B A B III

PERMUKAAN DENGAN KELENGKUNGAN TOTAL KONSTAN

III.1. PERMUKAAN REVOLUSI.

Sebuah permukaan revolusi adalah permukaan yang terbentuk oleh sebuah kurva pada suatu bidang yang bidangnya diputar dengan sumbu putarnya sebuah garis yang terletak pada bidang tersebut.

Posisi-posisi kurva tersebut merupakan meridian permukaan, sedangkan lingkaran yang terbentuk oleh perputaran titik pada kurva mengelilingi sumbu disebut paralel.

Diambil sumbu z sebagai sumbu putar dan sumbu x dan y adalah sumbu yang saling tegak lurus dengan sumbu z. Untuk setiap posisi bidang persamaan kurva dapat ditulis sebagai $z = f(r)$ dengan r menyatakan jarak sebuah titik pada kurva ke sumbu z.

Misal v menyatakan sudut antara bidang dalam berbagai posisi dengan bidang xz.

Sehingga persamaan permukaan dapat ditulis :

$$x = r \cos v \quad , \quad y = r \sin v \quad , \quad z = f(r).$$

Misal :

$$X = (x,y,z)$$

$$= [r \cos v , r \sin v, f(r)]$$

$$X_r = [\cos v , \sin v , f'(r)]$$

$$X_v = (-r \sin v , r \cos v , 0)$$

$$E = X_r . X_r = \cos^2 v + \sin^2 v + f'^2(r) = 1 + f'^2(r)$$

$$F = X_r . X_v = -r \cos v \sin v + r \sin v \cos v = 0$$

$$G = X_v . X_v = r^2 \sin v + r^2 \cos^2 v = r^2$$

Tampak disisi kurva-kurva parameternya orthogonal karena $F = 0$.

Jadi elemen liniernya :

$$ds^2 = (1 + f'^2(r))dr^2 + r^2 \, dv$$

Dengan mendefinisikan : $U = \int \sqrt{1 + f'^2(r)} \, dr$

sehingga :

$$du = \sqrt{1 + f'^2(r)} \, dr \quad \ldots\ldots\ldots (3.1)$$

Maka elemen linier menjadi bentuk geodesik

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2 \quad ; \text{ dengan } G = r^2 .$$

$$ds^2 = du^2 + G \, dv^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.2.)$$

Dengan demikian, menurut (2.16) harga keleng - kungan totalnya :

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

III.2. PERMUKAAN REVOLUSI SPHERIC.

Permukaan berkelengkungan konstan adalah permukaan yang kelengkungan totalnya sama pada semua titik pada permukaan.
Bila nilai konstan ini sama dengan nol maka permukaanya dapat dihamparkan, sedangkan bila nilai konstan tidak sama dengan nol dan positip maka perkaannya disebut permukaan spheric, bila nilai konstannya negatip disebut permukaan pseudospheric.
Sekarang diambil harga $K > 0$ yaitu $K = \frac{1}{a^2}$ dimana a adalah konstanta.
Jika harga K disubstitusikan kedalam (2.16)
maka :

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

$$K\sqrt{G} = -\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + K\sqrt{G} = 0$$

$$(D^2 + K)\sqrt{G} = 0$$

Penyelesaian khusus :

$$\lambda^2 + K = 0$$

$$\lambda^2 = -K$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-K}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{-K} = i\sqrt{K} = i.\frac{1}{a}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{-K} = -i\sqrt{K}$$

$$= -i\frac{1}{a}$$

Jadi : $\sqrt{G} = c_1 \cos \lambda_1 u + c_2 \sin \lambda_2 u$

$$= c_1 \cos(\frac{u}{a} + b) + c_2 \sin(\frac{u}{a} + b) \quad ..(3.3)$$

Jika $C_1 = 0$ maka $\sqrt{G} = c_2 \sin(\frac{u}{a} + b)$

$C_2 = 0$ maka $\sqrt{G} = c_1 \cos(\frac{u}{a} + b)$

dimana :

c_1, c_2, b kontanta.

