BAB II
TABEL KEMATIAN

II.1. Tabel Kematian pada penduduk stasioner secara umum

Di antara sekian banyak masalah yang harus diatasi oleh ahli demografi ialah menyusun perkiraan mengenai jumlah orang yang mungkin masih akan hidup misalnya 5 tahun, atau 10 tahun lagi yang tercakup dalam kelompok penduduk tertentu.

Keterangan-keterangan mengenai jumlah yang mati pada berbagai tingkat umur, yang bertahan hidup pada berbagai tingkat umur dan tentang umur rata-rata yang mereka capai diberikan oleh apa yang biasanya disebut : Tabel Kematian.

Misalnya pada suatu negara pada suatu saat lahir 100.000 bayi, dan dari data-data tertentu dapat ditetapkan berapa yang berhasil mencapai umur 1 tahun, 2 tahun, ...50 tahun dan seterusnya sampai akhirnya semua meninggal. Orang-orang yang merupakan kelompok hipotetis itu merupakan suatu angkatan yang dalam demografi biasa disebut suatu kohor. Dapat dikatakan bahwa kohor adalah sekelompok penduduk dari angkatan yang sama yang dipengaruhi oleh faktor - faktor yang sama, Sedangkan jumlah 100.000 tersebut merupakan jumlah hipotetis/ jumlah permulaan yang nantinya disebut dengan radiks tabel kematian.

Dengan demikian dapat dikatakan Tabel Kematian menggambarkan riwayat hidup dari suatu kelompok hipotetis manusia atau kohor, yang berangsur-angsur berkurang jumlahnya karena kematian.

Dalam pembuatan Tabel Kematian kita membuat beberapa asumsi ialah :

1. kohor hanya berkurang secara berangsur-angsur karena kematian, tidak ada migrasi masuk dan migrasi keluar (closed cohort).
2. Kematian kohor menurut pola tertentu pada berbagai tingkat umur.
3. Kohor berasal dari radiks tertentu.
4. Pada tiap tingkat umur rata-rata orang meninggal mencapai pertengahan antara 2 tingkat umur bertu rut-turut.

Jenis-jenis Tabel Kematian

Tabel kematian dapat diperinci menjadi 2 jenis

1. Tabel kematian kohor/ tabel kematian generasi
2. Tabel kematian yang sedang berjalan

1. Tabel Kematian kohor

menggambarkan jalannya kematian yang telah dialami kohor tertentu selama masa hidupnya, dari mulai dilahirkan hingga anggota-anggota terakhir kohor tersebut meninggal semua. Jadi jelas bahwa tabel ini baru dapat dibuat bila semua anggota kohor tersebut meninggal. Tabel ini mempunyai kelemahan karena sulit diperoleh data-data yang dibutuhkan.

2. Tabel Kematian yang sedang berjalan

dengan memperhatikan kelemahan pada Tabel Kematian kohor maka dibuat Tabel Kematian yang sedang berjalan. Tabel Kematian model ini menggambarkan kohor sintetis yang mengalami kematian menurut pola kematian sesuai umur yang berlaku untuk suatu penduduk pada periode waktu tertentu.

Sedangkan bentuk tabel Kematian dibedakan menjadi :

1. Tabel Kematian lengkap

Yaitu Tabel Kematian yang dibuat secara lengkap terperinci menurut umur satu tahunan.

2. Tabel Kematian singkat

yaitu tabel Kematian yang juga meliputi seluruh umur, tetapi tidak diperinci secara tahunan, melainkan menurut golongan umur atau kelas interval yang lebih luas (5 tahun, 10 tahun).

Tabel Kematian singkat walaupun bentuknya lebih singkat/ pendek, tetapi mempunyai ketepatan yang hampir sama dengan Tabel Kematian Lengkap. Tabel Kematian singkat biasanya dihitung atas dasar kelompok umur 5 tahunan, tabel ini sangat berguna dalam suatu populasi yang kurang baik distribusi umurnya.

Penjelasan kolom-kolom Tabel Kematian

Kolom (1) Golongan umur (x - x + n)

yang termasuk dalam golongan umur x - x + n adalah orang-orang yang telah merayakan ulang tahunnya yang ke x kali tetapi belum mencapai ulang tahunnya yang ke x + n kali. Misalnya dengan umur 30 - 35 tahun dimaksud interval 5 tahun antara ulang tahun ke 30 dan ke 35.

Kolom (2) Probabilitas mati (${}_nq_x$)

Kolom ini menunjukkan bagian dari kohor yang masih hidup pada awal interval umur x, tetapi yang akan mati sebelum mencapai ujung interval umur x + n tahun. Misalnya ${}_5q_{30}$ pada Tabel Kematian singkat adalah 0,010760, berarti proporsi yang mati dan berumur antara 30 - 35 tahun adalah 0,010760 bagian dari tiap 100.000 orang yang masih hidup pada waktu merayakan ulang tahun ke 30 atau 1076 orang dari tiap 100.000 orang itu tidak akan mencapai umur 35 tahun tepat. Jadi ${}_nq_x$ sebenarnya menyatakan bagi orang-orang yang masih hidup pada awal interval umur probabilitas akan mati sebelum mencapai awal interval umur berikutnya.

