BAB III

Fungsi Impulse

Pada bab II telah diuraikan beberapa terminologi yang berkaitan dengan deret Fourier, deret tersebut merupakan alat yang sangat penting di dalam menganalisa getaran. Seperti kita ketahui terdapat 2 jenis gelombang, yakni gelombang elektro maknit dan gelombang mekanis, yang pada kenyataannya, gelombang-gelombang tersebut jarang dijumpai dalam bentuk yang sederhana, kebanyakan merupakan suatu sinyal yang kompleks, penguraian sinyal kompleks semacam itu, menjadi komponen-komponennya pada berbagai macam tingkat frekwensi, dapat dilakukan dengan analisa frekwensi. Hal tersebut dapat berlaku untuk semua macam sinyal.

Kata "komponen" dapat ditafsirkan dalam beberapa cara, dan ada perlunya untuk dijelaskan perbedaan-perbedaan yang terdapat diantara para ilmuwan.

Bagi para matematikawan dan insinyur teori, cenderung menyebut "komponen-komponen" sebagai hasil suatu analisa Fourier, sementara insinyur-insinyur praktek sering menyebutnya sebagai pengukuran yang dilakukan dengan menfilter getaran, sehingga dapat dipisahkan menjadi bermacam-macam frekwensi.

Selanjutnya bab ini akan mengemukakan fungsi impulse (fungsi δ), yang kemudian akan dibahas lebih lanjut pada bab-bab berikutnya.

Adapun dikemukakannya fungsi impulse dalam bab ini, karena fungsi ini adalah suatu alat matematika yang sangat penting didalam analisa Fourier yang kontiniu dan diskrit, kegunaannya adalah menyerdehanakan banyak sekali hasil yang didapatkan dari penjabaran (derivation), agar tidak memerlukan lagi banyak argumentasi yang rumit dan berkepanjangan.

Berdasarkan teori umum ini, akan dikembangkan sifat khusus dari fungsi impulse yang dibutuhkan untuk mendukung pengembangan dan memudahkan melangkah ke penguraian selanjutnya.

III.1. Definisi-definisi Fungsi impulse (fungsi ∂)

Fungsi impulse (fungsi ∂) didefinisikan sebagai :

$$\partial(t-t_0) = 0 \qquad t \neq t_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial(t-t_0) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2)$$

Ini berarti untuk $t \neq t_0$ fungsi impulse akan merupakan garis lurus yang berimpit dengan sumbu t, sedangkan jika $t = t_0$, fungsi impulse menjadi besar tak terhingga, tetapi didefinisikan bahwa luas daerah yang dibatasi oleh fungsi impulse tersebut dan sumbu t, mempunyai luasan = 1 satuan luas. Dengan perkataan lain, integrasi dari fungsi tersebut terhadap sembarang daerah (range) pada sumbu t, asalkan memuat t_0, hasilnya adalah 1 satuan luas.

Jelas sangat sukar untuk menghubungkan suatu impulse dengan suatu sinyal yang bersifat fisis. Tetapi dapat membayangkan suatu impulse sebagai suatu gelombang pulsa yang amplitudanya sangat besar sekali dan juga waktu berlangsungnya adalah sangat kecil menuju ke nol, sedemikian rupa sehingga area seperti itu merupakan suatu satuan harga.

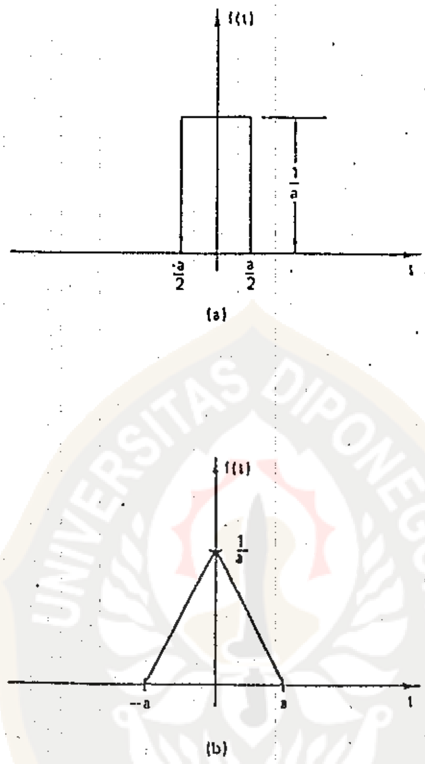
Fungsi impulse juga dapat dipandang sebagai bentuk limit dari sembarang pulsa dengan satu satuan luas, yang panjangnya dibuat kecil tak berhingga, namun pada saat yang sama, tingginya dibuat besar tak berhingga, dengan mempertahankan luasnya tetap merupakan satu satuan luas.