Jika diambil $\sqrt{G} = c \cos \left(\frac{u}{a} + b\right)$ dan misalkan

b = 0 maka :

$$\sqrt{G} = c \cos \frac{u}{a}$$

$$G = c^2 \cos^2 \frac{u}{a}$$

Maka elemen garis menjadi :

$$ds^2 = du^2 + c^2 \cos^2 \frac{u}{a}\, dv^2 \quad \ldots\ldots (3.4.)$$

Dengan melihat (3.2), maka dapat diketahui persamaan kurva meridian :

$$r = \sqrt{G} = \sqrt{c^2 \cos^2 \frac{u}{a}} = c \cos \frac{u}{a}$$

Dari : $z = f(r)$

$$\frac{dz}{dr} = f'(r)$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{dz}{du} \quad \frac{du}{dr}$$

Dengan persamaan (3.1.)

$$du = \sqrt{1 + f'^2(r)}\, dr$$

$$\frac{du}{dr} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}$$

$$\left(\frac{du}{dr}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dz}{du} \quad \frac{du}{dr}\right)^2$$

$$= 1 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 \left(\frac{du}{dr}\right)^2$$

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \left\{\left(\frac{du}{dr}\right)^2 - 1\right\}\left(\frac{dr}{du}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{dr}{du}\right)^2$$

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{du}\right)^2}$$

$$z = \int\sqrt{1 - \left(\frac{dr}{du}\right)^2}\, du \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (3.5.)$$

Untuk $r = c \cos \frac{u}{a}$

$$\frac{dr}{du} = - c.\frac{1}{a} \sin \frac{u}{a}$$

$$z = \int\sqrt{1 - \left(- \frac{c}{a} \sin \frac{u}{a}\right)^2}\, du$$

$$= \int\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \frac{u}{a}}\, du \quad . \; . \; . \; . \; . (3.6.)$$

Dengan harga c yang berbeda-beda akan menghasilkan permukaan yang bermacam-macam .

Untuk ini ada 3 (tiga) harga c yaitu :

1. $c = a$
2. $c > a$
3. $c < a$

ad. 1. Untuk $c = a$

Maka $r = a \cos \frac{u}{a}$

$$z = \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \frac{u}{a}} \, du^2$$

$$= \int \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2} \sin^2 \frac{u}{a}} \, du^2$$

$$= \int \cos \frac{u}{a} \, du = a \sin \frac{u}{a} + c$$

Maka terbentuk persamaan bola.

Ad.2. Untuk $c > a$

Dari persamaan $z = \int \sqrt{1 - \frac{c}{a^2} \sin^2 \frac{u}{a}} \, du$

tampak bahwa harga z bervariasi tergantung pada harga $\sin^2 \frac{u}{a}$, dimana variasinya berjalan dari 0 sampai 1.

Oleh karena itu permukaan yang terbentuk dibatasi oleh parallel-parallel minimum yang jari-jarinya sama dengan nilai minimum dari $\cos \frac{u}{a}$.

Pararel terbesar tercapai bila $\cos \frac{u}{a}$ maximum, sehingga $r = c$.

Ad.3. Untuk $c < a$.

Harga $r = C \cos \frac{u}{a}$ bervarisasi dari o sampai dengan c.

Nilai $\cos \frac{u}{a}$ tergantung pada $u = \frac{\pi}{2}$ ma dimana m adalah bilangan bulat ganjil.

Titik-titik ini disumbu meridian akan bertemu dengan z, sehingga permukaan yang terbentuk merupakan gelendong (series of spindles)

Untuk kasus c > a dan c < a telah dapat diketahui bahwa kedua permukaan dapat **diterapkan** pada bola dengan meridian dan pararel yang saling berhubu - ngan .