$_nq_x$ dapat dihitung dengan cara sebagai berikut :

misal : jumlah penduduk pada pertengahan interval umur $_nK_x$

jumlah penduduk yang mati selama interval umur $_nD_x$

Kita buat anggapan bahwa orang meninggal tersebar merata sepanjang interval umur, sehingga jumlah penduduk pada awal interval umur adalah $_nK_x + \frac{1}{2}\,_nD_x$. Sehingga probabilitas seseorang meninggal selama interval umur tersebut adalah :

$$_nq_x = \frac{_nD_x}{_nK_x + \frac{1}{2}\,_nD_x} = \frac{_nM_x}{1 + \frac{1}{2}\,_nM_x}$$

dimana :

$$_nM_x = \frac{_nD_x}{_nK_x}$$ (seringkali disebut angka kematian menurut umur).

Kolom $_nq_x$ ini merupakan kolom dasar bagi seluruh tabel kematian sebab semua kolom lain secara langsung atau tidak langsung disadur dari kolom ini.

Kolom 3 Probabilitas masih hidup ($_np_x$)

Kolom ini menggambarkan bagian/ probabilitas yang masih hidup dari sejumlah orang yang berumur x - x + n tahun. Misalnya $_nq_x$ = 0,010760, maka $_np_x = 1 - {_nq_x}$ = 1 - 0,010760 = 0,98924. Jadi kalau $_nq_x$ merupakan probabilitas untuk mati, maka $_np_x$ menyatakan probabilitas masih hidup bagi orang-orang yang ada interval umur x - x+n

Kolom (4) Jumlah yang mati ($_nd_x$)

Kolom ini membicarakan jumlah orang yang meninggal pada berbagai tingkat umur yang berasal dari kohor kelahiran sebanyak 100.000 orang. Misalnya untuk ${}_5d_{30}$ = 1.011 berarti ada sejumlah 1.011 meninggal antara umur x - x+n.

Kolom (5) Jumlah yang masih hidup (l_x)

Kolom ini menunjukkan jumlah orang yang tadinya merupakan kohor dengan radiks 100.000 pada waktu lahir, masih hidup hingga umur tepat x tahun. Nilai l_x dihitung dari nilai ${}_nq_x$ dengan :

$$l_x = \frac{l_{x+n}}{{}_np_x} \quad , \text{ karena } \quad {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Kolom (6). Jumlah tahun kehidupan antara umur x - x + n (${}_nL_x$)

Kolom ${}_nL_x$ menyatakan jumlah tahun kehidupan orang selama interval umur x - x + n. Untuk menentukan nilai-nilai ${}_nL_x$ secara tepat sangat sulit, oleh sebab itu jarang dilakukan. Namun kita dapat mendekati nilai-nilai tersebut dengan anggapan bahwa kematian tersebar merata sepanjang interval umur x - x + n. Maka kita dapat memperkirakan ${}_nL_x$ dengan merata-ratakan jumlah mereka yang bertahan hidup pada permulaan interval umur (l_x) dengan mereka yang bertahan hidup pada akhir interval umur (l_{x+n}) yaitu :

$${}_nL_x = \frac{n}{2} (l_x + l_{x+n})$$

Tetapi untuk beberapa tahun pertama kehidupan tidak wajar menggunakan rata-rata dari l_x dan l_{x+n} sebagai pendekatan dari ${}_nL_x$ karena kematian tidak tersebar merata dalam seluruh interval, misalnya pada L_o dan L_1 , karena kita ta hu kematian bayi lebih sering terjadi pada awal kehidupannya. Untuk L_o dan L_1 biasanya diambil pendekatan :

$$L_o = 0,3\ l_o + 0,7\ l_1$$

$$L_1 = 0,4\ l_1 + 0,6\ l_2$$

Sebenarnya ${}_nL_x$ dapat didekati secara lebih teliti dengan menggunakan rumus :

$${}_nL_x = \frac{n}{2}(l_x + l_{x+n}) + \frac{n}{24}({}_nd_{x+n} - {}_nd_{x-n})$$

Hal ini akan dibuktikan pada bagian yang lebih lanjut.

Kolom (7) Total tahun kehidupan setelah umur tepat x (T_x)

Kolom ini memberikan jumlah seluruh tahun kehidupan setelah umur tepat x, dengan kata lain angka T_x menunjukkan jumlah seluruh tahun kehidupan yang akan dihayati kohor setelah mencapai umur x. Ini adalah jumlah nilai - nilai ${}_nL_x$ untuk interval umur x - x + n dan semua interval umur yang lebih besar dari pada x - x + n yang disajikan dalam tabel kematian, maka :

$$T_x = \sum_{i=0} {}_nL_{x+in} = {}_nL_x + {}_nL_{x+n} + {}_nL_{x+2n} + \ldots$$

Kolom (8) Harapan hidup rata-rata pada umur tepat x (e_x^o)

