^{**} demikian seterusnya.

Contoh :

Tabel (III.3.2). Diberikan data-data sebagai berikut :

x	${}_5L_x$	${}_5K_x/1000$ penduduk wanita	${}_5B_x$ kelahiran
5	487.312	10.006	0
10	486.502	9.065	7.816
15	485.484	8.045	585.710
20	483.940	6.546	1.439.486
25	482.030	5.614	1.007.362
30	479.486	5.632	585.006
35	475.789	6.193	309.814
40	470.394	6.345	87.626
45	462.418	5.796	4.670
		laki :	2.060.162
		perempuan :	1.967.328
		jumlah :	4.027.490

Sumber : Nathan Keyfitz (1968,29)

x	$_5F_x = \frac{_5B_x}{_5K_x} \frac{1967328}{4027490}$	$_5\phi_x = \frac{_5L_x \ _5F_x}{l_o}$	$(x+2,5) \ _5\phi_x$	$(x+2,5)^2 \ _5\phi_x$
10	0,00042	0,00205	0,02563	0,32031
15	0,03556	0,17265	3,02138	52,87406
20	0,10742	0,51983	11,69618	263,16394
25	0,08765	0,42250	11,61875	319,51563
30	0,05074	0,24328	7,90660	256,96450
35	0,02444	0,11627	4,36013	163,50469
40	0,00675	0,03173	1,34853	57,31231
45	0,00039	0,00182	0,08645	4,10638
	jumlah	1,51013 $= R_o$	40,06365 $= R_1$	1117,76182 $= R_2$

Keterangan :

x = interval umur dari $x - x+5$

$_5L_x$ = jumlah tahun kehidupan dari umur $x - x+5$ (dari Tabel Kematian)

$_5K_x$ = jumlah populasi wanita yang berumur antara $x - x+5$

$_5B_x$ = jumlah kelahiran dari wanita umur antara $x - x+5$

$$_5F_x = \frac{\text{jumlah bayi perempuan dari wanita umur } x - x+5}{\text{jumlah penduduk wanita umur } x - x+5}$$

$$= \frac{\text{jumlah seluruh kelahiran dari wanita umur } x - x+5}{\text{jumlah penduduk wanita umur } x - x+5} \cdot$$

proporsi jumlah bayi perempuan

$$R_o = \sum_{x=10,15,..,45} \ _5\phi_x = 1,51013$$

$$R_1 = \sum_{x=10,15,..,45} (x+2,5) \ _5\phi_x = 40,06365$$

$$\mu = \frac{R_1}{R_o} = \frac{40,06365}{1,51013} = 26,53 \quad \text{(persamaan (IV.1.3))}$$

$$\sigma^2 = \frac{R_2}{R_o} = \left(\frac{R_1}{R_o}\right)^2 - \frac{1117,76182}{1,51013} - (26,53)^2 = 36,33$$

(lihat persamaan (IV.1.4))

$$r_{awal} = \frac{\ln Ro}{\mu} = \frac{\ln 1,51013}{26,53} = 0,015537$$

(lihat persamaan (IV.1,9))

Bila dikerjakan dengan metode Iterasi akhirnya didapat harga $r \approx 0,015703$

$$r_L = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 \ln Ro}}{\sigma^2} = \frac{26,53 - \sqrt{(26,53)^2 - 2 \cdot 36,33 \; 0,4122}}{36,33}$$

$= 0,015706$ (lihat persamaan (IV.1.8))

III.4. Penyelesaian umum melalui Transformasi Laplace

Sebelum kita mempergunakan Transformasi Laplace untuk mencari penyelesaian umum dari persamaan (III.1.1) ,akan kita bicarakan dulu Transformasi Laplace secara umum.

Definisi :

Transformasi Laplace dari h(t) adalah $h^*(t)$ yang didefinisikan sebagai :

$$h^*(r) = \int_0^\infty e^{-rt} \, h(t) \, dt$$

dengan r bilangan real dan improper integral tersebut ada.

Definisi lain adalah :

$$g^*(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} \, g(t) \, dt$$

yang biasa digunakan dalam fisika. Tetapi disini akan kita gunakan definisi yang pertama.

Bila $h(t) = 1$, maka $h^*(r) = \int_0^\infty e^{-rt} \, 1 \, dt = \frac{1}{r}$

Bila $h(t) = t^n$, maka $h^*(r) = \int_0^\infty e^{-rt} \, t^n \, dt = \frac{n!}{r^{n+1}}$

Bila $h(t) = e^{r_s t}$, maka $h^*(r) = \int_0^\infty e^{-rt} \, e^{-r_s t} \, dt = \frac{1}{r-r_s}$

Beberapa sifat dari Transformasi Laplace :

1. Jika Transformasi Laplace dari h(t) adalah $h^*(r)$, maka Transformasi dari K h(t) adalah K $h^*(r)$, K = konstanta

2. Jika Transformasi dari h(t) dan k(t) masing-masing $h^*(r)$ dan $k^*(r)$, maka Transformasi dari (h(t)+k(t))

adalah $(h(t)+k(t))^* = h^*(r) + k^*(r)$

Dari 1 dan 2, Transformasi Laplace adalah operator linier.