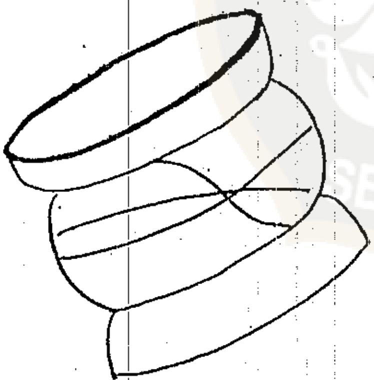
Sehingga dapat kita tuliskan elemen linier bola da lam bentuk :

$$ds^2 = d\bar{u}^2 + a^2 \cos^2 \frac{\bar{u}}{a} \; d\bar{v}^2$$

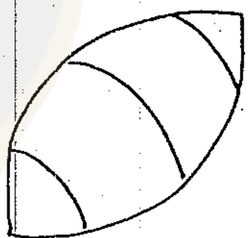
dengan :

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= u \\ \bar{v} &= \frac{c}{a} v \end{aligned}\right\} \text{yang menghubungkan ke persamaan (3.4)}$$

Gambar :



c > a
(1.1)



c < a
(1.2)

Untuk nilai $b \neq 0$ akan didapat hasil yang serupa.

Misal : $b = \frac{\pi}{2}$ ·

$b = - \frac{\pi}{4}$

Untuk $b = - \frac{\pi}{2}$.

$$ds^2 = du^2 + c^2 \cos^2 (\frac{u}{a} - \frac{\pi}{2}) \, dv^2.$$

$$ds^2 = du^2 + c^2 \left(\cos \frac{u}{a} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{u}{a} \sin \frac{\pi}{2} \right)^2 dv^2$$

$$= du^2 + c^2 \left(o + \sin \frac{u}{a} \right)^2 dv^2$$

$$= du^2 + c^2 \sin^2 \frac{u}{a} dv^2 \,.$$

Untuk $b = -\frac{\pi}{4}$

$$ds^2 = du^2 + c^2 \cos^2 \left(\frac{u}{a} - \frac{\pi}{4} \right) dv^2$$

Sehingga akan diperoleh bentuk-bentuk :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & b = o \,, \; ds^2 = du^2 + c^2 \cos^2 \frac{u}{a} dv^2 \\ \text{(ii)} & b = -\frac{\pi}{2}, \; ds^2 = du^2 + c^2 \sin^2 \frac{u}{a} dv^2 \\ \text{(iii)} & b = -\frac{\pi}{4} \,, \; ds^2 = du^2 + c^2 \cos\left(\frac{u}{a} - \frac{\pi}{4}\right)^2 dv^2 \end{array}\right\} \cdots (3.7)$$

Sekarang pandang S sebuah permukaan dengan elemen linier $ds^2 = du^2 + c^2 \cos^2 \frac{u}{a} dv^2$, yang ter - letak antara paralel u_0 = konstan dan u_1 = konstan. Suatu titik pada daerah tersebut ditentukan oleh harga u dan v, sedemikian sehingga :

$$u_0 \leqslant u \leqslant u_1 \quad , \qquad 2\frac{\pi}{a} \geqslant v \geqslant 0$$

Harga parameter tersebut pada bola adalah :

$$u_0 \geqslant u$$

$$\frac{2\pi c}{a} \geqslant \bar{v} \geqslant 0$$

Oleh sebab itu jika $c < a$ daerah yang ditentukan pa- S tidak menutupi daerah pada bola, antara paralel u_0 dan u_1

Tetapi jika $c > a$ tidak hanya menutupi bahkan ada perluasan (overlaping.) .

III.3. PERMUKAAN REVOLUSI PSEUDOSPHERIC.

Jika kelengkungan total suatu permukaan negatip maka akan terjadi permukaan pseudospheric. Sehingga untuk permukaan ini $K = -1/a^2$.
Jika harga ini disubstitusikan kedalam (2.16) maka :

$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + k\sqrt{G} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} - P\sqrt{G} = 0 \quad \text{dengan } P = -K$$

$$(D^2 - P)\sqrt{G} = 0$$

Penyelesaian :

$$m^2 - p = 0$$

$$m^2 = p$$

$$m1,2 = \pm\sqrt{p} = \pm\sqrt{(+1/a^2)}$$

$$m_1 = +\frac{1}{a} \quad , \quad m_2 = -\frac{1}{a}$$

Jadi :

$$\sqrt{G} = c_1 \cosh m_1 a + c_2 \sinh m_2 a$$

$$= c_1 \cosh \frac{u}{a} + c_2 \sinh \frac{u}{a}$$

dimana : c_1, c_2 konstanta integrasi

Jika konstanta ini berharga nol atau sama maka akan timbul bentuk-bentuk khusus sebagai berikut :