Kolom ini menunjukkan rata-rata jumlah tahun kehidupan setelah mencapai umur tepat x. Apabila jumlah total tahun yang akan dihayati semua orang dari suatu umur tertentu, misal x, dibagi dengan banyaknya orang yang bertahan hidup hingga mencapai umur x, maka didapat berapa lama rata-rata orang-orang tersebut dapat hidup setelah berumur x. Dapat dirumuskan :

$$e_x^o = \frac{T_x}{l_x}$$

Dari uraian diatas, dapat dilihat hubungan antar kolom dalam tabel Kematian, antara lain :

$$_np_x = 1 - {}_nq_x$$

$$_nd_x = l_{x+n} - l_x$$

$$_nd_x = {}_nq_x \; l_x \quad \text{atau} \quad {}_nq_x = \frac{_nd_x}{l_x}$$

$$l_x = \frac{l_{x+n}}{_np_x} \quad \text{atau} \quad {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$_nL_x = \frac{n}{2} (l_x + l_{x+n})$$

$$T_x = \sum_{i=0} {}_nL_{x+in} = {}_nL_x + {}_nL_{x+n} + {}_nL_{x+2n} + + \ldots$$

$$= T_{x+n} + {}_nL_x$$

$$e_x^o = \frac{T_x}{l_x}$$

Kolom-kolom yang telah disebutkan diatas adalah kolom-kolom yang lazim ada pada tiap Tabel Kematian.

Di depan telah diungkapkan bahwa Tabel Kematian melukiskan sejarah hidup dari suatu radiks orang-orang yang lahir bersamaan, yang kemudian melalui deretan angka-angka kematian hingga akhirnya semua meninggal. Secara alternatif dapat dipikirkan bahwa fungsi tabel kematian menggambarkan apa yang terjadi pada tiap interval waktu dalam suatu penduduk secara hipotetis.

Dalam pembicaraan diatas penduduk yang dimaksud adalah penduduk yang stasioner. Para demograf memandang penduduk stationer sebagai berikut :

" Penduduk stasioner adalah model penduduk tanpa migrasi dimana kesamaan kemungkinan kematian menu -

rut umur berlaku terus menerus dan terdapat jum-lah kelahiran dan kematian yang sama setiap tahunnya ".

Dalam penduduk stasioner, jumlah orang yang hidup dalam setiap kelompok umur tidak pernah berubah, karena seseorang yang meninggalkan suatu kelompok umur sewaktu dia meninggal atau karena menjadi lebih tua akan digantikan oleh seorang yang lain dari kelompok umur yang lebih rendah berikutnya.

Beberapa kolom tambahan pada Tabel Kematian.

1. Kolom yang menyatakan rata-rata tahun kehidupan (dalam interval umur x - x + n) dari mereka yang meninggal dalam interval x - x + n (${}_na_x$).

Dengan mengingat bahwa jumlah tahun kehidupan ${}_nL_x$ pada interval x - x + n dapat dikomposisikan sebagai jumlahan dari tahun kehidupan orang-orang yang berhasil hidup melalui interval umur tersebut (masing-masing n tahun) dan tahun kehidupan dari ${}_nd_x = l_x - l_{x+n}$ yaitu orang-orang yang meninggal dalam interval tersebut. Maka dapat dikomposisikan : ${}_nL_x = n\,l_{x+n} + {}_nd_x \; {}_na_x$

atau $${}_na_x = \frac{{}_nL_x - n\,l_{x+n}}{{}_nd_x}$$

2. Kolom angka kematian menurut umur dari Tabel Kematian (${}_nm_x$)

Angka kematian menurut umur yang sebenarnya (yang dihitung melalui observasi), seperti yang telah disebutkan terdahulu adalah :

$${}_nM_x = \frac{{}_nD_x}{{}_nK_x}$$

Secara pendekatan dalam tabel kematian angka kematian menurut umur ini dihitung secara :

$$ {}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} $$

Dari definisi ${}_n a_x$ dan ${}_n m_x$ akan kita cari hubungan antara ${}_n a_x$, ${}_n m_x$ dan ${}_n q_x$ sebagai berikut :

$$ {}_n q_x = \frac{n .\ {}_n m_x}{1 + (n - {}_n a_x) .\ {}_n m_x} $$

Bukti :

$$ {}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x} $$

$$ = \frac{n .\ {}_n d_x}{n .\ l_x} = \frac{n .\ {}_n d_x}{n (l_x - l_{x+n}) + n .\ l_{x+n}} $$

$$ = \frac{n .\ {}_n d_x}{n .\ {}_n d_x + n .\ l_{x+n}} $$

$$ = \frac{n .\ {}_n d_x}{{}_n L_x + n .\ {}_n d_x - {}_n L_x + n .\ l_{x+n}} $$

$$ = \frac{n .\ {}_n d_x \ / \ {}_n L_x}{1 + \dfrac{n .\ {}_n d_x}{{}_n L_x} - \dfrac{{}_n L_x - n .\ l_{x+n}}{{}_n L_x}} $$

$$ = \frac{n .\ {}_n m_x}{1 + \left(n - \dfrac{{}_n L_x - n .\ l_{x+n}}{{}_n d_x} \right) . \dfrac{{}_n d_x}{{}_n L_x}} $$

$$ = \frac{n .\ {}_n m_x}{1 + (n - {}_n a_x) .\ {}_n m_x} $$

Terbukti.

