PENDAHULUAN

Pada mulanya sience dan teknik terpisah jelas. Sience bekerja dengan ide hipotesa dan aksioma- aksioma serta menghubungkan satu sama lainnya secara abstrak. Sedangkan teknik lebih banyak bekerja dengan fisik yang nyata dan menghubungkan gejala satu sama lainnya serta menyimpulkan untuk dipakai untuk mencapai tujuan tertentu. Dalam pengembangannya untuk menganalisa satu gejala nyata dengan yang lain diperlukan apa yang didapat dalam sience misalnya matematika,sehingga dapat dibedakan dua cara berpikir :

1. Cara fisik,dengan meneliti fenomena yang nyata.
2, Cara ideal atau cara matematis dengan keadaan keadaan nyata diabstrakkan kemudian dianalisa secara matematis dan dibuatkan bentuk umumnya sehingga menjadi model matematika yang berlaku umum. Kemudian bentuk umum ini diterapkan kembali ke keadaan nya untuk diuji kebenarannya.

Bila telah diuji kebenarannya maka didapat konsep abstrak dari suatu bentuk yang nyata sehingga terbentuklah sience teoritis.Dengan demikian bila mempelajari suatu subyek maka haruslah bisa menjawab pertanyaan-pertanyaan yang timbul dari ahli teknik yang melihat dari sudut-sudut nyata dan ahli fisika yang melihat dari sudut abstrak.Berarti harus dikuasai ide struktur logika dari subyek tersebut.Secara singkat proses ini dapat dijabarkan sebagai berikut :

1. Sebuah sistem fisik merupakan sebuah obyek keingintahuan diharapkan bisa diteliti perilakunya dalam berbagai keadaan.

Contoh : sebuah bandul bergoyang,sebuah benda jatuh dan terpantul.

2. Sebuah model ideal atau matematis.Sistem fisik ini dibentuk secara fikir setelah mengikuti perilaku sistem fisik.
3. Penalaran matematis diterapkan ke model matematik sehingga didapat rumusan-rumusan matematik dari gejala fisik tersebut.
4. Hasil-hasil matematis diinterpretasikan ke dalam arti fisik.
5. Hasil-hasilnya kalau memungkinkan dibandingkan dengan hasil-hasil penelitian fisis.

Dalam pelaksanaannya yang terkahir ini tidaklah selalu bisa dilaksanakan misalnya dalam fisika inti,astrafisika yang besarannya sangatlah kecil sehingga tidak mudah diamati atau sangatlah besar,dengan demikian perlu dibedakan antara kebenaran matematis dan kebenaran fisik. Banyak pengembangan-pengembangan yang hanya sampai langkah ke empat,yaitu sampai pada kebenaran matematis yang hasilnya berupa teori. Pengembangan ini merupakan ilmu teoritis,misalnya fisika teori,kimia teori.

Pada pengembangan langkah ke lima yaitu kebenaran fisik didapat dalam ilmu eksperimentil misal fisika eksperimentil, kimia eksperimentil.

Banyak model-model yang dapat diteliti secara eksperimental dengan hasil yang cukup baik untuk keadaan-keadaan tertentu,tetapi ternyata bila diperlakukan secara umum terdapat kesalahan-kesalahan misalnya mekanika Newton yang telah berhasil memajukan ilmu teknik sehari-hari dengan sangat mengagumkan,tetapi ketika diterapkan dalam fenomena skala kesil seperti atom,ternyata gagal,demikian juga jika diterapkan dalam fenomena skala besar,seper ti astronomi ternyta terdapat kesalahahan-kesalahan.

Di bawah ini akan diberikan sebuah usaha yang menganalisa suatu gejala fisik yang diabstrakkan secara matematis yang ternyata dapat berlaku umum dalam penerapan fisiknya.

Metode Lagrange dan Hamilton memberikan sebuah perencanaan yang sistematis untuk menuliskan persamaan-persamaan gerak dalam sistem dinamika sebarang sehingga dapat menghindarkan kesulitan-kesulitan dalam mencari perangkat untuk mendapatkan persamaan-persamaan gerak suatu sistem tertentu.

