B A B II
P E R M U K A A N

Sebuah permukaan dalam ruang dimensi tiga didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang koordinatnya merupakan fungsi dua paremeter bebas u,v yang disajikan dalam bentuk :

$$x = f_1 (u,v)$$
$$y = f_2 (u,v) \qquad \ldots\ldots\ldots (2.1)$$
$$z = f_3 (u,v)$$

Ini adalah bentuk parameter persamaan permukaan, dimana :

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2 \quad , \quad v_1 \leqslant v \leqslant v_2$$

Apabila koordinat x,y,z merupakan fungsi parameter tunggal maka menunjukkan suatu kurva yang disajikan dengan :

$$x = x (u)$$
$$y = y (u)$$
$$z = z (u)$$

Tetapi dapat pula terjadi satu atau dua dari fungsi tersebut hanya memuat satu parameter tungga, misalnya pada persamaan silinder yang berbentuk :

$$x = f_1 (u)$$
$$y = f_2 (u)$$
$$z = f_3 (u,v)$$

Dengan eliminasi (u,v) pada persamaan (2.1) maka akan didapat hubungan antar koordinat yang dapat ditulis :

$$F (x,y,z) = 0$$

Pada persamaan permukaan jika u konstan maka persamaanya hanya tergantung dari satu parameter v sehingga disebut kurva parameter u konstan, dan jika v konstan disebut kurva parameter v konstan.

Jika konstante berubah--ubah maka permukaannya ditutupi oleh kumpulan kurva parameter atau disebut juga kurva

II.1. BESARAN ORDE SATU DAN ORDE DUA .

Bentuk persamaan parameter suatu permukaan S didefinisikan sebagai :

$x = f_1 (u,v) , \quad y = f_2 (u,v) , \quad z = f_3(u,v)$

Persamaan $\emptyset (u,v) = 0$ antara koordinat kurva u,v pada suatu permukaan menentukan kurva pada permukaan tersebut. Dan elemen linier kurva tersebut :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.2)$$

dengan :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

dimana :

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

$$H^2 = EG - F^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

sehingga elemen linier :

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2 \quad \ldots\ldots (2.4)$$

Persamaan ini disebut persamaan elemen garis pada permukaan dan E,F,G disebut besaran orde pertama.

Untuk mengetahui besaran orde dua terlebih dahulu kita pandang titik sembarang M^1 (u +du,v+dv) pada permukaan .

Dengan menggunakan deret Taylor disekitar M^1 didapat:

$$x(u+du, v+dv) = x(u,v) + du\frac{\partial x}{\partial u} + dv\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{2!}\left[du^2\frac{\partial x}{\partial u^2} + 2dudv\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + dv^2\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right] + \frac{1}{3!}\left[du\frac{\partial x}{\partial u} + dv\frac{\partial x}{\partial v}\right]^3 x(u+\theta du, v+\theta_2 dv)$$

Dengan cara yang sama untuk y dan z.

Jika p adalah jarak antara titik M' dengan bidang singgung kurva maka :

$$p = \sum X\,dx = du\sum X\frac{\partial x}{\partial u} + dv\sum X\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{2!}\left[du^2\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2\,dudv\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + dv^2\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right] + \frac{1}{3!}\left[du\frac{\partial x}{\partial u} + dv\frac{\partial x}{\partial v}\right]^3 \sum X\, x(u+\theta du, v+\theta_2 dv).$$

Karena garis normalnya tegak lurus terhadap garis singgung kurva maka :

$$\sum X\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \qquad \sum X\frac{\partial x}{\partial v} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(2.5.)$$

sehingga :

$$p = \sum X\,dx = \tfrac{1}{2}\left[Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2\right] + e$$

dengan e adalah hubungan orde tiga dan seterusnya dalam du dan dv.

Sedangkan :

$$D = \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad D' = \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad D'' = \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \quad \ldots (2.6).$$

sehingga bentuk kwadrat turunannya :

$$\phi = D\,du^2 + 2D'\,dudv + D''dv^2 \quad \ldots\ldots\ldots(2.7)$$

Ini disebut bentuk persamaan kwadrat kedua dan D,D',D" disebut besaran orde dua .