Sebagai lanjutan dari perkembangan Tabel Kematian sebagai suatu alat demografi bagi berbagai jenis tujuan,dikenal berbagai model tabel Kematian. Hingga dewasa ini ada 2 jenis model Tabel Kematian yang banyak digunakan untuk berbagai tujuan study demografi :

Pertama, model Tabel Kematian yang disusun oleh PBB.

Kedua , model Tabel Kematian yang disusun oleh kelompok sarjana dari Princeton univercity.

Tabel Kematian model PBB terdiri dari 24 jenis Tabel Kematian yang dimulai dengan level 0, jika e_o^o = 20 tahun hingga level 115, jika e_o^o = 73,9 tahun.

Sedangkan Tabel Kematian yang disusun oleh para sarjana dari Princeton univercity dapat dibagi menjadi West model life tables East model life tables, North model life tables dan South model life tables. Masing-masing model ini mempunyai ciri-ciri pola kematian yang berbeda-beda dan masing-masing tepat/ cocok untuk tempat-tempat yang berbeda didunia ini.

Contoh-contoh penerapan Tabel Kematian.

1. Diberikan data-data sebagai berikut :

umur(x)	$_{10}q_x$	umur (x)	$_nq_x$
0	0,02938	60	0,29064
10	0,00873	70	0,55102
20	0,01548	80	0,84596
30	0,01971	90	0,97895
40	0,04723	100	1,00000
50	0,12452	110	1,00000

Sumber : AH Pollard (1984 ,73)

Lengkapilah tabel tersebut dengan kolom-kolom l_x , $_{10}d_x$,

$_{10}p_x$, $_{10}L_x$, T_x , e_x^o (ambil l_o = 100.000)

Jawab :

Akan kita lengkapi dulu kolom l_x , $_{10}d_x$, $_{10}p_x$ dan

$_{10}L_x$.

$$_{10}d_x = {}_{10}q_x \cdot l_x \text{ , maka } {}_{10}d_o = {}_{10}q_o \cdot l_o$$

$$_{10}d_o = 0{,}2938 \cdot 100.000 = 2938$$

$$_{10}p_x = 1 - {}_{10}q_x \text{ , maka } {}_{10}p_o = 1 - {}_{10}q_o$$

$$_{10}p_o = 1 - 0{,}02938 = 0{,}97062$$

$$l_{x+10} = l_x - {}_{10}d_x \text{ , maka } l_{10} = l_o - {}_{10}d_o$$

$$l_{10} = 100.000 - 2938 = 97062.$$

$$_{10}L_x = \frac{10}{2}(l_x + l_{x+10}) \text{, maka}$$

$$_{10}L_o = \frac{10}{2} (l_o + l_{10})$$

$$_{10}L_o = \frac{10}{2} (100.000 + 97062) = 985{,}310$$

$$_{10}d_{10} = {}_{10}q_{10} \cdot l_{10} = 0{,}00873 \cdot 97.062 = 847$$

$$_{10}p_{10} = 1 - {}_{10}q_{10} = 1 - 0{,}00873 = 0{,}99127$$

$$l_{20} = l_{10} - {}_{10}d_{10} = 97062 - 847 = 96215$$

$$_{10}L_{10} = \frac{10}{2} (l_{10} + l_{20}) = \frac{10}{2} (97062 + 96125)$$

$$= 966.385$$

.
.
.

dst

Dari data $_nL_x$ yang telah lengkap, akan kita hitung T_x ,

dan e_x^o .

$$T_{110} = 0$$

$$T_{100} = {}_{10}L_{110} + {}_{10}L_{100} = 0 + 400 = 400$$

$$e^o_{100} = \frac{T_{100}}{l_{100}} = \frac{400}{80} = 5$$

$$T_{90} = {}_{10}L_{110} + {}_{10}L_{100} + {}_{10}L_{90} = T_{100} + {}_{10}L_{90}$$

$$= 400 + 19{,}400 = 19800.$$

$$e^o_{90} = \frac{T_{90}}{l_{90}} = \frac{19800}{3800} = 5{,}21$$

$$T_{80} = T_{90} + {}_{10}L_{80} = 19800 + 142345 = 162145$$

$$e^o_{80} = \frac{T_{80}}{l_{80}} = \frac{162145}{24669} = 6{,}57$$

•
•
•
dst

Didapatkan Tabel sebagai berikut :

umur (x)	l_x	$_{10}d_x$	$_{10}q_x$	$_{10}p_x$	$_{10}L_x$	T_x	e^o_x
0	100.000	2.938	0,02938	0,97062	985.310	6.802.840	68,03
10	97.062	847	0,00873	0,99127	966.385	5.817.530	59,94
20	96.215	1.489	0,01548	0,98452	954.705	4.851.145	50,42
30	94.726	1.867	0,01971	0,98029	937.925	3.896.440	41.13
40	92.859	4.386	0,04723	0,95277	906,660	2.958.515	31.86
50	88.473	11.017	0,12452	0,87548	829.645	2.051.855	23.19
60	77.456	22.512	0,29064	0,70936	662.000	1.222.210	15.78
70	54.944	30.275	0,55102	0,44898	398.065	560.210	10.20
80	24.669	20.869	0,84596	0,15404	142.345	162.145	6.57
90	3.800	3.720	0,97895	0,02105	19.400	19.800	5.21
100	80	80	1,00 000	0,00000	400	400	5.00
110	0	0	1,00 000	0,00000	0	0	

