BAB IV

Transformasi Fourier

Dalam bab sebelumnya telah dibahas teori perluasan dari suatu fungsi f(x) yang mempunyai periode 2L ke dalam deret Fourier, dengan perkataan lain fungsi yang bersifat periodik dapat dijabarkan ke dalam deret Fourier.

Namun diantara kejadian-kejadian yang sering nampak, juga terdapat gejala-gejala yang tidak periodik, yakni kejadian yang hanya terjadi pada sesaat saja, hal ini dapat dianggap bahwa kejadian tersebut merupakan fungsi periodik dengan periode yang tak berhingga, oleh karenanya harus dijabarkan ke dalam trasformasi Fourier, jadi transformasi Fourier merupakan deret Fourier yang periodenya tak berhingga.

Pada penelitian ilmiah masa kini, transformasi Fourier adalah suatu alat analisa yang sangat penting sekali. Kemungkinan yang paling sering dijumpai pada penerapan dari metode matematika tersebut adalah menganalisa sistem linier time invariant.

Pada saat menyelesaikan problema, penentukan suatu fungsi dan transformasi Fourier-nya, sering sekali merupakan kunci keberhasilan dalam menyelesaikan problema tersebut. Hal tersebut disebabkan transformasi Fourier akan memberikan jenis-jenis frekwensi yang terkandung dalam signyalnya, sehingga dapat dikatakan transformasi

Fourier adalah dasar matematika dari analisa frekwensi.

IV. 1. Integral Fourier

Transformasi Fourier didefinisikan sebagai :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\ e^{-j2\pi ft}dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4.1)$$

jika untuk setiap harga para meter f integral persamaan (4.1) ada, maka H(f) didefinisikan sebagai transformasi Fourier dari h(t).

Dimana h(t) adalah fungsi dari variabel waktu dan H(f) adalah fungsi dari variabel frekwensi. Untuk selanjutnya fungsi h(t) dan H(f) akan selalu digunakan dalam paper ini, dimana t diartikan waktu (huruf pertama dari "time"), sedangkan f diartikan frekwensi (juga huruf pertama dari "frequency"). Fungsi waktu dinyatakan dengan huruf kecil, sedangkan transformasi Fourier dari fungsi waktu dinyatakan dengan huruf besar, yang menyatakan fungsi frekwensi.

Pada umumnya transformasi Fourier merupakan bilangan kompleks dari variabel frekwensi f :

$$H(f) = R(f) + j\ I(f) = |H(f)|e^{j\ \theta(f)} \quad \ldots\ldots\ (4.2)$$

dimana :

$j = \sqrt{-1}$

R(f) adalah bagian riel dari transformasi Fourier.

I(f) adalah bagian imaginair dari transformasi Fourier.

|H(f)| adalah magnitude atau spectrum Fourier dari

h(t) dan merupakan $\sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$

$\Theta(f)$ adalah sudut fase dari transformasi Fourier dan merupakan $\tan^{-1}[I(f)/R(f)]$.

IV.2. Kebalikan transformasi Fourier (Inverse Fourier transform)

Kebalikan transformasi Fourier didefinisikan sebagai :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{j2\pi ft} df \quad \text{.................} \quad (4.3)$$

Kebalikan transformasi Fourier memberikan bentuk fungsi waktu yang diubah kembali dari transformasi Fourier-nya.

Apabila fungsi-fungsi h(t) dan H(f) dihubungkan oleh persamaan (4.1) dan (4.3), kedua fungsi tersebut disebut suatu pasangan transformasi Fourier.

Disini ditentukan hubungan ini dengan notasi :

$$h(t) \longleftrightarrow H(f) \quad \text{..........................} \quad (4.4)$$

IV.3. Syarat agar integral Fourier ada

Sampai disini belum pernah mempertimbangkan berlakunya persamaan (4.1) dan (4.3), walaupun persamaan-persamaan integral diasumsikan telah terdefinisi untuk semua fungsi. Pada umumnya untuk semua fungsi yang ditemui pada analisa ilmu pengetahuan yang praktis, transformasi Fourier dan kebalikannya adalah terdefinisi. Disini tidak akan mengemukakan suatu pembahasan yang sangat teoritis mengenai syarat agar transformasi Fourier ada, namun hanya akan mengemukakan beberapa syarat agar integral Fourier ada.