Disamping itu metode Lagrange dan Hamilton memberikan analisa mengenai apakah dinamika itu sebenarnya serta bagaimana sistem-sistem itu bergerak. Meskipun ini mempelajari dalam bentuk persamaan-persamaan diferensial sehingga berupa teori abstrak yang merupakan dunia peneliti matematika murni, tetapi metode ini berakar pada realita fisik.

Untuk mempelajari metode Hamilton maka perlu dipelajari persamaan-persamaan Lagrange dan persamaan-persamaan Hamilton yang diberikan pada bab I,disamping itu dipelajari pula klasifikasi sistem-sistem dinamika. Dalam pembahasan ini metode H amilton dibatasi pada sistem dinamika sederhana.

Pada bab II dibahas primsip Hamilton yang membicarakan persamaan-persamaan gerak alami.

Selanjutnya dalam bab III dibahas penggunaan persamaan gerak alami sampai menjadi himpunan-himpunan gerak koheren dan aksi gelombang yang akhirnya digunakan sebagai dasar mekanika kuantum.

Gerak alami selain dapat dipandang sebagai kurva dari suatu kejadian ke kejadian lain dapat pula dipandang sebagai suatu titik yang bergerak dalam ruang fase yang dibahas dalam bab IV.

Akhirnya bab V merupakan hasil kesimpulan dari penulisan ini.

BAB I

PERSAMAAN-PERSAMAAN LAGRANGE DAN HAMILTON

1.1. KLASIFIKASI SISTEM DINAMIKA

Dalam sistem dinamika terdapat enam klasifi - kasi yaitu :

Scleronomic

Rheonomic

Conservative

Nonconservative

Holonomic

Nonholonomic

Dalam sistem scleronomic konfigurasi dari sistem diberikan ketika nilai-nilai dari sebuah himpunan koordinat umum q_1 , q_2 , ... q_n didapat sistem sistem rheonomic diperlukan untuk menetapkan selang waktu t. Dengan perkataan lain sebuah sistem scleronomic adalah sistem yang hanya mempunyai kendala-kendala tetap, sedangkan sebuah sistem rheonomic mempunyai kendala-kendala bergerak.

Misalnya :

- sebuah bandul dengan titik beban tetap adalah scleronomic.
- sebuah bandul dengan titik beban dengan gerakan tertentu adalah rheonomic.

Dalam sistem conservative gaya-gaya umum dapat diturunkan dari sebuah energi potensial V , jika tidak demikian sistem ini merupakan sistem nonconservative.

Dalam sistem holonomic dapat diberikan variasi bebas sebarang pada koordinat-koordinat umum tanpa merusak kendala-kendala , sedang dalam sistem nonholonomic

Sistem scleronomic,conservative dan holonomic adalah yang paling sederhana dan biasa disebut sistem sederhana (simple systems).Teori dinamika umum paling cocok untuk sistem sederhana ini tetapi dapat juga dikembangkan untuk semua sistem, misalnya rheonomic,nonconservative dan nonholonomic. Karena tujuannya bukan untuk mempersulit keadaan umum yang berlebihan tetapi untuk memberikan apresiasi bagi metode umum dinamika maka yang akan dibicarakan hanyalah sistem dinamika sederhana.

1.2. PERSAMAAN LAGRANGE UNTUK SEBUAH PARTIKEL PADA SEBUAH BIDANG.

Sebelum membicarakan persamaan Lagrange harus diketahui terlebih dahulu tentang gaya,kecepatan dan percepatan.

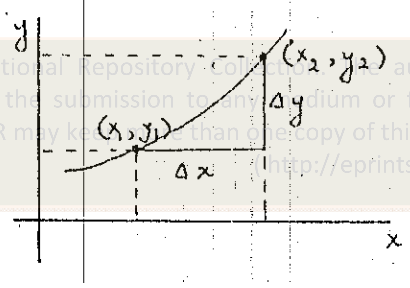
Yang dimaksud dengan gaya yaitu perubahan momentum per satuan waktu atau differensial momentum terhadap waktu $\frac{d\ mv}{dt}$.

Yang dimaksud dengan kecepatan yaitu jarak yang ditempuh per satuan waktu atau defferensial koordinat terhadap waktu.

Yang dimaksud dengan percepatan yaitu penambahan kecepatan per satuan waktu.