2. Diberikan data-data sebagai berikut :

x	l_x	d_x	p_x	q_x
40	86.000	258	0,997	0,003
41	85.742	257	0,997	0,003
42	85.485	342	0,996	0,004
43	85.143	341	0,996	0,004
44	84.802	424	0,995	0,005
45	84.378	422	0,995	0,005

Sumber : Ida Bagus Mantra (1985 , 119)

a. Berapa kemungkinan seorang berumur 40 tahun akan mencapai umur 45 tahun.

Jawab :

Kemungkinan seseorang berumur 40 tahun akan mencapai umur 45 tahun adalah :

$$\frac{l_{45}}{l_{40}} = \frac{84.378}{86.000} = 0,98114.$$

b. Kemungkinan seorang yang berumur 40 tahun akan meninggal antara umur 40 dan 45 tahun.

Jawab :

Kemungkinan seorang yang berumur 40 tahun akan meninggal antara umur 40 dan 45 tahun adalah :

$$= \frac{d_{40} + d_{41} + d_{42} + d_{43} + d_{44}}{l_{40}}$$

$$= \frac{258 + 257 + 342 + 341 + 424}{86.000} = \frac{1622}{86.000}$$

$$= 0,01886$$

Dengan cara lain :

$$= \frac{l_{40} - l_{45}}{l_{40}} = \frac{86.000 - 84.378}{86.000} = \frac{1622}{86.000}$$

$= 0{,}01886$

c. Berapa jumlah rata-rata orang yang diharapkan meninggal antara umur 41 dan 45 tahun yang tercakup dalam 3000 orang yang sekarang berumur 40 tahun.

Jawab :

Jumlah orang yang meninggal antara umur 41 tahun , dan 45 tahun adalah : $l_{41} - l_{45} = 85.742 - 84.378 = 1.364$

Apabila terdapat 86.000 orang yang masih hidup pada umur 40 tahun, maka 1.364 orang diharapkan akan meninggal antara umur 41 dan 45 tahun. Bila terdapat 3000 orang berumur 40 tahun, maka jumlah orang yang diharapkan meninggal antara umur 41 dan 45 tahun adalah :

$$3000 \times \frac{l_{41} - l_{45}}{l_{40}} = 3000 \times \frac{1364}{86.000}$$

$= 48$ orang.

d. Berapakah kemungkinan seorang yang sekarang berumur 41 tahun akan meninggal setelah merayakan ulang tahunnya ke 44.

Jawab :

Sejumlah 84.802 orang dapat merayakan ulang tahun ke 44, dan sejumlah 84.378 orang yang dapat merayakan ulang tahun ke 45, jadi yang meninggal sebelum sempat merayakan ulang tahun ke 45 besarnya :

$l_{44} - l_{45} = 84.802 - 84.378 = 424$ orang.

Kemungkinan seseorang meninggal setelah merayakan ulang tahun ke 44 adalah :

$$\frac{l_{44} - l_{45}}{l_{41}} = \frac{424}{85.742} = 0{,}004945$$

3. Berapa rata-rata umur meninggal dari orang-orang yang

telah mencapai umur :

a. 20 tahun

b. 40 tahun

c. 60 tahun

Diketahui : $\overset{o}{e}_{20}$ = 50,4 tahun

$\overset{o}{e}_{40}$ = 31,8 tahun

$\overset{o}{e}_{60}$ = 15,6 tahun

Jawab :

Rata-rata umur meninggal dari orang-orang yang mencapai umur :

a. 20 tahun adalah : $20 + \overset{o}{e}_{20} = 20 + 50{,}4 = 70{,}4$ tahun

b. 40 tahun adalah : $40 + \overset{o}{e}_{40} = 40 + 31{,}8 = 71{,}8$ tahun

c. 60 tahun adalah : $60 + \overset{o}{e}_{60} = 60 + 15{,}6 = 75{,}6$ tahun

4. Hitung kemungkinan seorang bayi yang baru dilahirkan akan hidup dalam jangka waktu 20 tahun lagi !

Diketahui : l_{20} = 97.278

l_0 = 100.000

Jawab : .

Kemungkinan bahwa bayi itu akan hidup 20 tahun lagi sebesar :

$$\frac{l_{20}}{l_0} = 0{,}97278.$$

II.2. Tabel Kematian ditinjau dalam bentuk fungsi-fungsi kontinu.

Pada bagian terdahulu telah dibahas mengenai Tabel Kematian secara umum dalam bentuk diskrit, sedangkan pada bagian ini akan kita bahas lebih mendalam lagi dengan meng ambil x sebagai variabel kontinu tidak lagi sebagai variabel diskrit. Dalam hal ini kita bedakan sedikit tanda, untuk l_x pada bentuk diskrit kita ubah menjadi $l_{(x)}$ pada bentuk kontinu.