$c_1 = 0$

$\sqrt{G} = c_2 \sinh \frac{u}{a}$

$ds^2 = du^2 + c^2 \sinh^2 \frac{u}{a}\, dv^2$

$c_2 = 0$

$\sqrt{G} = c_1 \cosh \frac{u}{a}$

$ds^2 = du^2 + c^2 \cosh^2 \frac{u}{a}\, dv^2$

$c_1 = c_2$

$$\sqrt{G} = c \left\{ \cosh \frac{u}{a} + \sinh \frac{u}{a} \right\}$$

$$= c \left\{ \frac{e^{u/a} + e^{-u/a}}{2} + \frac{e^{u/a} - e^{-u/a}}{2} \right\}$$

$$= c \left\{ \frac{e^{u/a}}{2} + \frac{e^{u/a}}{2} \right\}$$

$$= c\, e^{u/a}$$

$$ds^2 = du^2 + c^2 e^{2u/a}\, dv^2$$

Jadi bentuk-bentuk yang timbul :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i.} & ds^2 = du^2 + c^2 \cosh^2 u/a\; dv^2 \\ \text{ii.} & ds^2 = du^2 + c^2 \sinh^2 u/a\; dv^2 \\ \text{iii.} & ds^2 = du^2 + c^2 e^{2u/a}\; dv^2 \end{array}\right\} \ldots (3.8)$$

sehingga kurva meridiannya dapat ditulis :

$$\sqrt{G} = r = c \cosh u/a$$

dari (3.5.)

$$z = \int \sqrt{1 - \frac{dr}{du}^{2}}\ du$$

$$= \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sinh^2 \frac{u}{a}}\ du \quad (i)$$

$\sqrt{G} = r = c \sinh u/a$

$$z = \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \cosh^2 \frac{u}{a}}\ du \quad (ii) \quad \ldots.(3.9)$$

$\sqrt{G} = r = c\ e^{u/a}$

$$z = \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} c^2\ e^{2u/a}}\ du \quad (iii)$$

Ketiga masalah tersebut akan dibahas lebih lanjut:

1. Untuk $r = c \cosh \frac{u}{a}$

$$z = \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sinh^2 \frac{u}{a}}\ du$$

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sinh^2 \frac{u}{a}}$$

ekstrem $\frac{dz}{du} = 0$

$$\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sinh^2 \frac{u}{a}} = 0$$

$$1 - \frac{c^2}{a^2} \sinh^2 \frac{u}{a} = 0$$

$$\sinh^2 \frac{u}{a} = \frac{a^2}{c^2}$$

Jadi harga ekstrim maximum $\sinh^2 \frac{u}{a}$ adalah $\frac{a^2}{c^2}$, harga minimumnya adalah 0

Sedangkan maximum dan minimum dari r adalah

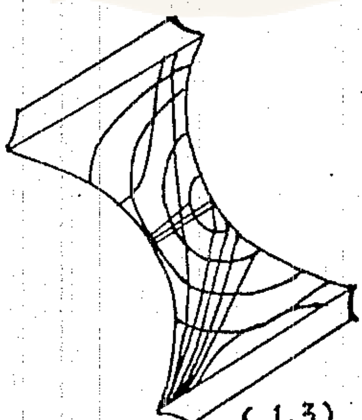
$\sqrt{a^2 + c^2}$ dan c .

Pada titik-titik sebuah paralel maximum, garis singgung ke meridian tegak lurus sumbu normal sehingga akan membentuk tepi caspidal (caspidal edge), sedangkan pada titik-titik suatu paralel minimum garis singgung tersebut akan sejajar sumbu dan membentuk lingkar gorge (circle of gorge) dengan demikian permukaan yang terbentuk menyerupai kelos (spool like section).

Dimana akan tampak kurva-kurva tertutup akan merupakan lingkar geodesik sedangkan yang lain merupakan geodesik.