Untuk mendapatkan percepatan dapat diuraikan sebagai berikut :

Misalnya ada sebuah benda bergerak dengan sumbu (x,y) sevagai sumbu kartesius.



v = kecepatan

a = percepatan

$$\Delta x = (x_2 - x_1)$$
$$\Delta y = (y_2 - y_1)$$
$$\Delta t = (t_2 - t_1)$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad v = \lim_{t \to o} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= \frac{dx}{dt} \qquad = \frac{dy}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} \qquad = \frac{d}{dt} \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$= \ddot{x} \qquad = \ddot{y}$$

Sehingga partikel bermassa m yang bergerak pada sebuah bidang, O_{xy} sumbu cartesian dan X,Y komponen gaya yang bekerja pada partikel maka persamaan ge - raknya adalah :

$$m \ddot{x} = X$$
$$m \ddot{y} = Y$$

Misalnya q_1, q_2 koordinat kurvilinier maka (x,y)ada lah fungsi dari (q_1, q_2) dan dapat ditulis :

$$x = x (q_1 , q_2)$$
$$y = y (q_1 , q_2)$$

Maka didapat empat turunan parsiil yaitu :

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} \qquad \frac{\partial x}{\partial q_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} \qquad \frac{\partial y}{\partial q_2}$$

Sekarang yang akan dipelajari adalah kinematika dari partikel tersebut, jadi tidak perlu lagi menggunakan persamaan :

$$m \ddot{x} = X$$

Bila partikel bergerak sebarang maka keempat varia - bel (x , y , q_1, q_2) merupakan fungsi waktu t , sehingga turunan dari

$$x = x (q_1, q_2) \qquad (1.1)$$

$$y = y (q_1, q_2)$$

adalah

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 \qquad (1.2)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \dot{q}_2$$

dengan $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ adalah laju perubahan posisi.

$\dot{x}$ dan $\dot{y}$ merupakan fungsi empat buah besaran yaitu (q_1, q_2, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$) yang dapat pula ditulis sebagai berikut :

$$\dot{x} = f (q_1 , q_2 , \dot{q}_1 , \dot{q}_2) \qquad (1.3)$$

$$\dot{y} = f (q_1 , q_2 , \dot{q}_1 , \dot{q}_2)$$

sehingga didapat delapan turunan parsiil yaitu :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_2} \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_2} \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_2} \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_2}$$

Dan turunan parsiilnya terhadap $\dot{q}_1$ dan $\dot{q}_2$ adalah :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \qquad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial x}{\partial q_2} \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1} \qquad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial y}{\partial q_2}$$

Hasil ini disebut penghilangan titik atau penghapusan (cancellation of the dots).

Disamping itu didapat pula :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2 \qquad (1.6)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_2} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2}\dot{q}_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2}\dot{q}_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial q_2 \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial q_2^2}\dot{q}_2$$

$\frac{\partial x}{\partial q_1}$ dan $\frac{\partial x}{\partial q_2}$ masing-masing merupakan fungsi q_1 dan q_2 dan ini juga merupakan fungsi . . t , oleh sebab itu :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_1}\dot{q}_2 \qquad (1.7)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_2} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2}\dot{q}_2$$

Membandingkan ini dengan persamaan (1.6) di atas tampak hasil yang sama didapat dari persamaan

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2$$

yaitu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_2} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_2} \qquad (1.8)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q1} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_2} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_2}$$

Hasil ini disebut "saling tukar antara d dan ∂ ". Cara ini dan penghilangan titik dipakai terus dalam metode Lagrange.

Dengan tetap menganggap partikel mempunyai gerak sebarang dapat dituliskan energi kinetiknya sebagai berikut :

$$T = \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Dengan mensubstitusikan $\dot{x}$ dan $\dot{y}$ didapat :

$$T = \tfrac{1}{2} m \left[\left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 \dot{q}_1^{\,2} + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 \dot{q}_2^2 \right\} + \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 \dot{q}_1^2 + 2 \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right) + \left(\frac{\quad y}{q_2}\right)^2 \dot{q}_2^2 \right\} \right]$$