Kondisi 1

Jika h(t) pada persamaan dibawah ini dapat diintegralkan (integrable), yakni :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.5)$$

maka transformasi Fourier dari h(t) ke H(f) ada dan sebaliknya juga memenuhi kebalikan transformasi Fourier yang tertulis pada persamaan (4.3).

Perlu ditekankan bahwa kondisi 1 hanya merupakan syarat cukup, tetapi tidak merupakan syarat perlu agar transformasi Fourier ada.

Masih terdapat juga fungsi-fungsi yang tidak memenuhi syarat kondisi 1, tetapi terdapat transformasi yang memenuhi persamaan (4.3).

Sebagai contoh :

Fungsi [sin af / af] adalah fungsi yang tidak memenuhi koondisi 1, namun dapat memenuhi transformasi Fourier maupun kebalikannya.

Katagori fungsi-fungsi ini akan diliputi oleh kondisi 2.

Kondisi 2

Bila h(t) merupakan fungsi turun :

$h(t) = B(t) \sin (2\pi ft + \alpha)$

dimana f dan α konstanta sembarang, jika $B(t+K) < B(t)$ dan jika $|t| > \lambda > 0$, fungsi $h(t)/t$ adalah dapat diintegralkan nilai mutlaknya (absolutely integrable), maka H(f) ada dan memenuhi kebalikan transformasi Fourier yang tertulis pada persamaan (4.5)

Kondisi 3

Meskipun tidak dinyatakan secara khusus, untuk semua fungsi yang memenuhi kondisi 1 dan kondisi 2, diasumsikan sebagai variasi yang terbatas (bounded variation), yaitu fungsi-fungsi tersebut kontiniu bagian demi bagian.

Melalui kondisi 3 , teorinya dapat diperluas agar mencakup fungsi singulir (impulse) yang telah dibicarakan pada bab III.

Penting untuk mengembangkan transformasi Fourier dari fungsi-fungsi impulse, karena penggunaan mereka sangat menyederhanakan pengoperasian dari beberapa pasangan transformasi Fourier.

Sebagai contoh fungsi impulse yang telah dicantumkan pada persamaan (3.5) pada bab III adalah :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\ x(t)\ dt = x(t_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.6)$$

dimana x(t) merupakan suatu fungsi sembarang yang kontiniu pada $t = t_0$, penerapan dari persamaan (4.6) menghasilkan transformasi Fourier bagi beberapa fungsi penting secara singkat.

Sebagai ncontoh diambil :

$h(t) = K\ \delta(t)$

transformasi Fourier dari h(t) dapat diperoleh dengan mudah, bila menggunakan definisi persamaan (4.6) :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K\ \partial(t-0)\ e^{-j2\pi ft}\ dt$$

$$= K\ e^{j2\pi f(0)} = K$$

Kebalikan transformasi Fourier dari H(f) adalah :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K\ e^{j2\pi ft}\ df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K\ (\ \cos 2\pi ft + j \sin 2\pi ft\ )\ df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K \cos 2\pi ft\ df + j \int_{-\infty}^{\infty} K \sin 2\pi ft\ df$$

Karena fungsi yang diintegralkan pada suku integral ke dua adalah fungsi ganjil, maka hasil integral tersebut adalah nol.

Mengingat persamaan (3.8), maka :

$$h(t) = K \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi ft\ df = K\ \partial(t)$$

Pembuktian rumus Kebalikan

Dengan menggunakan fungsi impulse, dapat dikemukakan suatu bukti formal yang sederhana, mengenai rumus kebalikan transformasi Fourier yang tertulis pada persamaan (4.3).

Substitusikan H(f) yang tertulis pada persamaan (4.1) ke dalam persamaan (4.3) menhasilkan :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(f)\ e^{j2\pi ft} df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{-j2\pi fx} dx \right) df \;\ldots (4.7)$$

dari persamaan (3.15) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} dt = \delta(t)$$

Kemudian dengan mengganti1an integrasi pada persamaan (4.7) menghasilkan :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-x)} df \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, \delta(t-x) dx \;\ldots\ldots\; (4.8)$$

Tetapi mengingat definisi dari fungsi impulse pada persamaan (4.6), persamaan (4.8) dapat disederhanakan menjadi h(t), pernyataan ini hanya berlaku apabila h(t) kontiniu, tetapi kalau diasumsikan bahwa :

$$h(t) = \frac{h(t+0) + h(t-0)}{2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4.9)$$

ini berarti jika h(t) terdefinisi sebagai nilai tengah pada titik diskontiniutasnya, maka rumus kebalikannya masih tetap berlaku.