Bila dinotasikan dengan penafsiran demikian, pada kenyataannya, serentetan fungsi yang sedang disusun (yaitu pulsa) secara progresif, amplitudanya bertambah terus, waktu berlangsungnya berkurang terus, namun mempunyai suatu area satuan yang konstant. Ini adalah metoda lain untuk mendefinisikan fungsi impulse dengan sederhana.

Pertimbangkan bentuk gelombang pulsa yang diillustrasikan pada gambar III-1(a), perhatikan bahwa area itu adalah suatu satuan dan karenanya fungsi impulse dapat ditulis secara matematika sebagai :

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} f(t, a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

Dengan cara yang sama, dapat menggunakan limit dari fungsi-fungsi yang diillustrasikan di dalam gambar III-1 (b), yang memenuhi persamaan (3.1) dan (3.2) untuk menampilkan suatu fungsi impulse.



Gambar : III-1

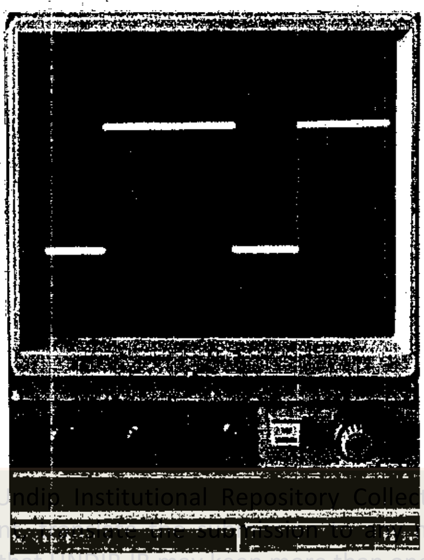
Fungsi impulse

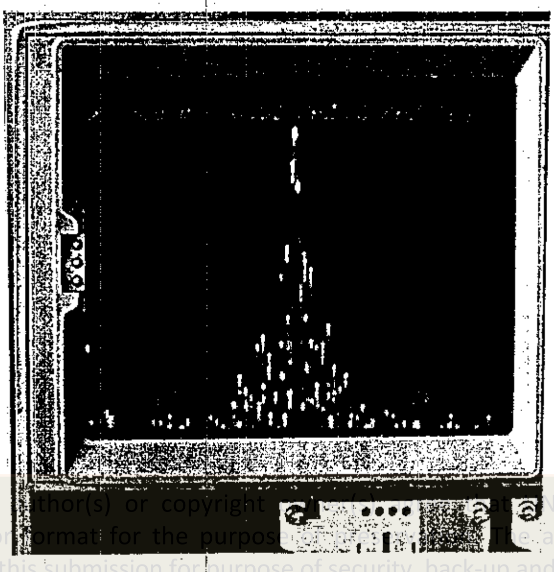
Suatu bentuk fungsi fungsional lain yang penting dimana juga mendefinisikan fungsi impulse sebagai berikut :

$$\delta(t) = \lim_{a \to \infty} \frac{\sin at}{\pi t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.4)$$

III.2. Sifat-sifat dari fungsi-fungsi impulse

Fungsi impulse $\delta(t)$, sebagai mana yang telah didefinisikan pada persamaan (3.1) dan persamaan (3.2), merupakan suatu fungsi khusus yang hanya mempunyai harga pada selang waktu yang sedemikian sempitnya pada titik t_0. oleh karenanya dapat menghasilkan distribusi frekwensi yang sangat luas sekali, hal tersebut mencerminkan distribusi domain waktu dan domain frekwensi adalah berbanding terbalik, yakni lebih sempit interval waktunya, berarti akan lebih lebar distribusi pada domain frekwensinya. Gejala tersebut akan diperlihatkan pada gambar III-2, yang menyajikan beberapa gambar hasil transformasi Fourier dari suatu alat analisa spectrum, sehingga dapat dibayangkan andaikan yang diberikan adalah fungsi impulse yang waktu berlangsungnya tak berhingga kecilnya, maka akan menghasilkan distribusi frekwensi yang sangat besar sekali, namun fungsi impulse hanya dapat dikayalkan saja, tidak dapat dinyatakan pada alat analisa spectrum tersebut. Domain frekwensi adalah hasil transformasi Fourier dari domain waktu, akan dibahas pada bab IV. Sedangkan penerapan fungsi impulse akan dibahas pada bab VII.