Dapat dilihat T merupakan fungsi q_1 , q_2 , $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ yang dapat ditulis :

$$T = T (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$$

Sebenarnya fungsi ini merupakan fungsi kwadrat dari $\dot{q}_1$ dan $\dot{q}_2$ sehingga

$$T = \tfrac{1}{2} m (a \dot{q}_1^2 + 2h \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b \dot{q}_2^2)$$

dengan a , h , b fungsi q_1 , q_2

Dari $T = \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ dapat dicari

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = m \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + m \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} \qquad (1.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = m \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} + m \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2}$$

Dengan menghilangkan titik didapat

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + m \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} \qquad (1.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} + m \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2}$$

Dengan menggunakan defferensiasi persamaan ini ter - hadap t dan mengganti d dan ∂ didapat

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m\,\ddot{x}\,\frac{\partial x}{\partial q_1} + m\,\ddot{y}\,\frac{\partial y}{\partial q_1} + m\,\dot{x}\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + m\,\dot{y}\,\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} \qquad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m\,\ddot{x}\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_2} + m\,\ddot{y}\,\frac{\partial y}{\partial q_2} + m\,\dot{x}\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_2} + m\,\dot{y}\,\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_2}$$

Persamaan ini dikurangi dengan persamaan (1.9) didapat :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = m\,\ddot{x}\,\frac{\partial x}{\partial q_1} + m\,\ddot{y}\,\frac{\partial y}{\partial q_1} \qquad (1.12)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = m\,\ddot{x}\,\frac{\partial x}{\partial q_2} + m\,\ddot{y}\,\frac{\partial y}{\partial q_2}$$

Setiap perpindahan sebarang partikel sebanding dengan pertambahan q_1 , q_2 dalam koordinat q_1, q_2. Hubungan pertambahan dalam x dan y adalah

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\,\delta q_2 \qquad (1.13)$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\,\delta q_2$$

Sedangkan usaha yang dilakukan oleh gaya-gaya dalam perpindahan ini adalah

$$\delta W = X\,\delta x + Y\,\delta y \qquad (1.14)$$

maka didapat

$$\delta W = X\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\,\delta q_2\right) + Y\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\,\delta q_2\right)$$

$$\delta W = \left(X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) \delta q_1 +$$

$$\left(X \frac{\partial x}{\partial q_2} + Y \frac{\partial y}{\partial q_2} \right) \delta q_2$$

atau

$$\delta W = Q_1 \, \delta q_1 + Q_2 \, \delta q_2 \qquad (1.15)$$

dengan

$$Q_1 = X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} \qquad (1.16)$$

$$Q_2 = X \frac{\partial x}{\partial q_2} + Y \frac{\partial y}{\partial q_2}$$

Kemudian dibawa ke persamaan gerak

$$X = m \ddot{x}$$

$$Y = m \ddot{y}$$

maka didapat

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} \qquad (1.17)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = X \frac{\partial x}{\partial q_2} + Y \frac{\partial y}{\partial q_2}$$

sehingga

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \qquad (1.18)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2$$

ini merupakan persamaan gerak sebuah partikel pada sebuah bidang, dengan :

q_1 , q_2 : koordinat kurvilinier sebarang.

T : energi kinetik (dinyatakan sebagai fungsi dari ($q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$)

Persamaan ini disebut "Persamaan-persamaan gerak La-

Bila sistemnya conservative dengan energi potensial V maka :

$$\delta W = - \delta V \qquad (1.19)$$

$$Q_1 = - \frac{\partial V}{\partial q_1}$$

$$Q_2 = - \frac{\partial V}{\partial q_2}$$

V merupakan fungsi dari q_1 , q_2 .

Untuk menulis persamaan gerak Lagrange secara sempurna maka akan sampai pada definisi fungsi Lagrange yaitu :

$$L = T - V$$

Selanjutnya L merupakan simbol dari Lagrange yang kadang-kadang disebut sebagai energi kinetis. Perlu diketahui bahwa L adalah sebuah fungsi yang dapat ditulis sebagai :

$$L = L (q_1 , q_2 , \dot{q}_1 , \dot{q}_2)$$

dan turunan parsiilnya adalah :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{a1}} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \qquad (1.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} \qquad \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial q_2} - \frac{\partial V}{\partial q_2}$$

sehingga persamaan Lagrange-nya dapat ditulis :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1}\right) = - \frac{\partial V}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} = - \frac{\partial V}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \left(\frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{\partial V}{\partial q_2} = -\frac{\partial V}{\partial q_2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \quad \text{..........} \quad (b)$$

(a) dan (b) :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \qquad (1.21)$$

Persamaan-persamaan Lagrange .