IV.4. Definisi transformasi Fourier dalam bentuk lain

Telah diakui oleh kalangan ilmiah, bahwa transformasi Fourier merupakan suatu metoda yang lazim dipergunakan didalam analisa ilmiah masa kini.

Namun sampai dewasa ini, integral Fourier dan rumus kebalikannya masih belum terdapat definisi yang disepakati.

Untuk lebih terperinci, pasangan transformasi Fourier didefinisikan menjadi :

$$H(\omega) = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\ e^{-j\omega t}\ dt, \qquad \omega = 2\pi f t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.10)$$

$$h(t) = a_2 \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\ e^{j\omega t}\ dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.11)$$

Dimana pengambilan harga koeffiesien a_1 dan a_2, akan berubah-ubah menurut kebutuhan yang berbeda-beda, tergantung pada pemakainya. Sejumlah orang menentukan $a_1 = 1$, $a_2 = 1/\ 2\pi$, ada kalanya ditentukan menjadi $a_1 = a_2 = 1/\ \sqrt{2\pi}$ atau $a_1 = 1/\ 2\pi$, $a_2 = 1$.

Persamaan (4.10) dan (4.11) semata-mata harus memenuhi $a_1 a_2 = 1/\ 2\pi$, namun bagi pemakai yang berbeda-beda, akan mengurai hasil perkalian $a_1 a_2$ menjadi faktor perkalian yang berlainan pula.

Untuk menyelesaikan persoalan ini, perlu mendefinisikan bentuk hubungan antara transformasi Laplace dan transformasi Fourier yang dibutuhkan, serta mendefinisikan hubungan yang diharapkan diantara totalitas energi yang dihitung dalam domain waktu dan totalitas energi yang dihitung dalam domain sudut frekwensi ( ). Sebagai contoh teorema Parseval (pembuktiannya akan dijabarkan pada bab VI) menunjukkan :

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\ dt = 2\pi (a_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2\ d \quad \ldots\ldots (4.12)$$

Bila mempersyaratkan energi yang dihitung pada t sama dengan energi yang dihitung pada ω, maka $a_1 = 1\ /\ \sqrt{2\pi}$. Akan tetapi bila mempersyaratkan transformasi

Fourier dijabarkan dari transformasi Laplace, oleh karena definisi transformasi Laplace adalah :

$$L[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t).\, e^{-(\sigma+j\ )t}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ (4.13)$$

pada persamaan di atas, bagian riil dari s bila ditetapkan sebagai 0, langsung mendapatkan transformasi Fourier.

Bila memperbandingkan persamaan (4.10) dan (4.13), maka mempersyaratkan $a_2 = 1$, yaitu $a_2 = 1/\ 2\pi$, hal tersebut adalah kontradiksi dengan langkah didepannya.

Untuk mengatasi kontradiksi tersebut, suatu jalan keluar yang layak adalah mendefinisikan transformasi Fourier sebagai :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.14)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{j2\pi ft}\, df \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.15)$$

berdasarkan definisi ini, teorema Parseval menjadi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df$$

sedangkan persamaan (2.14) adalah ekivalen dengan definisi transformasi Laplace.

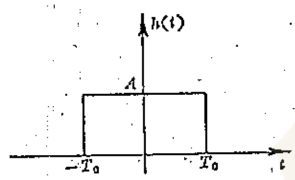
Catatan bahwa bila integral dilakukan terhadap f, faktor perbandingan $1/\ 2\pi$ tidak akan timbul lagi. Oleh karenanya pada penyusunan skripsi ini, menggunakan pasangan transformasi Fourier seperti persamaan (4.14) dan

(4.15).

