BAB II

AKSI DAN PRINSIP HAMILTON

2.1. GERAK ALAMI DAN RUANG KEJADIAN.

Sebuah sistem dinamik dengan n buah derajat kebebasan dan sebuah fungsi Hamilton H (q,p,t) dengan q,p merupakan 2n besaran q_ρ, p_ρ (ρ = 1,2 , 3, . . . , n).

Persamaan kanonik gerak alami berbentuk :

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} \qquad (2.1)$$

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho}$$

Suatu gerak merupakan sebuah gerak alami bila memenuhi persamaan (2.1).

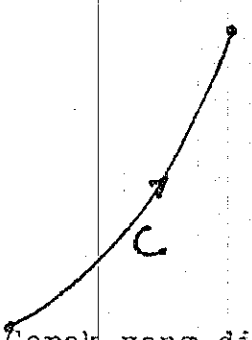
Dalam geometri sebuah himpunan bilangan (q_1, q_2, q_3, . . . ,q_n, t) merupakan sebuah titik dalam ruang (n + 1) dimensi.

Karena sebuah titik berhubungan dengan sebuah posisi dari suatu sistem pada saat tertentu,maka dapat dikatakan bahwa sebuah titik dari suatu ruang itu sebagai suatu kejadian dan menyebut ruang itu sebagai ruang kejadian E_{n+1}.

Setiap gerakan dari sistem (tidak perlu berupa gerak alami) dapat dinyatakan oleh q sebagai fungsi dari t.

Gambar geometris dari gerakan dalam E_{n+1} merupakan kurva C , analogi dengan kurva dari ruang yang biasa diberikan dengan persamaan x = x (t) , y = y(t) , z = z(t) seperti tampak pada gambar 1.

Bila n = 2 dapat dibuat sebuah model dari kawat. Untuk mendapatkan gambarnya harus diproyeksikan pada



sebuah bidang kertas.
Bila $n > 2$ hanya bisa dibayangkan sebagai proyeksi model dimensi $n + 1$ pada sebuah bidang kertas.

Gerak yang digambarkan dengan suatu kurva C dalam ruang kejadian E_{n+1}

Gambar 1.

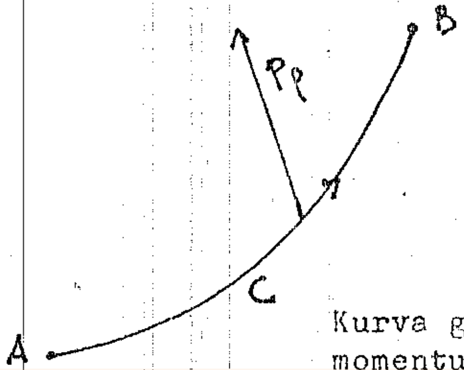
2.2. AKSI UNTUK SEBUAH GERAK SEBARANG.

Sebuah gerak dapat pula dinyatakan dengan kejadian A ke kejadian B dengan menulis :

$$
\begin{aligned}
q_\rho &= q_\rho (u) \\
p_\rho &= p_\rho (u) \\
t &= t (u).
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

Ini merupakan sebuah parameter u yang bergerak dari $u = u_1$ pada A ke $u = u_2$ pada B , maka dapat digambarkan sebagai sebuah kurva C di E_{n+1}.

Karena p ada maka dapat dinyatakan sebagai sebuah vektor momentum p_ρ pada sebuah vektor C seperti tampak pada gambar 2, sehingga dapat dikatakan



Kurva gerak dengan momentum.

Gambar 2.

bahwa (2.2) mendefinisikan sebuah kurva dengan momentum .

Definisi aksi sepanjang C :

$$S = \int_{u_1}^{u_2} \left(\sum_{\rho=1}^{n} p_\rho \frac{dq}{du} - H \frac{dt}{du} \right) du \quad (2.3)$$

atau

$$S = \int_{A}^{B} \left(\sum_{\rho=1}^{n} p_\rho \, dq_\rho - H \, dt \right) \quad (2.4)$$

dengan pengertian integrasi diambil sepanjang C.