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$$

Dengan demikian telah didapat gambaran sederhana tentang sebuah partikel yang bergerak pada sebuah bidang yang dihasilkan oleh pemikiran secara sistematis dari metode umum dinamika.

Untuk mendapatkan persamaan gerak setiap koordinat kurvilinier hanya perlu diingat satu fungsi $L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ kemudian mengoperasikannya secara biasa.

1.3. PERSAMAAN HAMILTON

Pada bagian ini akan dibicarakan sebuah sistem yang mengikuti persamaan Lagrange dalam bentuk :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial L}{\partial q_\rho} = 0 \qquad (1.22)$$

L adalah fungsi Lagrange dari n besaran q , turunan dari q terhadap t dan t itu sen -

diri, ditulis :

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

Spesifikasi ini termasuk sistem dinamika sederhana tertentu.

Di sini terdapat dua ketentuan yaitu :

1. L tidak merupakan bentuk kwadrat dalam kecepatan -kecepatan umum (seperti biasanya dalam sistem dinamika sederhana).
2. t diikutkan sebagai argumen tambahan dalam L.

1.4. PERSAMAAN HAMILTON DAN PERSAMAAN GERAK DALAM BENTUK KANONIK.

Nyatakan :
$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \qquad (1.23)$$

dengan n besaran p adalah momenta umum.

Dalam persamaan ini p dinyatakan sebagai fungsi q , $\dot{q}$, dan t. Persamaan sebanyak n ini akan diselesaikan untuk mendapatkan $\dot{q}_\rho$ dan $\dot{q}_\rho$ dinyatakan dalam q , p , t. Maka L sendiri dapat dinyatakan sebagai fungsi dari q , p dan t. Untuk menyatakan L dalam q , p ,t besaran H didefinisikan sebagai :

$$H = \sum_{\rho=1}^{n} \dot{q}_\rho \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} - L \qquad (1.24)$$

akan digunakan untuk menyatakan L dalam q , p , t. Besaran H ini disebut fungsi Hamilton, yang ditulis sebagai :

$$H = H(q, p, t)$$

dalam sistem dinamika sederhana dapat ditulis :

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q) \qquad (1.25)$$

T homogen dan kwadratik dari kecepatan umum, sehingga dengan teorema Euler untuk fungsi homogen didapat

$$\sum_{\rho=1}^{n} \dot{q}_\rho \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} = 2T \qquad (1.26)$$

sehingga :

$$\begin{aligned} H &= 2T - (T - V) \\ &= T + V \end{aligned} \qquad (1.27)$$

Ini adalah cara yang tercepat untuk menghitung H yang tentunya harus digunakan

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho}$$

untuk menyatakannya dalam bentuk H (q,p).

Sekarang dihubungkan turunan parsiil L $(q,\dot{q},t)$ dengan turunan parsiil H (q , p , t).

$p = \frac{\partial L}{\partial q_\rho}$ merupakan hubungan antara L dan H yang dikenal sebagai himpunan n buah persamaan yang menghubungkan besaran-besaran sebanyak $3n + 1$, yaitu q_ρ , $\dot{q}_\rho$, p_ρ dan t.

$\dot{q}$ dianggap sebagai turunan dari $\frac{dq}{dt}$ sehingga

$$H = \sum_{\rho=1}^{n} \dot{q}_\rho \frac{\partial L}{\partial q_\rho} - L \quad \text{dapat ditulis}$$

$$H = \sum_{\rho=1}^{n} \dot{q}_\rho p_\rho - L \qquad (1.28)$$

Kemudian diberi variasi besaran q_ρ , $\dot{q}_\rho$, p_ρ , t di dapat :

$$\delta H = \sum_{\rho=1}^{n} p_\rho \delta \dot{q}_\rho + \sum_{\rho=1}^{n} \dot{q}_\rho \delta p_\rho - \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \delta \dot{q}_\rho - \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q_\rho - \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \qquad (1.29)$$

suku I dan III pada sisi kanan saling meniadakan (1.18).