Kita definisikan $\mu(x)$ adalah laju kematian, sebagai harga limit dari tingkat kematian bila interval umur sangat kecil. Jumlah kematian pada tabel kematian adalah :

$$l(x) - l(x+\Delta x) \text{ , maka :}$$

$$\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{l(x) - l(x+\Delta x)}{l(x) \quad \Delta x}$$

$$= \frac{-d\, l(x)}{l(x) \;\; dx}$$

$$\mu(x) = -\frac{d \;\ln\; l(x)}{dx} \quad , \quad \ldots\ldots (II.2.1.)$$

Didapat suatu bentuk p.d :

$$\mu(x) \;\; dx = -\; d \;\ln l(x)$$

Dengan integrasi didapatkan definisi dari $l(x)$ sebagai berikut :

$$-\mu(x) \;\; dx = d \;\ln\; l(x)$$

$$-\int \mu(x)\; dx = \ln l(x) + k_1$$

$$e^{-\int_0^x \mu(t) \;\; dt} = k.\; l(x)$$

atau

$$l(x) = c \;.\; \exp \left[-\int_0^x \mu(t)\; dt\right] .$$

Ambil $x = 0$, maka $l(o) = l_0$ = radiks dari tabel kematian

$$l_0 = c \; \exp \left[-\int_0^0 u(t)\; dt\right]$$

didapat $C = l_o$.

Jadi : $l(x) = l_o \exp\left[-\int_o^x \mu(t)\, dt\right]$.

Kesempatan hidup n tahun kemudian bagi seseorang berumur x adalah :

$$\frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l_o \exp\left[-\int_o^{x+n} \mu(t)\, dt\right]}{l_o \exp\left[-\int_o^{x} \mu(t)\, dt\right]}$$

$$= \exp\left[-\int_x^{x+n} \mu(t)\, dt\right]$$

Bila l_o individu kita ambil sebagai radiks kohor hipotetis, mereka akan mengalami pengurangan terus menerus oleh kematian. Jumlah yang mati antara umur x dan x + dx , adalah :

$$d_x = \int_o^1 l(x+t)\, \mu(x+t)\, dt$$

untuk interval n tahun :

$$_nd_x = \int_o^n l(x+t)\, \mu(x+t)\, dt$$

Dapat dikatakan bahwa jumlah orang yang berhasil mencapai usia x adalah jumlah seluruh orang yang meninggal sesudah umur x (sampai usia tertinggi yang dapat dicapai), maka didapat :

$$l_x = \int_o^{w-x} l(x+t)\, \mu(x+t)\, dt$$

sedang $l_o = \int_o^w l(t)\, \mu(t)\, dt$

dimana w adalah usia tertinggi yang dapat dicapai.

Bila kita pikirkan $l(x)$ dalam distribusi umur dari individu-individu yang hidup pada saat tertentu, maka jumlah orang yang hidup antara umur x dan x + d^x dalam penduduk stasioner hipotetis adalah : $l(x)\,dx$, untuk antara umur x dan x + n adalah :

$${}_nL_x = \int_0^n l(x+t)\ dt$$

Karena Tabel Kematian menyatakan suatu kohor, maka integral ${}_nL_x$ merupakan jumlah tahun kehidupan dari kohor antara umur x dan x + n.

Total tahun kehidupan dari sejumlah l_x orang yang telah mencapai umur x dari radiks l_o, sampai mencapai maksimum umur yang dapat dicapai oleh seseorang yang hidup (w) adalah :

$$T_x = \int_0^{w-x} l(x+t)\ dt$$

Sedang $T_o = \int_0^{w} l(t)\ dt$

Harapan hidup dari individu usia x, didapat dengan cara membagi total tahun kehidupan yang dapat dihayati oleh seluruh individu yang telah berusia x (T_x) dengan jumlah individu yang telah berusia x (l_x), jadi :

$$e_x^o = \frac{T_x}{l_x}$$

Akan kita tunjukkan bahwa e_x^o , rata-rata waktu hidup yang akan datang dari individu umur x, dapat dituliskan :

$$e_x^o = \frac{\int_0^{w-x} t\ l(x+t)\,\mu(x+t)\ dt}{\int_0^{w-x} l(x+t)\,\mu(x+t)\ dt}$$

Akan dibuktikan sebagai berikut :