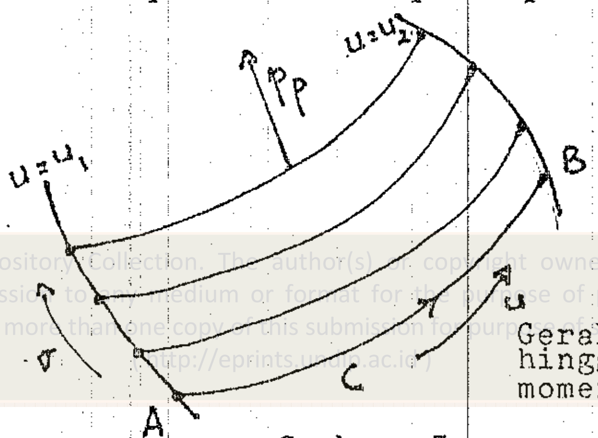
2.3. VARIASI AKSI.

Dalam variasi aksi yang dibicarakan bukan gerakan tunggal melainkan gerakan yang tak hingga banyaknya dan setiap gerakan ditentukan momentumnya , yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} q_\rho &= q_\rho (u, v) \\ p_\rho &= p_\rho (u, v) \\ t &= t (u, v) \end{aligned} \quad (2.5)$$

dengan u sebagai parameter seperti dalam (2.2), bergerak dari u_1 ke u_2 untuk setiap gerakan dan v merupakan parameter kedua (konstan) untuk setiap gerakan yang berlaku untuk menentukan setiap gerakan tertentu sehingga u_1, u_2 merupakan konstanta yang tidak tergantung terhadap v.

Himpunan dari gerakan yang timbul dalam E_{n+1} merupakan sebuah himpunan kurva seperti pada gambar 3.



Gambar 3.

Aksi dari setiap gerakan merupakan fungsi v yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$S(v) = \int_{u_1}^{u_2} \left(\sum_{\rho=1}^{n} p \frac{\partial q}{\partial u} - H \frac{\partial t}{\partial u} \right) du \quad (2.6)$$

seperti (2.3) ,tetapi dengan turunan parsiil karena v tidak berubah sepanjang geraknya.

Untuk mengetahui perubahan aksi dari suatu gerak ke gerak lain harus dideferensialkan terhadap v sehingga didapat :

$$\frac{dS}{dv} = \int_{u_1}^{u_2} \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial p_\rho}{\partial v} \frac{\partial p_\rho}{\partial u} + \sum_{\rho=1}^{n} p_\rho \frac{\partial^2 q_\rho}{\partial v\, \partial u} - \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial u} - H \frac{\partial^2 t}{\partial v\, \partial u} \Big) du \quad (2.7)$$

order dari deferensial parsiil boleh dipecah sehingga didapat :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial v\, \partial u} = \frac{\partial^2 q}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v} \quad (2.8)$$

dengan integral parsiil didapat :

$$\int_{u_1}^{u_2} p_\rho \frac{\partial^2 q_\rho}{\partial v\, \partial u}\, du =$$

$$\int_{u_1}^{u_2} p_\rho \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial q_\rho}{\partial v}\, du =$$

$$\left[p_\rho \frac{\partial q_\rho}{\partial v} \right]_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial p_\rho}{\partial u} \frac{\partial q_\rho}{\partial v}\, du \quad (2.9)$$

dengan cara yang sama didapat :

$$\int_{u_1}^{u_2} H \frac{\partial^2 t}{\partial v\, \partial u}\, du =$$

$$\int_{u_1}^{u_2} H \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} \, du =$$

$$\left[H \frac{\partial t}{\partial u} \right]_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} \, du \qquad (2.10)$$

(2.9) dan (2.10) dimasukkan dalam (2.7) :

$$\frac{dS}{dv} = \left[\sum_{\rho=1}^{n} p_\rho \frac{\partial q_\rho}{\partial v} - H \frac{\partial t}{\partial v} \right]_{u_1}^{u_2} +$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \left(\sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial p_\rho}{\partial v} \frac{\partial q_\rho}{\partial u} - \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial p_\rho}{\partial u} \frac{\partial q_\rho}{\partial v} - \right.$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} \right) du \qquad (2.11)$$

Tentukan perubahan kecil dalam S sebagai hasil dari perubahan kecil δv dalam v ketika menjalani kurva C ke kurva persekitarannya.