Deferensial-deferensial sisa δq_ρ, δp_ρ, δt, sejumlah $2n + 1$ bebas dan sebarang.

Variasi $\delta \dot{q}_\rho$ tidak timbul lagi karena saling meniadakan sehingga pertambahan besaran q_ρ, $\dot{q}_\rho$, p_ρ dan t memenuhi $p_\rho = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho}$

Oleh sebab itu :

$$\frac{\partial H}{\partial q_\rho} = -\frac{\partial L}{\partial q_\rho}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \dot{q}_\rho \qquad (1.30)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Akibat dari persamaan ini :

1. Bila t tidak terdapat secara eksplisit dalam L maka tidak terdapat juga dalam H.
2. Dari n buah persamaan Lagrange didapat $2n$ buah persamaan gerak yaitu :

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} \qquad (1.31)$$

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho}$$

Dan ini merupakan persamaan-persamaan gerak Hamilton yang dikenal secara umum sebagai persamaan-persamaan bentuk kanonik (sederhana).

Penyelesaian persamaan-persamaan Hamilton didapat bila koordinat umumnya (q_ρ) dan momenta umumnya (p_ρ) untuk $t = 0$ telah ditetapkan.

Persamaan ini dapat juga ditulis dalam bentuk :

$$\frac{dq_\rho}{\partial H/\partial p_\rho} = \frac{dp_\rho}{-\partial H/\partial q_\rho} = dt \qquad (1.32)$$

1.5. PENGABAIAN KOORDINAT

Misalkan salah satu koordinat (q_1) diabaikan terhadap H sehingga :

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \tag{1.33}$$

maka $\dot{p}_1 = 0$ dan p adalah sebuah konstanta dari gerak , misalnya $p_1 = a_1$. Dengan menggantikan p_1 dengan a_1 dan mengurangi persamaan-persamaan sebanyak 2n yaitu dua persamaan dengan $\rho = 1$ didapat sebuah himpunan persamaan kanonik untuk 2(n-1) besaran :

$$q_2 , q_3 , \ldots , q_n , p_2 , p_3 , \ldots , p_n$$

Dalam keadaan seperti ini jumlah tingkat kebebasan berkurang tanpa kehilangan bentuk kanonik dari persamaan geraknya. Koordinat yang terabaikan q_1 , didapat dari persamaan $q_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}$

Bila terdapat m koordinat terabaikan , maka jumlah tingkat kebebasan berkurang sebanyak m. Sehingga terlihat bahwa $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$ ekivalen dengan $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$

1.6. SISTEM CONSERVATIVE

Telah didefinisikan bahwa sebuah sistem conservative adalah sebuah sistem yang mempunyai energi potensial V, dan sistem dinamika lebih umum dinyatakan oleh fungsi tunggal

L (q , $\dot{q}$, t) atau fungsi tunggal H (q , p , t). Fungsi V tidak timbul lagi (meskipun boleh menggunakannya dalam bentuk Lagrange atau Hamilton) dan yang dibutuhkan definisi sistem conservative. Dengan menggunakan persamaan :

$$\frac{\partial H}{\partial q_\rho} = - \frac{\partial L}{\partial q_\rho}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}_\rho$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

maka persamaan-persamaan :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad (1.34)$$

ekivalen , sehingga dapat dikatakan sebuah sistem adalah conservative bila syarat di atas dipenuhi atau dengan kata lain bila L atau H tidak tergantung secara eksplisit pada t.

Dengan menggunakan persamaan kanonik

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}$$

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho}$$

didapat :

$$\dot{H} = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_\rho}\dot{q}_\rho + \sum_{=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_\rho}\dot{p}_\rho + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (1.35)$$

(1.35) akan hilang bila $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ dipenuhi, karena sebuah sistem conservative, Hamilton H adalah sebuah gerakan konstan yang nilainya ditentukan oleh kondisi awal.

Ini sesuai dengan penerapan tertentu pada sebuah sistem sederhana tetapi sekarang ditunjukkan dalam bentuk yang lebih umum . Meskipun sistem dinamik yang diberikan merupakan konsep energi kinetik atau sedikitnya hanya menjadi latar belakang, tapi akan terlihat bahwa gerak bukan energi merupakan konsep dasar dalam dinamika umum.