Permukaan pseudospheric ini disebut bentuk permukaan jenis hiperbolik.

Seperti pada gambar dibawah ini :



(1.3)

2. Untuk $r = c \sinh \frac{u}{a}$

$$z = \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \cosh^2 \frac{u}{a}}\, du$$

Untuk kasus ini supaya permukaannya nyata c^2 tidak dapat lebih besar dari a^2.

Jika diambil $c = a \sin\alpha$

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\cosh^2\frac{u}{a}}$$

ekstrem $\dfrac{dz}{du} = 0$

$$\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\cosh^2\frac{u}{a}} = 0$$

$$\cosh^2\frac{u}{a} = \frac{a^2}{c^2}$$

untuk $c = a \sin\alpha$

$$\cosh^2\frac{u}{a} = \frac{a^2}{a^2\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

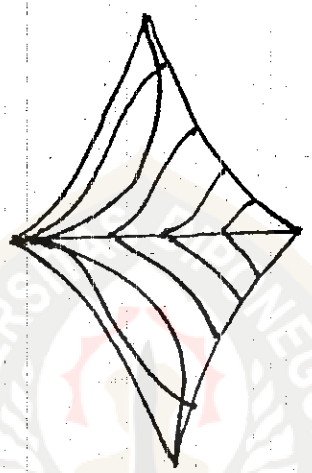
Jadi nilai maximum $\cosh^2\frac{u}{a}$ adalah $\operatorname{cosec}^2\alpha$ dan nilai minimumnya adalah satu, sedangkan maximum dan minimum r adalah $a\cos\alpha$ dan 0

Pada titik-titik dimana paralel maximum, garis singgung pada meridian tegak lurus sumbu dan pada titik titik dimana paralel minimum yaitu berupa titik sehingga r = 0, garis-garis singgung ini berpotongan pada titik tersebut dengan membentuk sudut α.

Sehingga permukaan yang dibentuk dari rangkaian tersebut akan menyerupai kerucut waktu.

Kurva-kurva tersebut akan merupakan paralel geodesic sedangkan salah satunya merupakan asimtot.

Permukaan seperti ini disebut permukaan pseudosphe sic jenis ellips.
Seperti tampak pada gambar yang menunjukkan setengah bagian tersebut.



(1.4)

3. Untuk $r = c\, e^{u/a}$

$$z = \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} e^{2u/a}}\, du$$

Dalam hal ini persamaan kurva meridiannya dinyatakan dengan cara fungsi trigonometri.
Jika diambil :

$$\sin \phi = \frac{c}{a} e^{u/a}$$

$$r = a \sin \phi$$

$$\frac{dr}{d\phi} = a \cos \phi$$

$$r = c\, e^{u/a}$$

$$\frac{dr}{du} = \frac{c}{a} e^{u/a} = \sin \phi$$

$$\frac{dz}{d\phi} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{d\phi} = \left[\frac{dz}{du}\frac{du}{dr}\right]\frac{dr}{d\phi}$$

$$= \left[\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} e^{\frac{2u}{a}}} \cdot \frac{1}{\sin\phi}\right] a \cos\phi$$

$$= \left[\sqrt{1 - \sin^2\phi} \;\; \frac{1}{\sin\phi}\right] a \cos\phi$$

$$= \frac{a \cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$z = \int \frac{a \cos^2\phi}{\sin\phi}\, d\phi$$

$$= a \int \frac{1 - \sin^2\phi}{\sin\phi}\, d\phi$$

$$= a \int (\operatorname{cosec}\phi - \sin\phi)\, d\phi$$

$$= a \left[\int \operatorname{cosec}\phi\, d\phi + \cos\phi\right]$$

$$= a \left[\log \left| \operatorname{cosec}\phi - \operatorname{cotg}\phi \right| + \cos\phi\right]$$

$$= a \left[\log \left| \frac{1 - \cos\phi}{\sin\phi} \right| + \cos\phi \right]$$

$$= a \left[\log \left| \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \phi/2)}{2 \sin\phi/2 \cos\phi/2} \right| + \cos\phi \right]$$