Dari (II.2.1.) $\mu(x+t) = \dfrac{-d\ l(x+t)}{l(x+t)\ dt}$

atau $\mu(x+t) \cdot l(x+t)\,dt = -d\,l(x+t)$

Kita tahu $\int_{o}^{w-x} l(x+t)\,\mu(x+t)\,dt = l_x$

Maka :

$$e_x^o = \frac{-\int_{t=0}^{w-x} t . d\,l(x+t)}{l_x}$$

$$= \frac{-\Big[t\ \ l(x+t)\Big]_o^{w-x} + \int_o^{w-x} l(x+t)\ dt}{l_x}$$

$$= \frac{-\Big[(w-x)\ l(w)-0\Big] + \int_o^{w-x} l(x+t)\ dt}{l_x}$$

Dengan mengingat bahwa setiap orang meninggal sebelum umur w, atau $l(w) = 0$, maka :

$$e_x^o = \frac{\int_o^{w-x} l(x+t)\ dt}{l_x}$$

$$= \frac{T_x}{l_x}$$

Terbukti

Sekarang akan kita nyatakan $_n a_x$, yaitu rata-rata tahun kehidupan dari mereka yang meninggal dalam interval $x - x + n$ dalam bentuk kontinu. Jumlah individu dalam penduduk stasioner yang meninggal antara umur $x + t$ dan $x + t + dt$ ($t \leqslant n$) adalah $l(x+t)\ \mu(x+t)dt$. masing-masing individu tersebut telah hidup t tahun dalam interval $x - x + n$, maka $_n a_x$ dapat diperoleh dari ratio :

$$ {}_n a_x = \frac{\int_0^n t \; l(x+t)\, \mu(x+t)\; dt}{\int_0^n l(x+t)\, \mu(x+t)\; dt} \qquad n > 0 $$

Akan kita buktikan bahwa :

$$ {}_n a_x = \frac{\int_0^n t \; l(x+t)\, \mu(x+t)\, dt}{\int_0^n l(x+t)\, \mu(x+t)\; dt} = \frac{{}_n L_x - n.\; l_{x+n}}{{}_n d_x} $$

Bukti :

Penyebut $\int_0^n l(x+t)\; \mu(x+t)\; dt$ menunjukkan jumlah orang yang meninggal dalam interval umur x — $x + n$ yaitu ${}_n d_x$.

$$ {}_n a_x = \frac{\int_0^n t \; l(x+t)\, \mu(x+t)\; dt}{{}_n d_x} $$

$$ = \frac{-\int_0^n t \; d\; l(x+t)}{{}_n d_x} $$

$$ = \frac{-\Big[t \;\; l(x+t)\Big]_{t=0}^{n} + \int_0^n l(x+t)\; dt}{{}_n d_x} $$

$$ = \frac{-\Big[n \;\; l(x+n) - 0\Big] + {}_n L_x}{{}_n d_x} $$

$$ = \frac{{}_n L_x - n \;\; l_{x+n}}{{}_n d_x} $$

Terbukti.

Pada (II.1.) pernah disebutkan bahwa ${}_n L_x$ dapat didekati lebih teliti dengan rumus :

$$ {}_n L_x = \frac{n}{2} \left(l_x + l_{x+n} \right) + \frac{n}{24} \left({}_n d_{x+n} - {}_n d_{x-n} \right) $$

Sekarang hal ini akan kita buktikan.

Dari persamaan sebelumnya kita dapatkan integrasi dari $l(x)$ meliputi interval x - $x + n$ untuk mencari ${}_nL_x$ atau :

$$ {}_nL_x = \int_0^n l(x+t)\, dt $$

Sekarang akan kita nyatakan bentuk ini dalam bentuk dis - krit melalui 4 harga, yaitu : l_{x-n} , l_x , l_{x+n} , l_{x+2n} , sebagai berikut :

$$ {}_nL_x = \frac{13\ n}{24} (l_x + l_{x+n}) - \frac{n}{24} (l_{x-n} + l_{x+2n}) $$

$$ = \frac{n}{2} (l_x + l_{x+n}) + \frac{n}{24} ({}_nd_{x+n} - {}_nd_{x-n}) $$

Bukti :

Integral dari suatu fungsi $f_{(x)}$ dalam interval tertentu a sampai b, yang melalui 4 titik yang diberikan, misal : titik-titik x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , dapat diberikan dalam bentuk determinan sebagai berikut :

$$ \begin{vmatrix} \frac{b^4 - a^4}{4} & \frac{b^3 - a^3}{3} & \frac{b^2 - a^2}{2} & b - a & \int_a^b f(x)\, dx \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & f(x_1) \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 & f(x_2) \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 & f(x_3) \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 & f(x_4) \end{vmatrix} = 0 $$

Pandang $\int_0^n l(x+t)\, dt$,

Untuk 4 titik tertentu : $t = -n$, 0 , n , $2n$, didapat :

$t = -n$, maka $l(x+t) = l_{x-n}$

$$t = 0 , \quad \text{maka} \quad l(x+t) = l_x$$

$$t = n , \quad \text{maka} \quad l(x+t) = l_{x+n}$$

$$t = 2n, \quad \text{maka} \quad l(x+t) = l_{x+2n}$$

Maka diperoleh :