Pertambahan dalam menjalani kurva C dapat ditulis :

$$\frac{\partial q_\rho}{\partial u} du = dq_\rho \qquad \frac{\partial t}{\partial u} du = dt \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial p_\rho}{\partial u} du = dp_\rho \qquad \frac{\partial H}{\partial u} du = dH$$

Variasi yang dihasilkan dari perubahan dalam C dapat ditulis :

$$\frac{dS}{dv} \delta v = \delta S \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial t}{\partial v} \delta v = \delta t$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} \delta v = \delta H$$

$$\frac{\partial q_\rho}{\partial v} \delta v = \delta q_\rho$$

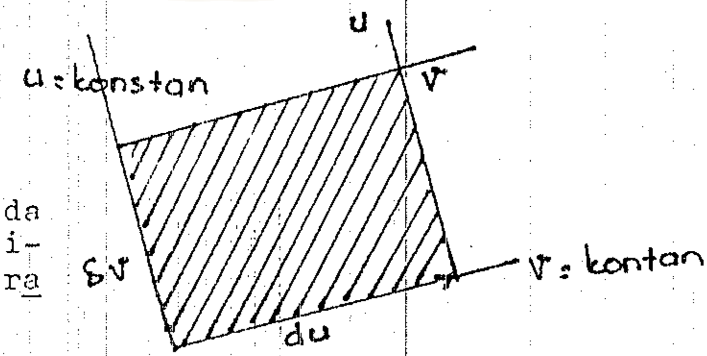
$$\frac{\partial p_\rho}{\partial v} \delta v = \delta p_\rho$$

Mengalikan (2.11) dengan v akan mendapat rumusan yang sederhana :

$$\delta S = \left[\sum_{\rho=1}^{n} p_\rho \, \delta q_\rho - H \, \delta t \right]_{u_1}^{u_2} + \int_A^B \Big(\sum_{\rho=1}^{n} \delta p_\rho \, dq_\rho - \sum_{\rho=1}^{n} \delta q_\rho \, dp_\rho - \delta H \, dt + \delta t \, dH \Big) \qquad (2.14)$$

Untuk menghindari turunan parsiil bersama-sama dilakukan: pada kurva dalam gambar 3 memberikan sebuah permukaan dua dimensi, bila digambarkan pada permukaan kurva u = konstan dan v = konstan akan mendapatkan sebuah jaringan yang khusus seperti tampak pada gambar 4.

Sebuah bidang pada permukaan yang dibentuk oleh beberapa gerak.



Gambar 4.

Sisi-sisinya tergantung pada pertambahan du dan variasi δv . Karena u mempunyai batas-batas yang sama (u_1, u_2) untuk semua kurva maka dapat dibuat konstanta du dan δv yang sangat kecil ke seluruh permukaan. Bila f merupakan fungsi u dan v didapat :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v\, \partial u} \qquad (2.15)$$

Mengalikannya dengan $du\ \delta v$ didapat :

$$du\, \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\, \delta v\right) = \delta v\, \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\, du\right) \qquad (2.16)$$

Dengan notasi (2.12) dan (2.13) dapat ditulis :

$$d\,\delta f = \delta\, df \qquad (2.17)$$

Secara simbolik ditulis :

$$d\,\delta = \delta\, d \qquad (2.18)$$

Saling tukar d dan δ ini merupakan aturan yang penting dalam variasi kalkulus.

Sekarang digunakan q untuk menyatakan himpunan n besaran q_ρ dan p untuk menyatakan n besaran p_ρ sehingga dapat ditulis :

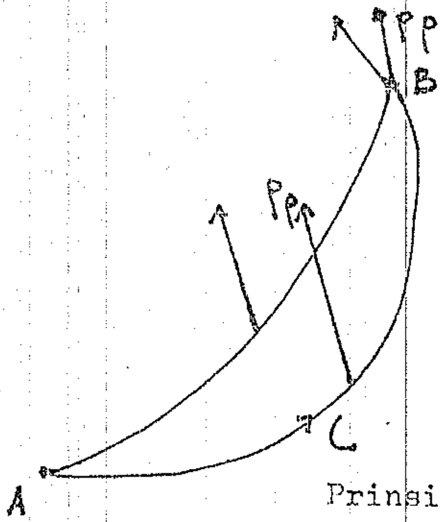
$$\sum_{\rho=1}^{n} p_\rho\, dq_\rho = p\, dq \qquad (2.19)$$