$$= a \left[\log \frac{\sin\phi/2}{\cos\phi/2} + \cos\phi \right]$$

$$= a \left[\log \tan \phi/2 + \cos \phi \right]$$

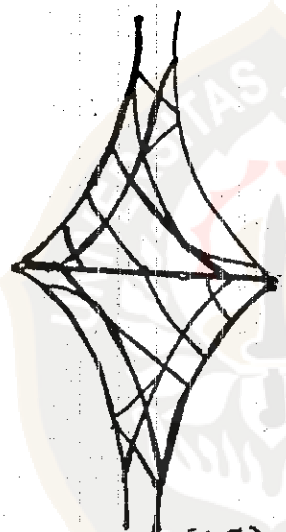
ϕ adalah sudut yang dibentuk oleh garis singgung pada sebuah meridian dengan sumbu, sedangkan sumbunya merupakan asymtot dari kurva kurva .

Oleh karena itu kurva meridiannya merupakan sebuah tractrix . Permukaan putar sebuah tractrix sekitar asymtotnya disebut bola semu atau pseudospheric jenis parabolik.

Seperti tampak pada gambar dimana permukaannya menunjukan

famili geodesik paralel dan sebuah garis asymtot .
Jika bentuk $\sqrt{G} = c_1 \cos \frac{u}{a} + c_2 \sin \frac{u}{a}$, maka tampak bahwa bentuk bentuk persamaan (3.7) dan (3.8) akan serupa. Hanya bedanya nilai c pada persamaan (3.8) menentukan jenis permukaan putar pseudospheric (hiperbolik, elliptik, parabolik) sedangkan pada persamaan (3.7) menunjukkan bentuk bentuk dari permukaan putar spheric.

Gambar :



(1.5)

III.4. SISTIM PARAMETER GEODESIK

Dalam sistim parameter geodesik akan ditunjukkan, apabila sistim geodesik dipilih untuk setiap permukaan berkelengkungan konstan dan tidak harus dari permukaan - putar maka elemen liniernya akan mengarah ke bentuk bentuk persamaan (3.7) dan (3.8), jadi akan terjadi kasus kasus yang serupa dengan keduanya.

Telah diketahui jika suatu permukaan dengan kurva- v = konstan adalah bersifat geodesik, sedangkan u = konstan merupakan trayektori orthogonalnya maka bentuk elemen garisnya adalah :

$$ds^2 = du^2 + G\ dv^2$$

dengan G merupakan fungsi baik u maupun v. Dan dalam hal tertentu dimana kelengkungannya adalah konstan maka harga kelengkungan totalnya :

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\ \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

Untuk permukaan spheric dengan $K = 1/a^2$,jika disubstitusikan ke persamaan diatas menurut (3.3) maka:

$$\sqrt{G} = \phi(v)\ \cos\frac{u}{a} + \Psi(v)\ \sin\frac{u}{a} \qquad \ldots\ldots.(3.10)$$

Dan permukaan pseudospheric dengan $K = -1/a^2$,akan menjadi

$$\sqrt{G} = \phi(v)\ \cosh\frac{u}{a} + \Psi(v)\ \sinh\frac{u}{a} \qquad \ldots\ldots.(3.11)$$

Akan dibahas kasus kasus seperti pada (3.7) dan (3.8) yang terjadi pada sistim parameter geodesik.

Kasus I :

Dari bentuk persamaan (3.10) dan (3.11) dan dengan menerapkan syarat bahwa untuk kurva u = 0 pada suatu permukaan dengan elemen linier : $ds^2 = du^2 + G\ dv^2$, jika memenuhi :

$$(\sqrt{G})_{u=0} = c$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\ \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = 0$$

maka akan diarahkan pada bentuk (i) dari persamaan (3.7) dan (3.8)