$$\begin{vmatrix} \frac{n^4 - 0}{4} & \frac{n^3 - 0}{3} & \frac{n^2 - 0}{2} & n & \int_0^n l(x+t)\,dt \\ -n^3 & n^2 & -n & 1 & l_{x-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_x \\ n^3 & n^2 & n & 1 & l_{x+n} \\ 8n^3 & 4n^2 & 2n & 1 & l_{x+2n} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{c} \\ b_1 - nb_3 \\ b_2 - b_3 \\ b_4 - b_3 \\ b_5 - b_3 \end{array} \begin{vmatrix} \frac{n^4}{4} & \frac{n^3}{3} & \frac{n^2}{2} & n & \int_0^n l(x+t)\,dt \\ -n^3 & n^2 & -n & 1 & l_{x-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_x \\ n^3 & n^2 & n & 1 & l_{x+n} \\ 8n^3 & 4n^2 & 2n & 1 & l_{x+2n} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{n^4}{4} & \frac{n^3}{3} & \frac{n^2}{2} & 0 & \int_0^m l(x+t)dt - n\,l_x \\ -n^3 & n^2 & -n & 0 & l_{x-n} - l_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_x \\ n^3 & n^2 & n & 0 & l_{x+n} - l_x \\ 8n^3 & 4n^2 & 2n & 0 & l_{x+2n} - l_x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{l} \\ b_1 + \frac{1}{4} n b_2 \\ b_3 + b_2 \\ b_4 + 8 b_2 \end{array} \begin{vmatrix} \frac{n^4}{4} & \frac{n^3}{3} & \frac{n^2}{2} & \int_0^n l(x+t)dt - n\, l_x \\ -n^3 & n^2 & -n & l_{x-n} - l_x \\ n^3 & n^2 & n & l_{x+n} - l_x \\ 8n^3 & 4n^2 & 2n & l_{x+2n} - l_x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{7}{12} n^3 & \frac{1}{4} n^2 & \int_0^n l(x+t)dt + \frac{1}{4} n\, l_{x-n} - \frac{5}{4} n\, l_x \\ -n^3 & n^2 & -n & l_{x+n} - l_x \\ 0 & 2n^2 & 0 & l_{x+n} + l_{x-n} - 2\, l_x \\ 0 & 12n^2 & -6n & l_{x+2n} + 8\, l_{x-n} - 9\, l_x \end{vmatrix} = 0$$

$$b_1 + \frac{1}{24} n b_3 \begin{vmatrix} \frac{7}{12} n^3 & \frac{1}{4} n^2 & \int_0^n l(x+t)dt + \frac{1}{4} n\, l_{x-n} - \frac{5}{4} n\, l_x \\ 2\, n^2 & 0 & l_{x+n} + l_{x-n} - 2\, l_x \\ 12n^2 & -6n & l_{x+2n} + 8\, l_{x-n} - 9\, l_x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{13}{12} n^3 & 0 & \int_0^n l(x+t)dt + \frac{1}{24} n\, l_{x+2n} + \frac{7}{12} n\, l_{x-n} - \frac{13}{8} n\, l_x \\ 2n^2 & 0 & l_{x+n} + l_{x-n} - 2\, l_x \\ 12n^2 & -6n & l_{x+2n} + 8\, l_{x-n} - 9\, l_x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{13}{12} n^3 & \int_0^n l(x+t)dt + \frac{1}{24} n\, l_{x+2n} + \frac{7}{12} n\, l_{x-n} - \frac{13}{8} n\, l_x \\ 2n^2 & l_{x+n} + l_{x-n} - 2\, l_x \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{13}{12} n^3(l_{x+n}+ l_{x-n}-2\ l_x) - 2n^2\left(\int_o^n l(x+t)dt + \frac{1}{24}\ n\ l_{x+2n} + \frac{7}{12}\ n\ l_{x-n} - \frac{13}{8}\ n\ l_x \right) = 0$$

$$\int_o^n l(x+t)\ dt + \frac{1}{24}\ n\ l_{x+2n} + \frac{7}{12}\ n\ l_{x-n} - \frac{13}{8}\ n\ l_x =$$

$$\frac{13}{24}\ n\ l_{x+n} + \frac{13}{24} n\ l_{x-n} - \frac{13}{12}\ n\ l_x$$

$$\int_o^n l(x+t)dt = \frac{13}{24}\ n\ l_{x+n} + \frac{13}{24}\ n\ l_x - \frac{n}{24}\ l_{x-n} - \frac{n}{24}\ l_{x+2n}$$

$$= \frac{13}{24}\ n\ (\ l_x + l_{x+n}) - \frac{n}{24}\ (\ l_{x-n} + l_{x+2n})$$

dengan mengingat :

$$l_{x-n} = l_x + {}_nd_{x-n}$$

$$l_{x+2n} = l_{x+n} - {}_nd_{x+n}$$

$$\int_o^n l(x+t)dt = \frac{13}{24}\ n\ (l_x+l_{x+n}) - \frac{n}{24}(l_x+{}_nd_{x-n}+ l_{x+n}-{}_nd_{x+n})$$

$$= \frac{n}{2}\ (l_x+ l_{x+n}) + \frac{n}{24}(\ {}_nd_{x+n} - {}_nd_{x-n})$$

Terbukti bahwa :

$${}_nL_x = \int_o^n l(x+t)dt$$

$$= \frac{13n}{24}\ (\ l_x+ l_{x+n}) - \frac{n}{24}\ (\ l_{x-n}+ l_{x+2n})$$

$$= \frac{n}{2}\ (\ l_x + l_{x+n}) + \frac{n}{24}\ (\ {}_nd_{x+n} - {}_nd_{x-n}).$$