Dari kedua bentuk persamaan kwadrat diatas maka dapat diketahui kelengkungan normal dan jari-jari kelengkungan normal.

$$K_n = \frac{1}{R} = \frac{D\,du^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{ds^2}$$

$$= \frac{D\,du^2 + 2D'dudv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2}$$

Misal : $\frac{dv}{du} = t$

$$K_n = \frac{D + 2D't + D''t^2}{E + 2\,Ft + G\,t^2}$$

Nilai R extrem, maka dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$K_n' = \left(\frac{1}{R}\right)' = \frac{(2D'+2D''t)(E+2Ft+Gt^2)-(D+2D't+D''t^2)(2F+2Gt)}{(E+2Ft+Gt^2)^2}$$

$K_n' = 0$

Jadi : $(2D'+2D''t)(E+2Ft+Gt^2)-(D+2D't+D''t^2)(2F+2Gt) = 0$

$$(2D'+2D''t)(E+2Ft+Gt^2) = (D+2D't+D''t^2)(2F+2Gt)$$

$$\frac{D + 2D't + D''t^2}{E + 2Ft + Gt^2} = \frac{D' + D''t}{F + Gt}$$

Maka : $\frac{1}{R} = \frac{D' + D''t}{F + Gt}$

Pandang persamaan :

$$D + 2D't + D''t^2 = (D + D't) + (D' + D''t)t$$

$$E + 2Ft + Gt^2 = (E + Ft) + (F + Gt)t$$

Maka :

$$\frac{1}{R} = \frac{D' + D''t}{F + Gt} = \frac{D + D't}{E + Ft}$$

$$E + Ft - R\,(D' + D''t) = 0$$

$$E + Gt - R\,(D' + D''t) = 0$$

Eliminasi t dari kedua persamaan tersebut akan di - dapat persamaan :

$$(DD'' - D'^2)\,R^2 - (ED'' + GD - 2FD')\,R + (EG - F^2) = 0$$

Dengan R_1 dan R_2 sebagai akar persamaan maka :

$$R_1 + R_2 = \frac{ED'' + GD - 2FD'}{DD'' - D'^2}$$

$$R_1 . R_2 = \frac{EG - F^2}{DD'' - D'^2}$$

Apabila akar - akar persamaan dinyatakan dengan ρ_1 dan ρ_2 .

Maka : $\dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{DD'' - D'^2}{ED'' + GD - 2FD'} =$

= Kelengkungan rata-rata

$$\frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2} = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = \frac{DD'' - D'^2}{H^2}$$

= Kelengkungan Gauss . . . . (2.8)

II.2. PERSAMAAN GAUSS DAN CODAZZI

Untuk mengetahi persamaan Gauss dan persamaan Codazzi terlebih dahulu kita lihat (2.3).

Jika (2.3) diturunkan ke u dan v kemudian di reduksi akan didapatkan :

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E$$

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial x}{\partial u} + \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = E_u$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \tfrac{1}{2} E_u$$

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = E_v$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \tfrac{1}{2} E_v$$

Dengan cara yang sama terhadap F dan G sehingga didapat :

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = F_u - \tfrac{1}{2} E_v$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = F_v - \tfrac{1}{2} G_u$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \tfrac{1}{2} G_u$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \tfrac{1}{2} G_v$$

Besaran-besaran orde dua didapat dari : $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$,

maka menurut Gauss terdapat hubungan :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a_1 \frac{\partial x}{\partial u} + b_1 \frac{\partial x}{\partial v} + c_1 X$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = a_2 \frac{\partial x}{\partial u} + b_2 \frac{\partial x}{\partial v} + c_2 X \quad \ldots\ldots(2.9)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = a_3 \frac{\partial x}{\partial u} + b_3 \frac{\partial x}{\partial v} + c_3 X$$

dimana $a_1, a_2, \dots\dots\dots, b_3$ merupakan simbul-simbul Christoffel dan $C_1 = X \dfrac{\partial^2 x}{u^2} = D$

$$C_2 = X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = D'$$

$$C_3 = X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = D''$$

sedangkan harga $a_1, a_2, \dots\dots\dots, b_3$ dapat dicari dari :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a_1 \frac{\partial x}{\partial u} + b_1 \frac{\partial x}{\partial v} + C_1 X$$

dikalikan $\dfrac{\partial x}{\partial u}$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a_1 \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + b_1 \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + C_1 X \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\tfrac{1}{2} E_u = a_1 E + b_1 F + 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a_1 \frac{\partial x}{\partial u} + b_1 \frac{\partial x}{\partial v} + C_1 X \text{ dikalikan } \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} = a_1 \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + b_1 \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + C_1 X \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$F_u - \tfrac{1}{2} E_v = a_1 F + b_1 G + 0$$