Gambar : III-2

Transformasi Fourier dari alat

analisa spectrum

Dibawah ini akan diuraikan beberapa sifat-sifat yang sering dipergunakan bagi fungsi impulse.

Sifat pergeseran

Fungsi $\delta(t-t_0)$ didefinisikan oleh :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\ \phi(t)\ dt = \phi(t_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.5)$$

Sifat ini mengimplikasikan bahwa fungsi ∂ mengambil nilai dari fungsi $\phi(t)$ pada saat fungsi δ diterapkan. Istilah sifat pergeseran timbul dalam arti kalau t_0 dibiarkan berubah secara kontinu, maka setiap nilai dari fungsi $\phi(t)$ dapat digeser, hal tersebut merupakan sifat yang paling penting dari fungsi δ.

Sifat penskalaan

Fungsi distribusi $\delta(at)$ didefinisikan oleh :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\ \phi(t)dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ \phi(\frac{t}{a})dt \ \ldots\ (3.6)$$

dimana persamaan tersebut di atas dihasilkan dari suatu penggantian didalam variabel independentnya, jadi $\delta(at)$ diberikan melalui :

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\ \delta(t)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.7)$$

Persamaan tersebut dapat dibuktikan dengan persamaan (3.5) dan (3.6).

Bukti :

Persamaan (3.6) ditulis ulang sebagai berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\ \phi(t)dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ \phi(\frac{t}{a})dt \ \ldots\ (3.6)$$

dari sifat pergeseran pada persamaan (3.5), mendapat :

$$\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ \phi(\frac{t}{a})dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-0)\ \phi(\frac{t}{a})dt$$

$$= \frac{1}{|a|}\ \phi(\frac{0}{a})$$

$$= \frac{1}{|a|}\ \phi(0)$$

mengingat persamaan (3.5) bersifat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial(t-0)\ \phi(t)\ dt = \phi(0)$$

maka :

$$\frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \partial(t)\ \phi(\frac{t}{a})dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \partial(t)\ \phi(t)\ dt$$

atau :

$$\frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \partial(t)\ \phi(\frac{t}{a})dt = \int_{-\infty}^{\infty} \partial(at)\ \phi(t)dt$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \partial(t)\ \phi(t)\ dt$$

sehingga nampak :

$$\partial(at) = \frac{1}{|a|} \partial(t)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.4) dapat membuktikan bahwa :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\ (2\pi ft)\ df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft}\ df = \partial(t)\ \ldots\ (3.8)$$

bukti sebagai berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\ (2\pi ft)\ df = \lim_{\Omega \to \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \cos\ (2\pi ft)\ df$$

$$= \lim_{\Omega \to \infty} \frac{1}{2\pi t} \sin\ 2\pi ft \Big|_{-\Omega}^{\Omega}$$

$$= \lim_{\Omega \to \infty} \frac{1}{\pi t} \sin\ 2\pi\Omega t$$

substitusi :

$$a = 2\pi\Omega$$

$\Omega \to \infty$ maka $a \to \infty$

$$= \lim_{a \to \infty} \frac{\sin at}{\pi t} = \partial(t)$$

jadi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi ft \, df = \partial(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.9)$$

mengingat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} \, df = \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi ft \, df + j \int_{-\infty}^{\infty} \sin 2\pi ft \, df$$

karena fungsi yang diintegralkan pada suku ke dua adalah ganjil, maka hasil integral tersebut adalah nol.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} \, df = \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi ft \, df \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.10)$$

dengan menggabungkan persamaan (3.9) dan (3.10), maka terbuktilah persamaan (3.8).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos (2\pi ft) \, df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} \, df = \partial(t)$$

persamaan (3.8) adalah merupakan persamaan yang cukup penting artinya, khususnya dalam upaya mengevaluasi transformasi-transformasi Fourier.