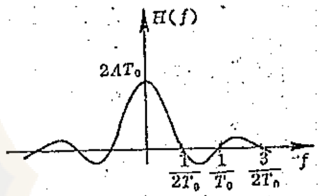
IV.5. Pasangan transformasi Fourier

Suatu tabel grafik dari pasangan-pasangan transformasi Fourier diberikan pada gambar : IV-1.

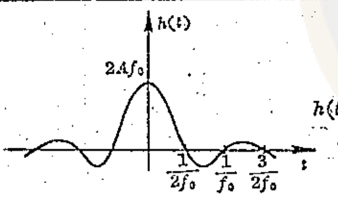
Grafik dan kumpulan analitis ini tidak dapat dikatakan sempurna, tetapi terdapat pasangan-pasangan transformasi Fourier yang paling sering dijumpai.



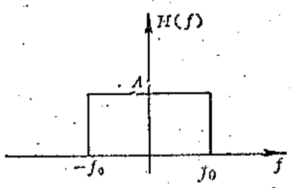
$$h(t)=\begin{cases} A, & |t|<T_0 \\ \frac{A}{2}, & |t|=T_0 \\ 0, & |t|>T_0 \end{cases} \Longleftrightarrow H(f)=2AT_0\frac{\sin(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}$$



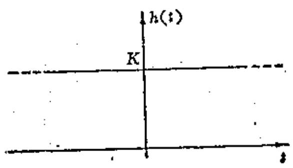
1



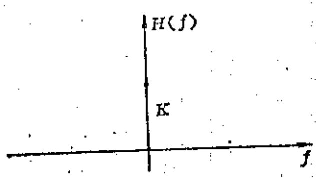
$$h(t)=2Af_0\frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow H(f)=\begin{cases} A, & |f|<f_0 \\ \frac{A}{2}, & |f|=f_0 \\ 0, & |f|>f_0 \end{cases}$$



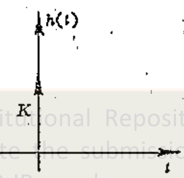
2



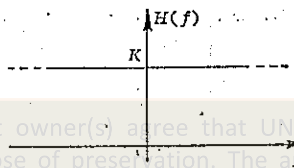
$$h(t)=K \Longleftrightarrow H(f)=K\delta(f)$$



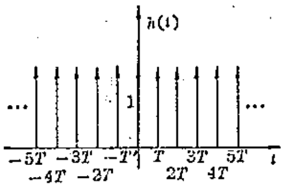
3



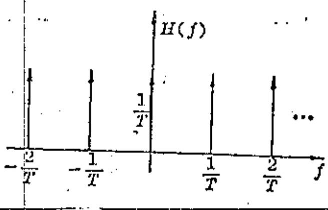
$$h(t)=K\delta(t) \Longleftrightarrow H(f)=K$$



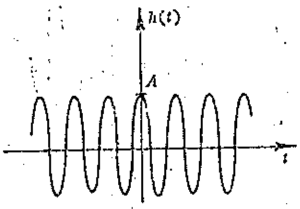
4



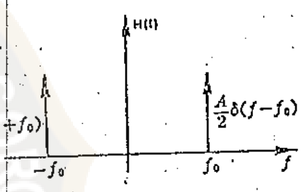
$$h(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \Longleftrightarrow H(f)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$



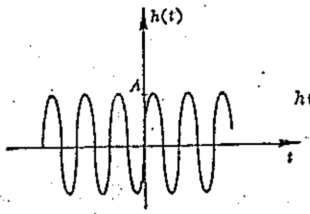
5



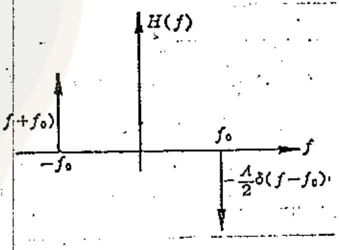
$$h(t)=A\cos(2\pi f_0 t) \Longleftrightarrow H(f)=\frac{A}{2}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$



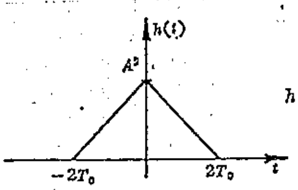
6



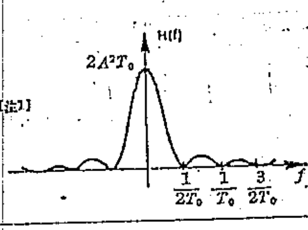
$$h(t)=A\sin(2\pi f_0 t) \Longleftrightarrow H(f)=-j\frac{A}{2}\delta(f-f_0)+j\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$