Jadi :

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2} E_v & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} GE_u - FF_u + \frac{1}{2} FE_v}{EG - F^2}$$

$$= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} = \left\{ \begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \right\}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} E & \frac{1}{2}E_u \\ F & F_u - \frac{1}{2}E_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{EF_u - \frac{1}{2}EE_v - \frac{1}{2}FE_u}{EG - F^2}$$

$$= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\}$$

Dengan cara yang sama hingga akan didapatkan nilai-nilai :

$$a_2 = \frac{GE_u - FG_u}{2H^2} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}, \quad a_3 = \frac{-FG_u - GG_u + 2GF_u}{2H^2} = \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}$$

$$b_2 = \frac{EG_u - FE_v}{2H^2} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}, \quad b_3 = \frac{EG_v + FG_u - 2FF_v}{2H^2} = \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}$$

Maka persamaan (2.9) menjadi :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + DX$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + D'X \qquad \ldots (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + D''X$$

Persamaan ini disebut persamaan Gauss.

Dari (2.10) dapat dicari persamaan karakteristik Gauss :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = a_1 a_3 E + b_1 b_3 G + (a_1 b_3 + b_1 a_3)F + DD''$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 = a_2^2 E + b_2^2 G + a_2 b_2 F + D'^2$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2 = (a_1 a_3 - a_2^2)E + (b_1 b_3 - b_2^2)\,G +$$

$$(a_1 b_3 + b_1 a_3 - a_2 b_2)\,F + DD'' - D'^2$$

Lihat persamaan :

$$* \quad \frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = F_u - \tfrac{1}{2} E_v$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = F_{uv} - \tfrac{1}{2} E_{vv}$$

$$* \quad \frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \tfrac{1}{2} G_u$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \tfrac{1}{2} G_{uu}$$

Jadi :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2 = F_{uv} - \tfrac{1}{2} E_{vv} - \tfrac{1}{2} G_{uu}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu})$$

sehingga :

$$\tfrac{1}{2}(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}) = a_1 a_3 E + (a_1 b_3 + b_1 a_3)F + b_1 b_3\,G -$$

$$(a_2^2 E + a_2 b_2 F + b_2^2 G) + DD'' - D'^2$$

$$DD'' - D'^2 = \tfrac{1}{2}(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}) + (a_2^2 E + a_2 b_2 F + b_2^2 G -$$

$$a_1 a_3 E + (a_1 b_3 + a\,b_1)F + b_1 b_3 G \quad \ldots (2.11)$$

Ini merupakan bentuk persamaan karakteristik Gauss .

Persamaan Codazzi dapat dicari dengan menggunakan persamaan (2.10)

Dengan menggunakan syarat turunan :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)$$

dari :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1 & 1\\ 2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + DX\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + D'X\right)$$

$$\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 1\end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix}1 & 1\\ 2\end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial v}DX = \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u}D'X$$

dikalikan X

$$\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 1\end{Bmatrix}X\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix}1 & 1\\ 2\end{Bmatrix}X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + XX\frac{\partial D}{\partial v} = \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix}X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix}X\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + XX\frac{\partial D'}{\partial u}$$

$$\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 1\end{Bmatrix}D' + \begin{Bmatrix}1 & 1\\ 2\end{Bmatrix}D'' + \frac{\partial D}{\partial v} = \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix}D + \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix}D' + \frac{\partial D'}{\partial u}$$

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix}D + \left(\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix}\right)D' + \begin{Bmatrix}1 & 1\\ 2\end{Bmatrix}D'' = 0$$

analog untuk :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)$$

sehingga didapat :

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \begin{Bmatrix}2 & 2\\ 1\end{Bmatrix}D + \left(\begin{Bmatrix}2 & 2\\ 2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix}\right)D' - \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix}D'' = 0$$