Dengan demikian (2.14) dapat ditulis :

$$\delta S = \Big[p\,\delta q - H\,\delta t \Big]_A^B + \int_A^B \delta p\, dq - \delta q\, dp - \delta H\, dt + \delta t\, dH \qquad (2.20)$$

2.4. PRINSIP HAMILTON.

Sekarang dibicarakan variasi aksi bila awal dan akhir dari kejadian A dan B dibuat tetap. Pada gambar 5 menunjukkan dua kurva dalam E_{n+1} dengan titik akhir sama dan terikat pada momenta.



Prinsip Hamilton.

Gambar 5

Momenta yang terikat ini tidak perlu sama pada akhir titik-titik untuk kedua kurvanya.

Karena $\delta q = 0$, $\delta t = 0$ pada A dan B , (2.20) memberikan :

$$\delta S = \int_A^B (\delta p\, dq - \delta q\, dp - \delta H\, dt + \delta t\, dH) \tag{2.21}$$

Sekarang :

$$\delta H(q,p,t) = \frac{\partial H}{\partial q}\delta q + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p + \frac{\partial t}{\partial t}\delta t \quad (2.22)$$

(2.22) ini dimasukkan dalam (2.21) diperoleh :

$$\delta S = \int_A^B \Big\{ \delta p \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) - \delta q \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right) + \delta t \left(dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \Big\}$$

$$= \int_A^B \Big\{ \delta p \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \delta q \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) + \delta t \left(\dot{H} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \Big\} dt \tag{2.23}$$

Gerakan ini merupakan gerakan sebarang. Bila gerakan ini merupakan gerak alami maka $S = 0$, tidak peduli variasi δq , δp , δt , sehingga S mempunyai sebuah nilai stasioner untuk gerak alami bila dibanding dengan gerakan-gerakan sebarang pada akhir ke -

jadian yang sama.

Sekarang akan dibuktikan kebalikannya yaitu bila S mempunyai nilai stasioner untuk variasi δq, δp, δt yang sebarang kecuali pada kondisi akhir maka C menyatakan sebuah gerak alami.

Untuk membuktikan ini dipilih variasi :

$$\delta q = -\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) F \, \delta v$$

$$\delta p = \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) F \, \delta v$$

$$\delta t = \left(\dot{H} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) F \, \delta v \qquad (2.24)$$

dengan $\delta v > 0$ dan F adalah setiap fungsi sepanjang C sedemikian rupa sehingga $F \geq 0$ dan $F = 0$ pada akhir, jadi memenuhi kondisi tetap.

Bila (2.24) disubstitusikan dalam (2.23) diperoleh sebuah integral non negatif kemudian sifat stasioner S yaitu $\delta s = 0$ diasumsikan maka integral sepanjang C hilang sehingga persamaan kanonik (2.1) dipenuhi. Hasilnya merupakan sebuah persamaan yang dinamakan prinsip Hamilton : integral dari aksi.

$$S = \int \sum_{\rho=1}^{n} \left(p_\rho \, dq_\rho - H \, dt \right) \qquad (2.\ 25)$$

atau

$$S = \int \left(p \, dq - H \, dt \right) \qquad (2.26)$$

mempunyai sebuah nilai stasioner untuk gerak alami bila dibanding dengan gerakan-gerakan sebarang yang mempunyai keadaan akhir sama.

Dapat diteruskan prinsip Hamilton dengan persamaan variasi

$$\delta \int \left(p \, dq - H \, dt \right) = 0 \qquad (2.27)$$

Hubungan antara Hamilton H dan Lagrange L :

$$H = \dot{q}\,p - L \tag{2.28}$$

(2.28) ini disubstitusikan pada (2.27) memberikan prinsip Hamilton :

$$\delta \int L\,dt = 0 \tag{2.29}$$

Dengan demikian ekivalen persamaan Lagrange ditulis :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{2.30}$$

Persamaan ini disebut persamaan Euler - Lagrange yang ditetapkan dengan variasi (2.29).