3. Teorema convulusi yang dapat dinyatakan :

$$\left[\int_0^t h(t-a)\, k(a)\, da\right]^* = h^*(r)\, k^*(r)$$

Sekarang kita pandang persamaan (III.1.1)

$$B(t) = G(t) + \int_0^t B(t-x)\phi(x)\, dx$$

Masing-masing fungsi mempunyai transformasi sebagaiberikut:

$$B^*(r) = \int_0^\infty e^{-rt} B(t)\, dt$$

$$G^*(r) = \int_0^\infty e^{-rt} G(t)\, dt$$

$\phi^*(r) = \int_0^\infty e^{-rt}\phi(t)\, dt$, sedangkan

$$\left[\int_0^t B(t-x)\,\phi(x)\, dx\right]^* = B^*(r)\,\phi^*(r)$$

Dengan sifat-sifat dari Transformasi Laplace, maka persamaan (III.1.1) mempunyai transformasi:

$$B^*(r) = G^*(r) + B^*(r)\,\phi^*(r)$$

$$B^*(r) - B^*(r)\,\phi^*(r) = G^*(r)$$

$$B^*(r)\,(1 - \phi^*(r)) = G^*(r)$$

Maka :

$$B^*(r) = \frac{G^*(r)}{1-\phi^*(r)} \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(III.4.1)}$$

Pandang penyebut dari persamaan (III.4.1) , yaitu: $1 - \phi^*(r)$. Bila $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ merupakan akar-akar dari persamaan $\psi(r) = 1$, maka $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ tersebut juga merupakan akar-akar dari persamaan $1 - \phi^*(r) = 0$, atau $\phi^*(r) = 1$, sebab :

$$\psi(r) = \int_\alpha^\beta e^{-rt}\phi(t)\, dt$$

$$\psi(r) = \int_0^\infty e^{-rt}\,\phi(t)\,dt$$

$$= \phi^*(r) = 1$$

Dengan mengikuti cara Feller akan kita uraikan $B^*(r)$, menjadi :

$$B^*(r) = \frac{G^*(r)}{1-\phi^*(r)}$$

$$= \frac{Q_1}{r-r_1} + \frac{Q_2}{r-r_2} + \frac{Q_3}{r-r_3} + \dots + \frac{Q_k}{r-r_k} + \dots \quad \text{(III.4.2)}$$

dengan $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$ adalah akar-akar persamaan : $\psi(r) = \phi^*(r) = 1$, dan $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots$ adalah koefisien-koefisien yang akan dicari.

Untuk mendapatkan harga $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots$, dapat dengan cara :

Ambil $r = r_k + \varepsilon$ dalam (III.4.2), dan diambil limit $\varepsilon = 0$, maka :

$$Q_k = \lim_{r \to r_k} \left[\frac{(r - r_k)\ G^*(r)}{1-\phi^*(r)} \right]$$

$$= \left. \frac{1.\ G^*(r) + (r - r_k)\frac{d}{dr}G^*(r)}{0 - \frac{d}{dr}\phi^*(r)} \right]_{r=r_k}$$

$$= \left. \frac{G^*(r)}{-\frac{d}{dr}\ \phi^*(r)} \right]_{r=r_k} \quad \dots\dots\dots \text{(III.4.3)}$$

Kita lihat persamaan (III.2.7)

$$Q_s = \frac{\int_0^\beta e^{-r_s t}\ G(t)\,dt}{\int_0^\beta a\,e^{-r_s a}\ \phi(a)\,da}$$

$$= \frac{\int_0^\infty e^{-r_s t}\ G(t)\,dt}{\int_0^\infty\ \ e^{-r_s a}\ \ \dots}$$

$$= \frac{G^*(r)}{-\frac{d}{dr}\,\phi(r)}\Bigg]_{r=r_s}$$

Sehingga ternyata persamaan (III.4.3) identik dengan persamaan (III.2.7).

Deret dalam persamaan (III.4.2) mudah diinversikan, sebab :

$$(Q_k\, e^{r_k t})^* = \int_0^\infty e^{-rt}\, Q_k\, e^{r_k t}\, dt$$

$$= Q_k \int_0^\infty e^{-(r-r_k)t}\, dt$$

$$= \frac{Q_k}{r-r_k}$$

atau invers dari $Q_k/r-r_k$ adalah $Q_k\, e^{r_k t}$.

Sehingga penyelesaian umum B(t) dari persamaan (III.1.1) , didapat dengan invers dari $B^*(r)$.