Bukti : dari (3.10) ,

$$\sqrt{G} = \phi(v)\ \cos\frac{u}{a} + \Psi(v)\ \sin\frac{u}{a}$$

Syarat $(\sqrt{G})_{u=0} = c$

$$c = \phi(v)\ \cos(0) + \Psi(v)\ \sin(0)$$

$$c = \phi(v)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)_{u=0} = 0$$

$$\frac{1}{\phi(v)\cos \frac{u}{a} + \psi(v)\sin \frac{u}{a}} \left\{ \frac{-\phi(v)}{a} \sin \frac{u}{a} + \frac{\psi(v)}{a} \cos \frac{u}{a} \right\} = 0$$

$$\frac{1}{\phi(v)\cos 0 + \psi(v)\sin 0} \left\{ \frac{-\phi(v)}{a} \sin 0 + \frac{\psi(v)}{a} \cos 0 \right\} = 0$$

$$\frac{1}{\phi(v)} \left\{ \frac{\psi(v)}{a} \right\} = 0$$

Jadi $\psi(v) = 0$

Dari $\phi(v) = c$

$\psi(v) = 0$

Maka (3.10) menjadi : $\sqrt{G} = c \cos \frac{u}{a}$

$$ds^2 = du^2 + c^2 \cos^2 \frac{u}{a} \, dv^2$$

Ini adalah bentuk (i) dari (3.7)

analog untuk (3.11) sehingga $\sqrt{G} = c \cosh \frac{u}{a}$

$$ds^2 = du^2 + c^2 \cosh^2 \frac{u}{a} \, dv^2$$

Kasus II:

Dalam hal ini apabila berlaku syarat :

$$\left(\sqrt{G} \right)_{u=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} \sqrt{G} \right)_{u=0} = \frac{c}{a}$$

Maka dengan syarat tersebut persamaan (3.10) dan (3.11) akan diarahkan ke bentuk (ii) dari (3.7)dan (3.8) dan ini adalah syarat agar sistim parameter geodesik menjadi polar geodesik.

Dari (3.10) :

$$\sqrt{G} = \phi(v)\cos\frac{u}{a} + \Psi(v)\sin\frac{u}{a}$$

$$\left(\sqrt{G}\right)_{u=0} = 0 \quad , \text{ maka}$$

$$0 = \phi(v)\cos 0 + \Psi(v)\sin 0$$

$$\phi(v) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{G}\right)_{u=0} = \frac{c}{a} \quad , \text{ maka}$$

$$\frac{c}{a} = -\frac{\phi(v)}{a}\sin\frac{u}{a} + \frac{\Psi(v)}{a}\cos\frac{u}{a}$$

$$\frac{c}{a} = 0 + \frac{\Psi(v)}{a}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\Psi(v)}{a}$$

$$\Psi(v) = c$$

$$\Psi(v) = c$$

$$\phi(v) = 0$$

Maka (3.10) menjadi : $\sqrt{G} = c\sin\frac{u}{a}$

dan $ds^2 = du^2 + c^2\sin^2\frac{u}{a}\,dv^2$

analog untuk (3.11) , sehingga $\sqrt{G} = c\sinh\frac{u}{a}$

$$ds^2 = du^2 + c^2\sinh^2\frac{u}{a}\,dv^2$$

Persamaan tersebut bentuk (ii) dari (3.7) dan (3.8)

Kasus III

Dari bentuk persamaan : (3.10) dan (3.11)

$$\sqrt{G} = \phi(v) \cos \frac{u}{a} + \Psi(v) \sin \frac{u}{a}$$

$$\sqrt{G} = \phi(v) \cosh \frac{u}{a} + \Psi(v) \sinh \frac{u}{a}$$

Dapat diketahui , jika suatu permukaan dengan kelengkungan konstan yang memenuhi syarat diatas maka elemen liniernya dapat disederhanakan menjadi bentuk :

$$ds^2 = du^2 + c^2 \cos^2 \left(\frac{u}{a} - \frac{\pi}{4} \right) dv^2$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{c^2}{a^2} e^{2u/a} dv^2$$

Seperti disebutkan dalam theorema :

Elemen linier setiap permukaan sembarang dengan kelengkungan konstan dapat disederhanakan dalam bentuk (3.7) dan (3.8) sesuai dengan parameter geodesiknya yang merupakan orthogonal pada sebuah kurva yang berkelengkungan konstan, atau tegak lurus ke sebuah kurva geodesic.