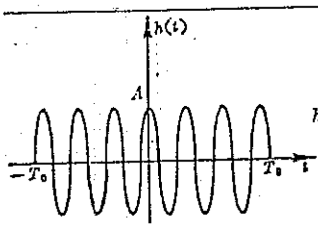
7



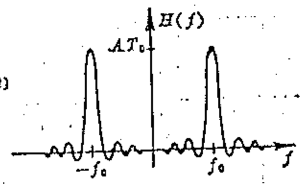
$$h(t)=\begin{cases}-\dfrac{A^2}{2T_0}|t|+A^2, & |t|<2T_0\\ 0, & |t|\geqslant 2T_0\end{cases} \Longleftrightarrow H(f)=A^2\frac{\sin^2(2\pi T_0 f)}{2T_0(\pi f)^2}\text{[注1]}$$



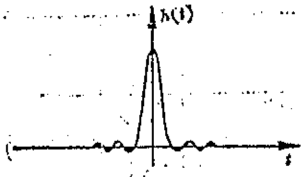
8



$$h(t)=\begin{cases}A\cos(2\pi f_0 t), & |t|<T_0\\ 0, & |t|>T_0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{aligned}H(f)&=AT_0[Q(f+f_0)+Q(f-f_0)]\text{[注2]}\\ Q(f)&=\frac{\sin(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}\end{aligned}$$

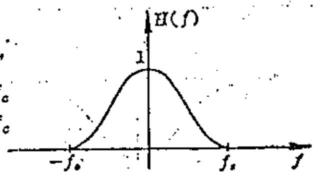


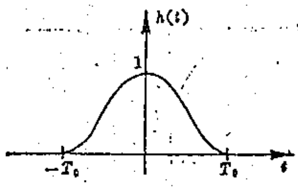
9



$$h(t) = \frac{1}{2}q(t) + \frac{1}{4}q\left(t + \frac{1}{2f_c}\right) + \frac{1}{4}q\left(t - \frac{1}{2f_c}\right) \Longleftrightarrow H(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi f}{f_c}\right), & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases}$$

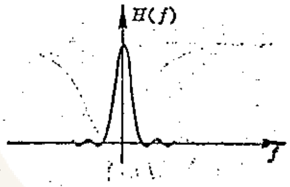
$$q(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$$

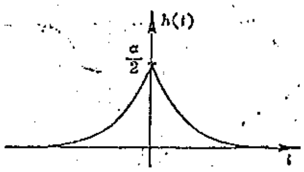




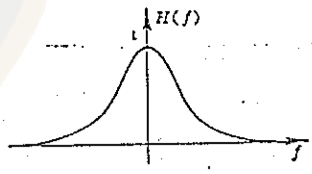
$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right), & |t| \leq T_0 \\ 0, & |t| > T_0 \end{cases} \Longleftrightarrow H(f) = \frac{1}{2}Q(f) + \frac{1}{4}\left[Q\left(f + \frac{1}{2T_0}\right) + Q\left(f - \frac{1}{2T_0}\right)\right]$$

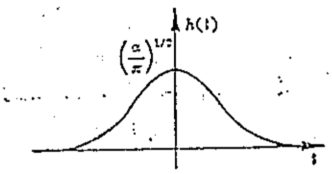
$$Q(f) = \frac{\sin(2\pi T_0 f)}{\pi f}$$



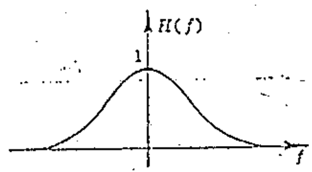


$$h(t) = \frac{1}{2}\alpha \exp(-\alpha|t|) \Longleftrightarrow H(f) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$
$$(\alpha > 0)$$





$$h(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \exp(-\alpha t^2) \Longleftrightarrow \exp\left(\frac{-\pi^2 f^2}{\alpha}\right)$$
$$(\alpha > 0)$$



Gambar : IV - 1

Pasangan-pasangan transformasi Fourier