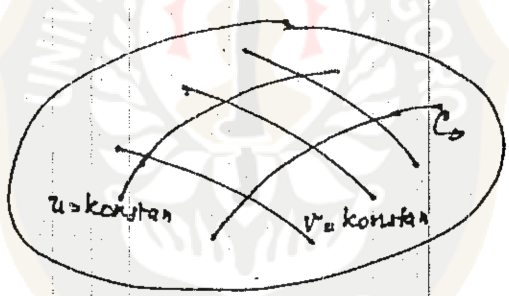
Maka bentuk persamaan Codazzinya adalah :

$$\frac{\partial D}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} D + \left(\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} \right) D' + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} D'' = 0$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} D + \left(\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} \right) D' - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} D'' = 0 \qquad ..(2.12)$$

II.3. KOORDINAT GEODESIK.

Perhatikan kurva sembarang C_o pada suatu permukaan. Disetiap titik pada C_o taruhlah kurva yang tegak lurus C_o.



Pada permukaan tersebut kurva Geodesik adalah kurva parameter v konstan dan trayektori orthogonalnya sebagai kurva parameter u konstan.

Karena kurva parameternya arthogonal ($u \perp v$) maka $F = o$, sehingga elemen linier garis menjadi :

$$ds^2 = E\, du^2 + G\, dv^2 .$$

Suatu syarat bahwa parameter v konstan pada suatu permukaan merupakan kurva geodesik adalah :

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2H^2} \left(2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial E}{\partial v} \right) = 0$$

oleh karena $F = 0$, maka

$$\frac{1}{2(EG-F^2)}\left(2E\frac{\partial F}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2(EG-0)}\left(2E.0 - 0.\frac{\partial E}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2EG}\left(-E\frac{\partial E}{\partial v}\right) = 0$$

$$\frac{-\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2G} = 0$$

Jadi $\dfrac{\partial E}{\partial v} = 0$, maka E merupakan fungsi u .

Elemen liniernya :

$$ds^2 = E(u)\, du^2 + G(u,v)\, dv^2 \quad \ldots \quad (2.13)$$

Jika diambil parameter baru U, dimana

$$U = \int \sqrt{E}\, du$$

maka :

$$ds^2 = dU^2 + G\, dv^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.14)$$

Ini disebut dengan bentuk geodesik ds^2, dan (u,v) didisebut dengan koordinat geodesik.

Koordinat- koordinat geodesik yang lain dapat ditemukan tergantung pengambilan kurva C_0 pada permukaan tersebut.

Dari (2.14) diketahui : F = 0 , E = 1 dan $H^2 = G$ maka untuk koordinat geodesik berlaku :

$$a_1 = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & 1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2H^2}\left(GE_u - 2\,FF_u + FE_v\right) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2H^2} \left(2EF_u - EE_v - FE_u \right) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2H^2} \left(GE_v - FG_u \right) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2H^2} \left(EG_u - FE_v \right) = \frac{EG_u}{2G} = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}$$

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2H^2} \left(2GF_v - FG_u - GG_u \right) = \frac{-GG_u}{2G} = - G_u$$

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2H^2} \left(EG_v - 2FF_v + FG_u = \frac{EG_v}{2G} = \frac{1}{2} \frac{G_v}{G} \right.$$

Apabila harga-harga diatas kita masukan kedalam (2.11) maka persamaan karakteristik Gauss menjadi:

$$\begin{aligned} DD'' - D'^2 &= \tfrac{1}{2} \left(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu} \right) \\ &\quad + a_2^2 E + a_2 b_2 F + b_2^2 G \\ &\quad - a_1 a_3 E + (a_1 b_3 + a_3 b_1) F + b_1 b_3 G \\ &= \tfrac{1}{2} (0 - 0 - G_{uu}) + 0 + 0 + \left(\tfrac{1}{2} \frac{G_u}{G} \right)^2 G \\ &\quad - (0 + 0 + 0) \\ &= -\tfrac{1}{2} G_{uu} + \tfrac{1}{4} \frac{G_u^2}{G} \\ &= - \sqrt{G} . \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \qquad \ldots\ldots (2.15) \end{aligned}$$

Dari (2.8)

Kelengkungan Gauss (K) $= \dfrac{DD'' - D'^2}{H^2}$

$$\text{Jadi } K = \frac{-\sqrt{G}\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2}}{EG - F^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{G}\ \dfrac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}}{G}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{G}}\ \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \qquad \ldots\ldots \ (2.16)$$